УДК 517.928

Кожобеков К.Г., к.ф.-м.н., доцент
Ошский государственный университет

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РОБЕНА С ИРРЕГУЛЯРНОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

ИРРЕГУЛЯРДУУ ӨЗГӨЧӨЛҮККӨ ЭЭ БОЛГОН РОБЕНДИН МАСЕЛЕСИНИН ЧЫГАРЫЛЫШЫНЫН АСИМПТОТИКАСЫ

ASYMPTOTICS OF THE SOLUTION OF THE PROBLEM ROBIN WITH AN IRREGULAR SINGULARITY

Аннотация: *В статье исследована задача Робена для сингулярно возмущенного линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Методом пограничных функций построено равномерное асимптотическое разложение задачи Робена. С помощью принципа максимума получена оценка остаточного члена равномерного асимптотического разложения.*

Ключевые слова: *задача Робена, сингулярное возмущение, равномерная асимптотика, принцип максимума.*

Аннотация: *Макалада сингулярдык козголгон сызыктуу бир тектүү эмес экинчи тартиптеги кадимки дифференциалдык тендеме үчүн Робендин маселеси изилденген. Робендин маселесинин чыгарылышынын бир калыптагы асимптотикалык ажыралмасы чек аралык функциялар методу менен тургузулган. Максимум принцибинин жардамында бир калыптагы асимптотикалык ажыралманын калдык мүчөсү бааланган.*

Түйүндүү сөздөр: *Робендин маселеси, сингулярдык козголуу, бир калыптагы асимптотика, максимум принциби.*

Abstract: *This article investigates the Robin problem for a singularly perturbed linear inhomogeneous ordinary differential equation of the second order. Using the boundary function method, a uniform asymptotic expansion of the Robin problem was constructed. Using the maximum principle, an estimate of the residual term of the uniform asymptotic expansion was obtained.*

Key words: *Robin problem, singular perturbation, uniform asymptotic behavior, maximum principle.*

Ранее задача Робина применялась в решении тонкой регулярности для эллиптических и параболических анизотропных задач с переменными показателями [1].

Рассмотрим задачу Робена

$$\varepsilon y''_\varepsilon(x) - x^n p(x) y'_\varepsilon(x) - q(x) y_\varepsilon(x) = f(x),\ 0 \le x \le 1, \tag{1}$$

$$y_\varepsilon(0) - h_1 y'_\varepsilon(0) = a,\quad y_\varepsilon(1) + h_2 y'_\varepsilon(1) = b, \tag{2}$$

где $0<\varepsilon$ – малый параметр, $p(x)$, $q(x) > 0$, $x\in[0,1]$; $p, q, f \in C^\infty[0,1]$, a, b – const, $0<h_1$, $0<h_2$, n – фиксированное натуральное число больше единицы.

В работе [2] исследована задача Дирихле для уравнения

$$\varepsilon y''_\varepsilon(x) \pm x^2 p(x) y'_\varepsilon(x) - q(x) y_\varepsilon(x) = f(x),\ 0 \le x \le 1.$$

Задача (1)-(2) имеет единственное решение [3], требуется построить равномерное асимптотическое разложение решения $y_\varepsilon(x)$ на отрезке $x\in[0,1]$, когда $\varepsilon\to 0$.

Отметим, что соответствующее невозмущенное (предельное) уравнение ($\varepsilon= 0$):

$$x^n p(x) y'_0(x) + q(x) y_0(x) = -f(x),$$

имеет нерегулярную особую точку x=0.

Исследуемая задача является бисингулярной [3].

Решение соответствующего невозмущенного уравнения (ε=0) в точке x=0 имеет особенность. Используя идею [2,5,6] Поэтому, интегрируем так чтобы $y_0(x)\in C^{\infty}[0,1]$. В таком случае, решение соответствующего невозмущенного уравнения представимо в виде:

$$y_0(x)=-\frac{f(x)}{q(x)}+e^{-Q(x)}\int_0^x\left(\frac{f(s)}{q(s)}\right)' e^{Q(s)}ds,$$

где $Q(x)=\int_1^x\frac{q(t)}{t^n p(t)}dt.$

Заметим, что это решение $y_0(x)$ не удовлетворяет краевым условиям (2).

Чтобы решить эту проблему асимптотическое решение задачи (1), (2) ищем в виде:

$$y_\varepsilon(x)=V_\varepsilon(x)+\Pi_\mu(t)+Z_\varepsilon(\tau) \tag{3}$$

где $V_\varepsilon(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(x), \Pi_\mu(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\pi_k(t),\ t=x/\mu,\ Z_\varepsilon(\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k z_k(\tau),$

$\tau=(1-x)/\varepsilon, \mu=\sqrt{\varepsilon}.$

Тогда

$$y'_\varepsilon(x)=V'_\varepsilon(x)+\frac{1}{\mu}\Pi'_\mu(t)-\frac{1}{\varepsilon}Z'_\varepsilon(\tau), \tag{4}$$

$$y''_\varepsilon(x)=V''_\varepsilon(x)+\frac{1}{\mu^2}\Pi''_\mu(t)+\frac{1}{\varepsilon^2}Z''_\varepsilon(\tau), \tag{5}$$

Подставляя соотношения (3)-(5) в равенство (1) получаем:

$$\varepsilon V''_\varepsilon-x^n p(x)V'_\varepsilon(x)-q(x)V_\varepsilon(x)=f(x), \tag{6}$$

потребуем чтобы $v_k(x)\in C^{\infty}[0,1]$.

