УДК 517

Урдалетова А.Б., Балжи С.
Кыргызско-Турецкий университет «Манас»

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Исследование путей разрешения существующих противоречий, в частности, между достаточно глубокой изученностью позитивного влияния на вузовский учебный процесс его профессиональной направленности и слабой проработанностью методических аспектов профессиональной направленности математической подготовки будущих экономистов в вузах является достаточно актуальной проблемой. Ей посвящено множество работ различных авторов. Разработка комплексов профессионально-ориентированных задач по математике является одной из главных составляющих метода разрешения указанных противоречий. В данной работе построены примеры приложения простейших разностных и дифференциальных уравнений на практике, в частности, в экономике.

Введение

Перемены, происходящие в мире в целом и в каждом обществе в отдельности влекут за собой необходимость изменений и в образовании. Общество сегодня нуждается в специалистах, способных к самостоятельной работе, готовых к постоянному повышению своей профессиональной компетентности, умеющих работать в условиях неопределенности. Современная жизнь требует от системы высшего профессионального образования в целом и экономического в частности подготовки конкурентоспособного специалиста, ощущающего потребность в непрерывном образовании. Хороший специалист должен обладать, в частности, следующими умениями: творчески подходить к решению возникающих перед ним задач, найти оптимальное решение проблемы, сделать прогноз и выдвинуть гипотезу, доказательно опровергнуть или принять предложенную гипотезу, доказать правильность принимаемых или предлагаемых им и другими решений. Математика, пожалуй, самая подходящая для развития этих умений и навыков наука. Однако традиционное содержание курса математики для экономических специальностей часто остается излишне формализованным, то есть недостаточно реализуется принцип профессиональной направленности. Исследованию путей разрешения существующих противоречий, в частности, между достаточно глубокой изученностью позитивного влияния на вузовский учебный процесс его профессиональной направленности и слабой проработанностью методических аспектов профессиональной направленности математической подготовки будущих экономистов в вузах посвящено множество работ различных авторов. Разработка комплексов профессионально-ориентированных задач по математике является одной из главных составляющих метода разрешения указанных противоречий.

В данной работе построены примеры приложения простейших разностных уравнений, частным случаем которых являются арифметическая и геометрическая прогрессии, а также дифференциальных уравнений на практике, в частности, в экономике.

С незапаматных времен при изучении сложных процессов и явлений человек применяет модели. Хорошо построенная модель обычно бывает доступнее для исследования и эксперимента, чем реальный объект. Например, недопустимы экперименты с экономикой в познавательных целях, неосуществимы эксперименты с прошлым и т.д. Если объект исследования обладает динамическими характеристиками, т.е. характеристиками, зависящими от времени, то особое значение имеет задача прогнозирования динамики состояния этого объекта под действием различных факторов.

Для построения динамической модели и ее исследования используется аппарат дифференциального исчисления и дифференциальных уравнений, если время рассматривается как непрерывная величина, и аппарат разностных уравнений, если время рассматривается как дискретная величина.

1. Примеры приложения разностных уравнений

Уравнение

$$x_n = ax_{n-1} + b \qquad (1)$$

называется линейным разностным уравнением первого порядка (*Linear Difference Equation of First Order*) (см. [2]).

Здесь a и b – коэффициенты уравнения, x_{n-1} – неизвестное, описывающее состояние системы в момент $(n-1)$, x_n - в момент n.

Характерной особенностью уравнения (1) является то, что оно используется для описания ситуаций, в которых состояние системы полностью определяется ее состоянием в предыдущий момент. В связи с этим уравнения вида (1) часто называются *рекуррентными*.

Стоит отметить, что при $a = 1$ уравнение (1) определяет арифметическую прогрессию, при $b = 0$ – геометрическую.

Решением уравнения (1) называется соотношение, позволяющее выразить x_n – при любом натуральном значении n через x_0, подобно формулам

$$x_n = x_0 + bn,$$

и

$$x_n = a^n x_0 ,$$

которые имеют место для арифметической и геометрической прогрессий, соответственно.

