УДК 517.977.1/5 +517.2

Шарипов С., Шарипов К.С., Шарипов К.С.

ИГУ им. К.Тыныстанова,

КазНУ им. аль-Фараби Республика Казахстан

О СТАБИЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ С УРАВНЕНИЕМ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРВОГО РОДА

Впервые задачи устойчивости решения задачи Коши решены как стабилизация относительно решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода.

Приведем задачу оптимальной стабилизации вида

$$y' + p(t)y = q(t)\,u(t), t \in [t_0, +\infty), \qquad p(t), q(t) \in C, \qquad (1)$$

$$y(t_0) = y_0 \qquad y_0 \in [0, +\infty) \qquad (2)$$

с критерием качества, в частности, вида

$$\int_{t_0}^{\infty} y(t)u(t)dt\ , \qquad t \in [t_0, +\infty) \qquad (3)$$

Здесь решение y(t) и управляющая функция $u(t)$ - искомые функции:

Из уравнения (1) и условия (2) видно, что управляющая функция $u(t)$, вообще говоря, порождает функцию $y(t)$

$$y(t) = y\big(t, u(t)\big), \qquad t \in [t_0, \infty)$$

Здесь смысл задачи управления (1) - (3) означает, что нам предстоит найти пару $(u(t), y(t, u(t_1)))$ минимизирующую критерии качества (3).

К этой важной задаче обратимся позже в отдельной статье.

Уравнение Фредгольма первого рода и задача стабилизации.

Здесь поставим задачу устойчивости решения задачи Коши, как стабилизация относительно решения уравнения Фредгольма первого рода так: найти пару $(u(t), y(t, u(t))$ такую, чтобы критерий качества (3) принимал заданное значение γ: $\int_{t_0}^{\infty} \varphi\big(t, u(t)\big), u(t)dt = \gamma \quad (\gamma > 0)$. (4)

Формула (4) дает нам уравнение Фредгольма первого рода с искомой функцией y(t) u(t) (см. [1]).

Значит задача стабилизации имеет вид

$$y' + p(t)y = q(t)u(t),\ t \in [t_0, +\infty) \qquad (1)$$

1) начальное условие

$$y(t_0) = y_0 \qquad (2)$$

2) плюс стабилизирующие уравнение Фредгольма первого рода

$$\int_{t_0}^{\infty} y(t)u(t)dt = \gamma \qquad (3)$$

Отметим, что задачи стабилизации относятся к классу усовершенствованных задач Коши [2].

Согласно [1] даем ограничения на управляющую функцию $u(t)$. Образуем класс управляющих функций с параметром в частности вида [3]

$$G = \{\beta f(t)\}\ t \in [t_0, \infty], \qquad (5)$$

где $f(t) -$ непрерывная функция, а β параметр, $\quad \beta f(t) > 0.$

Ставится вопрос: существует ли в множестве (5) функция $u(t)$ такая, что произведение её и решение (задачи Коши (1)-(2)) $y\left(t,u(t)\right)$:

$$y(t,u(t))\,u(t), t\epsilon[t_0,\infty] \tag{6}$$

дает нам решение уравнения Фредгольма первого рода (4)?

С этой целью управляющую функцию u(t) ищем в виде

$$u(t) = \beta f(t), t \in [t_0,\infty], \tag{7}$$

В этом случае решение задачи Коши (1)-(2) при $q(t) \equiv 1$ имеет вид

$$y = y_0 e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)ds} + \beta\int_{t_0}^{t} e^{-\int_{s}^{t} p(\tau)d\tau} f(s)ds,\ \ t \in [t_{0,}\infty] \tag{8}$$

Подставляя (7) и (8) в (4) имеем

$$\int_{t_0}^{\infty}\left[y_0 e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)ds} + \beta\int_{t_0}^{\infty}\left(\int_{t_0}^{t} e^{-\int_{s}^{u} p(\tau)d\tau} f(s)ds\right)\right]\beta f(t)dt = \gamma \tag{9}$$

отсюда имеем

$$\beta^2\int_{t_0}^{\infty}\int_{t_0}^{t} e^{-\int_{s}^{t} p(\tau)d\tau} f(s)dsdt + \beta\int_{t_0}^{\infty} f(t)y_0 e^{\int_{t_0}^{t} p(s)ds}dt - \gamma = 0 \tag{10}$$

Пусть функция $f(t)$ такая, что несобственные интегралы, входящие в (10) существуют, т.е. являются сходящимися

$$\int_{t_0}^{\infty} f(t)\int_{t_0}^{t} e^{-\int_{s}^{t}\varphi(\tau)d\tau} f(s)dsdt = A\ \ (A > 0) \tag{11}$$

$$\int_{t_0}^{\infty} f(t)e^{\int_{t_0}^{t} p(s)ds}dt = B\quad (B > 0) \tag{12}$$

Тогда из (10) имеем квадратное уравнение вида

$$A\beta^2 + \beta B - \gamma = 0 \tag{13}$$

Отсюда

$$\beta_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 + 4A\gamma}}{2A}$$

Значит

$$\beta_1 = -\frac{-B+\sqrt{B^2+4A\gamma}}{2A} > 0 \tag{14}$$

$$\beta_2 = \frac{-B-\sqrt{B^2+4A\gamma}}{2A} < 0 \tag{15}$$

Эти параметры в дальнейшем будем называть управляющими стабилизирующими параметрами [2] на отрезке $[t_0,+\infty)$.