Для $\Pi_\mu(t)$ получаем уравнение:

$$\Pi''_\mu(t)-\mu^{n-1}t^n p(\mu t)\Pi'_\mu(t)-q(\mu t)\Pi_\mu(t)=0, \tag{7}$$

потребуем, чтобы функции $\pi_k(t)$ удовлетворяли краевым условиям:

$$\pi'_0(0)=0, \qquad \pi'_1(0)=\frac{1}{h_1}\big(v_0(0)+\pi_0(0)-a\big)-v'_0(0),$$

$$\pi'_{2k}(0)=\frac{1}{h_1}\pi'_{2k-1}(0), \qquad \pi'_{2k+1}(0)=\frac{1}{h_1}\big(v_k(0)+\pi_{2k}(0)-v'_k(0)\big),$$

$$\lim_{t\to\infty}\pi'_0(t)=0,\ \lim_{t\to\infty}\pi'_k(t)=-\frac{1}{h_2}\lim_{t\to\infty}\pi_{k-1}(t), k\in N.$$

А для уравнения

$$Z''_\varepsilon(\tau)+(1-\varepsilon\tau)^n p(1-\varepsilon\tau)Z'_\varepsilon(\tau)-\varepsilon q(1-\varepsilon\tau)Z_\varepsilon(\tau)=0, \tag{8}$$

вставим краевые условия в виде

$$z'_0(0)=0, \qquad z'_1(0)=\frac{1}{h_2}\big(v_0(1)+z_0(0)-b\big)+v'_0(1),$$

$$z'_{k+1}(0)=\frac{1}{h_2}\big(v_k(1)+z_k(0)\big)+v'_k(1),$$

$$\lim_{\tau\to\infty}z'_0(\tau)=0,\quad \lim_{\tau\to\infty}z'_k(\tau)=-\frac{1}{h_1}\lim_{\tau\to\infty}z_{k-1}(\tau),\ k\in N.$$

Из (6) имеем:

$$x^n p(x)v'_0(x)+q(x)v_0(x)=-f(x),$$
$$x^n p(x)v'_k(x)+q(x)v_k(x)=v''_{k-1}(x),\ k\in N.$$
Отсюда получаем:
$$v_0(x)=-\frac{f(x)}{q(x)}+e^{-Q(x)}\int_0^x\left(\frac{f(s)}{q(s)}\right)' e^{Q(s)}ds,\qquad v_0\in C^\infty[0,1];$$
$$v_k(x)=\frac{v''_{k-1}(x)}{q(x)}-e^{-Q(x)}\int_0^x\left(\frac{v''_{k-1}(s)}{q(s)}\right)' e^{Q(s)}ds,\qquad v_k\in C^\infty[0,1],k\in N;$$
где $Q(x)=\int_1^x\frac{q(t)}{t^n p(t)}dt.$

Перейдем теперь к исследованию задачи (7). Имеем:
$$\pi''_0(t)-q(0)\pi_0(t)=0,\ t\in(0,\infty),\tag{9}$$
$$\pi'_0(0)=0,\ \lim_{t\to\infty}\pi'_0(t)=0;\tag{10}$$
$$\pi''_1(t)-q(0)\pi_1(t)=\pi_0(t)tq_1,\quad t\in(0,\infty),\tag{11}$$
$$\pi'_1(0)=\frac{1}{h_1}\big(v_0(0)+\pi_0(0)-a\big)-v'_0(0),\qquad \lim_{t\to\infty}\pi'_1(t)=-\frac{1}{h_2}\lim_{t\to\infty}\pi_0(t),k\in N.\tag{12}$$
$$\pi''_k(t)-q(0)\pi_k(t)=G_k(t,\pi_0,\pi'_0,...,\pi_{k-1},\pi'_{k-1}),t\in(0,\infty),\tag{13}$$
$$\pi'_{2k}(0)=\frac{1}{h_1}\pi'_{2k-1}(0),\qquad \pi'_{2k+1}(0)=\frac{1}{h_1}\big(v_k(0)+\pi_{2k}(0)-v'_k(0)\big),$$
$$\lim_{t\to\infty}\pi'_k(t)=-\frac{1}{h_2}\lim_{t\to\infty}\pi_{k-1}(t),k\in N.\tag{14}$$
где правые части
$$G_k(t,\pi_0,\pi'_0,...,\pi_{k-1},\pi'_{k-1})=\begin{cases}\sum_{j=0}^{m-1}\pi_j(t)t^{m-j}q_{m-j},\ 1\le m<n-1\\ \sum_{j=0}^{m-1}\pi_j(t)t^{m-j}q_{m-j}+t^n\sum_{j=n-1}^{m}\pi'_{j-n+1}(t)t^{m-j}q_{m-j},\ n-1\le m\end{cases}$$
линейно зависят от предыдущих $\pi_0,\pi'_0,...,\pi_{k-1},\pi'_{k-1}$, от производных первого порядка этих функций и полиномиально зависят от t.