Для того чтобы найти решение уравнения (1) в общем виде, сначала отследим несколько шагов:

$x_1 = ax_0 + b;$

$x_2 = a\ x_1 + b$, и, подставив вместо x_1 его значение из предыдущего равенства, получим

$x_2 = a(a\,x_0 + b) + b = a^2\,x_0 + a\,b + b;$

$x_3 = ax_2 + b$, и, повторив процесс, получим:

$x_3 = a(a^2\,x_0 + a\,b + b) + b = a^3\,x_0 + a^2 b + ab + b;$

$x_4 = a\,x_3 + b = a(a^3 x_0 + a^2 b + ab + b) = a^4 x_0 + a^3 b + a^2 b + ab + b.$

Тенденция ясна. Можно сделать индукционное предположение:

$x_{n-1} = a^{n-1}\,x_0 + a^{n-2} b + a^{n-3} b + \ldots + ab + b.$

Индукционный переход

$x_n = ax_{n-1} + b = a(a^{n-1} x_0 + a^{n-2} b + a^{n-3} b + \ldots + ab + b) + b.$

подтверждает наше предположение:

$$x_n = a^n x_0 + a^{n-1} b + a^{n-2} b + \ldots + ab + b. \qquad (2)$$

Формула (2) определяет решение уравнения (1). Прочитаем равенство (2) справа налево и, использовав формулу для суммы членов геометрической прогрессии, из формулы (2) получим компактную форму записи решения уравнения (1):

$$x_n = a^n x_0 + b\frac{1-a^n}{1-a} \ . \qquad (3)$$

<u>Задача 1</u> *В 150 - тысячном городе естественный прирост имеет отрицательный знак: (-4%). из других мест в этот город ежегодно приезжает на 10 000 человек больше, чем уезжает. Предполагая, что эти тенденции сохранятся, ответьте на вопросы:*

а) каким будет население через 8 лет?

б) какова максимально возможная численность горожан?

Переведя условия задачи на математический язык, получим, что нужно решить уравнение

$$x_n = 0{,}96x_{n-1} + 10\ 000$$

при условии $x_0 = 150\ 000$.

Тогда ответ на первый вопрос получим из формулы (3):

$$x_8 = 150\,000 \cdot (0{,}96)^8 + 10\,000 \cdot \frac{1-0{,}96^8}{1-0{,}96} = 177861{,}05.$$

Для ответа на второй вопрос нужно устремить n к бесконечности.

$$x = 150\,000 \cdot 0 + 10\,000 \cdot \frac{1-0}{1-0{,}96} = 25\,000.$$

В то же время можно догадаться, что население стабилизируется, когда 4% от него будут равны 10 000.

Задача 2. *Для участников конференции с джайлоо везли 40-литровую флягу с кумысом. Общительный водитель по дороге останавливался 50 раз и угощал каждого встреченного приятеля 400-граммовой пиалой кумыса. При этом он тут же дополнял флягу водой. Сколько «попутной» воды привезли на конференцию?*

В исходный момент времени во фляге был чистый кумыс – то есть количество «попутной» воды $x_0 = 0$. Далее, наливая в пиалу 400 граммов жидкости, водитель каждый раз выливал из фляги сотую часть содержимого, в том числе сотую часть имеющейся воды. Вместо этого во флягу вливалось 400 граммов чистой воды.

В результате имеем уравнение:

$$x_n = 0{,}99x_{n-1} + 400.$$

Подставив значения коэффициентов a, b и n в формулу (3), получим

$$x_{50} = 0 + 400 \cdot \frac{1-0{,}99^{50}}{1-0{,}99} = 15800 \text{ гр.}$$

Во флягу было влито $400 \cdot 50 = 20$ литров воды, но часть этой воды (4,2 литра) досталась знакомым очень общительного водителя.

Задача 3 Если ограничивать объем добычи, из озера ежегодно можно вылавливать по 3,4 тонны рыбы. При отсутствии ограничений количество рыбы, вылавливаемой из озера, ежегодно уменьшается на 15%.

Сколько рыбы будет выловлено при отсутствии ограничений:

а) в первый год;

б) в пятнадцатый год;

в) за пятнадцать лет;

если известно, что в шестой год будет выловлено 2 тонны?

г) Сколько всего рыбы может быть выловлено из этого озера при отсутствии ограничений?