Следовательно, имеем соответственно две кривых линии, выходящие из одной точки (t_0,y_0) вида

$$y_1 = y_0 e^{\int_{t_0}^{t} p(s)ds} + \frac{-B+\sqrt{B^2+4A\gamma}}{2A}\int_{t_0}^{t} e^{-\int_{s}^{t} p(\tau)d\tau} f(s)ds\,, t\epsilon[t_0,+\infty) \tag{16}$$

$$y_2 = y_0^{\int_{t_0}^{t} p(s)ds} - \frac{B+\sqrt{B^2+4A\gamma}}{2A}\int_{t_0}^{t} e^{-\int_{s}^{t} p(\tau)d\tau} f(s)ds,\ t \in [t_0,+\infty) \tag{17}$$

Они порождены соответственно управляющими функциями вида

$$u_1(f) = \frac{-B+\sqrt{B^2+4A\gamma}}{2A} f(t),\qquad t \in [t_0,+\infty)\ \ (f(t) > 0) \tag{18}$$

$$u_2(f) = -\frac{B+\sqrt{B^2+4A\gamma}}{2A} f(t),\ t \in [t_0, +\infty)\ (f(t) > 0) \tag{19}$$

Итак, функции

$$y_1(t)u_1(t) = \frac{-B+\sqrt{B^2+4A\gamma}}{2A}\left[y_0 e^{-\int_s^t p(\tau)d\tau} + \frac{-B+\sqrt{B^2+4A\gamma}}{2A}\int_{t_0}^t e^{-\int_s^t p(\tau)d\tau} f(s)ds\right] f(t),\ t \in [0, +\infty) \tag{20}$$

$$y_2(t)u_2(t) = \frac{B+\sqrt{B^2+4A\gamma}}{2A}\left[y_0 e^{-\int_s^t p(\tau)d\tau} - \frac{B+\sqrt{B^2+4A\gamma}}{2A}\int_{t_0}^t e^{-\int_s^t p(\tau)d\tau} f(s)ds\right] f(t),\ t \in [0, +\infty) \tag{21}$$

являются управляемыми решениями уравнения Фредгольма первого рода (9).

Условие стабилизации

Исследуем формулы (11) и (12), полученные согласно уравнению Фредгольма.

Функция

$$f(t)\int_{t_0}^t e^{-\int_s^t p(\tau)d\tau} f(s)ds,\ t \in [t_0, +\infty). \tag{22}$$

входящая в (11) положительна на отрезке $[t_0, +\infty)$

Поэтому можно написать так

$$\lim_{t\to+\infty} f(t)\int_{t_0}^t e^{-\int_s^t p(\tau)d\tau} f(s)ds = 0, \tag{23}$$

имея в виду, что

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0 \tag{24}$$

и

$$\lim_{t\to+\infty} f(t)\int_{t_0}^t e^{-\int_s^t p(\tau)d\tau} f(s)ds = 0 \tag{25}$$

Аналогично, на основании (12), можно написать так

$$\lim_{t\to+\infty} f(t)e^{-\int_{t_0}^t p(s)ds} = 0. \tag{26}$$

Тогда

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-\int_{t_0}^t p(s)ds} = 0. \tag{27}$$

А для f(t) выполняется условие (23).

Таким образом, следуют следующие формулы

1) $\lim_{t\to+\infty} U_1(t) = 0,\ \lim_{t\to+\infty} U_2(t) = 0$ (28)

2) $\lim_{t\to+\infty} y_1(t) = 0,\ \lim_{t\to+\infty} y_2(t) = 0$ (29)

Ссылаясь на формулу (28), теперь мы можем говорить, что при выполнении вышеприведенных условий решения (20) и (21) будут приближаться к оси абсцисс:

$$y=0,\ t\in[t_0,+\infty). \tag{30}$$

Отсюда можем говорить, что управляющий объект устойчив.

Доказана теорема.

Теорема. В классе управляющих функций (7) (удовлетворяющие условию (24)) задача стабилизации (1) - (3)’ порождает две устойчивых кривых (20) и (21) относительно прямой y=0, $t \in [t_0, +\infty)$.

Управляющие функции (18) и (19), согласно формулы (24) будем называть стабилизирующими управляющими функциями.

В следующих статьях будут исследованы, в частности, задачи стабилизации

Задача I

$$y' = p(t)y = q(t)u(t), t\epsilon\ [t_0, +\infty)$$

1) $y(t_0) = y_0$
2) $(y(a) - d_1)^2 + (y(T) - d_2)^2 = r^2 \ \ (a, T\ \epsilon\ (t_0, +\infty))$
3) $\int_{t_0}^{+\infty} y(t)dt = \gamma \ \ (r, \gamma - \text{заданные числа})$

Задача II

$$y' + p(t)y = q(t)\big(u_1(t) + u_2(t)\big), t\epsilon[t_0, +\infty)$$

1) $y(t_0) = y_0$
2) $u_1^2(t) + u_2^2(t) = r^2\ (u(t) = u_1(t) +\ u_2(t))$
3) $\int_{t_0}^{+\infty} y(t)u(t)dt = \gamma$

Литература:

1. Шарипов С., Шарипов К.С., Шарипов К.С. Определенный интеграл от кривой обладающая некоторыми свойствами. //Известия КТУ № 17.- Бишкек, 2009.
2. Шарипов С., Шарипов К.С. Управление решения дифференциального интегрального управлений. //Вестник ИГУ, № 12. - Каракол, 2004.
3. Шарипов С. О построении программных управлений объектами с заданной скоростю движения. Материалы международной конференции по проблемам управления и информатики. - Бишкек, 2007.