Решение Если обозначить количество рыбы, выловленной из озера в год с номером k через B_k, то:

а) $B_1 = B_6 q^{1-6} = 2000 \cdot (0{,}85)^{-5} = 4507{,}5$ кг.

(Если количество выловленной рыбы ежегодно уменьшается на 15%, то в каждый последующий год вылавливается 85% от величины предыдущего улова. Следовательно, здесь имеет место геометрическая прогрессия со знаменателем 0,85).

б) $B_{15} = B_6 q^{15-6} = 2000 \cdot 0{,}85^9 = 463{,}23$ *кг.*

Отметим, что неразумное использование рыбных богатств за 15 лет привело к почти десятикратному уменьшению количества вылавливаемой рыбы.

в) Используем формулу (3) и получим:

$$S_{15} = 4507{,}5(1-0{,}85^{15})/(1-0{,}85) = 27425 \text{ кг.}$$

г) При отсутствии ограничений из озера может быть выловлено всего

$S = b_1/(1-q) = 4507{,}5/(1-0{,}85) = 30050$ *кг* рыбы.

Очень важно отметить, что это же количество можно получить менее чем за 9 лет, ограничивая добычу.

2. Примеры приложения дифференциальных уравнений

Модель Эванса. Модель Эванса предполагает, что разность между объемами спроса (D) и предложения *(S)* пропорциональна скорости изменения цены товара *(p)*. Это условие на языке дифференциальных уравнений запишется так*:*

$$p' = k(D - S). \qquad (4)$$

Изучим динамику изменения цены товара, предполагая, что функция спроса имеет вид D = 20 – 1,2p, функция предложения S = 1,3p - 2, в начальный момент времени цена $7,2, через месяц $8.

Подставив в (1) выражения для функции спроса и предложения, получим

$$p' = k[(20 - 1{,}2p) - (1{,}3p - 2)].$$

Раскрыв скобки и перегруппировав, получим линейное дифференциальное уравнение

$$p' + 2{,}5kp = 22k,$$

которое можно переписать в виде (см. [3])

$[pe^{2{,}5kx}]'e^{-2{,}5kx} = 22k$, (x – число месяцев).

Умножим это уравнение на $e^{2{,}5kx}$*:*

$$[pe^{2{,}5kx}]' = 22ke^{2{,}5kx},$$

проинтегрируем:

$pe^{2{,}5kx} = 8{,}8e^{2{,}5kx} + C$, (здесь C-произвольная постоянная),

и умножим результат на $e^{-2{,}5kx}$*:*

$$p = (8{,}8 + C)e^{-2{,}5kx}.$$

Осталось определить значения k и C. Для этого вначале воспользуемся первым условием:

$p(0) = 7{,}2 \Rightarrow 7{,}2 = (8{,}8 + C)e^0 \Rightarrow C = -1{,}6.$

Далее, из второго условия: $p(1) = 8$, следует,что

$8 = (8{,}8 - 1{,}6)e^{-2{,}5k} \Rightarrow e^{-2{,}5k} = 0{,}5.$

Следовательно, изменение цены на этом рынке, согласно модели Эванса, определяется функцией

$$p = 8{,}8 - 1{,}6(0{,}5)^x.$$

В частности, если условия не будут меняться, то через 5 месяцев цена будет равна $p(5) = 8{,}8 - 1{,}6(0{,}5)^5 = 8{,}75$, а через много-много месяцев она стабилизируется на числе *8,8.*

Литература:

1. Hoffmann L., Bradley G. *Calculus* – USA: McGraw-Hill, 2000.

2. Кыдыралиев С.К., Урдалетова А.Б., Койчуманова Ж.М., *Линейные разностные уравнения,* - Бишкек, 2009, 95 С.

3. Кыдыралиев С.К., Урдалетова А.Б. Алгоритм решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. -Бишкек: Илим, 2001, Вып. 30, С 128-132.

4. McCandless Jr. G.T., Wallace N., *Introduction to Dynamic Macroeconomic Theory*. –Cambridge, Harvard University Press, 1991.-380 p. ЮНИТИ- ДАНА,. 2000, С 527.

5. Sydsaeter K., Hammond P.J*Mathematics for economic analysis*. USA, Prentice Hall, 1000p, 1995.