Задачи (9)-(10), (11)-(12), (13)-(14) имеют единственные решения, представимые в виде
$$\pi_0(t)\equiv 0,\ \pi_1(t)=-\frac{a-v'_0(0)}{\sqrt{q(0)}}e^{-\sqrt{q(0)}t},\ \pi_{2k}(t)=te^{-\sqrt{q(0)}t}H_{2k}(t),$$
$$\pi_{2k+1}(t)=\frac{v'_k(0)}{\sqrt{q(0)}}e^{-\sqrt{q(0)}t}+te^{-\sqrt{q(0)}t}H_{2k-1}(t),k\in N.$$
где $H_k(t)$ – полиномы.

Заметим, что $\pi_k(t)\in C^\infty[0,\infty)$, $k\in \boldsymbol{N}_0$.

Из (8), получаем
$$z''_0(\tau)+p(1)z'_0(\tau)=0,\ \tau\in(0,\infty),\tag{15}$$
$$z'_0(0)=0,\ \lim_{\tau\to\infty}z'_0(\tau)=0\ ;\tag{16}$$

$$z''_1(\tau)+p(1)z'_1(\tau)=q(1)z_0(\tau)+(n-p'(1))\tau z'_0(\tau),\ \tau\in(0,\infty),\qquad(17)$$

$$z'_1(0)=\frac{1}{h_2}\left(v_0(1)+z_0(0)-b\right)+v'_0(1),\ \lim_{\tau\to\infty}z'_1(\tau)=-\frac{1}{h_1}\lim_{\tau\to\infty}z_0(\tau),\qquad(18)$$

$$z''_k(\tau)+p(1)z'_k(\tau)=\tilde{G}_k(\tau,z_0,z'_0,\dots,z_{k-1},z'_{k-1}),\ \tau\in(0,\infty),\qquad(19)$$

$$z'_{k+1}(0)=\frac{1}{h_2}\left(v_k(1)+z_k(0)\right)+v'_k(1),\ \lim_{\tau\to\infty}z'_k(\tau)=-\frac{1}{h_1}\lim_{\tau\to\infty}z_{k-1}(\tau),\ k\in N.\qquad(20)$$

где правые части $\tilde{G}_k(\tau,z_0,z'_0,\dots,z_{k-1},z'_{k-1})$ линейно зависят от предыдущих $z_0,z'_0,\dots,z_{k-1},z'_{k-1}$, от производных первого порядка этих функций и полиномиально зависят от τ.

Задачи (15)-(16), (17)-(18) и (19)-(20) имеют единственные решения, представимые в виде

$$z_0(\tau)\equiv 0,\ z_1(\tau)=-\frac{v'_0(1)-b}{p(1)}e^{-p(1)\tau},$$

$$z_{k+1}(\tau)=-\frac{v'_k(1)}{p(1)}e^{-p(1)\tau}+\tau e^{-p(1)\tau}\tilde{H}_k(\tau),k\in N,$$

где $\tilde{H}_k(\tau)$ – полиномы. Заметим, что $z_k(\tau)\in C^{\infty}[0,\infty)$, $k\in \boldsymbol{N}_0$.

Оценим остаточный член, пусть

$$y_\varepsilon(x)=V_{\varepsilon,n}(x)+\Pi_{\mu,2n}(t)+Z_{\varepsilon,n}(\tau)+R_{\varepsilon,n}(x),$$

где $V_{\varepsilon,n}(x)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k v_k(x),\Pi_{\mu,2n}(t)=\sum_{k=0}^{2n}\mu^k\pi_k(t),\quad Z_{\varepsilon,n}(\tau)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k z_k(\tau),$

$R_{\varepsilon,n}(x)$ – остаточная функция.

Тогда для остаточной функции получим следующую задачу:

$$\varepsilon R''_{\varepsilon,n}(x)-x^n p(x)R'_{\varepsilon,n}(x)-q(x)R_{\varepsilon,n}(x)=O(\varepsilon^{n+1/2}),\varepsilon\to 0,\ 0\le x\le 1,\qquad(21)$$

$$R_{\varepsilon,n}(0)-h_1R'_{\varepsilon,n}(0)=O\left(e^{-1/\varepsilon}\right),\ \ R_{\varepsilon,n}(1)+h_2R'_{\varepsilon,n}(1)=O\left(e^{-1/\sqrt{\varepsilon}}\right),\ \varepsilon\to 0.\qquad(22)$$

Из принципа максимума следует, что для решения задачи (21)-(22) справедлива асимптотическая оценка: $R_{\varepsilon,n}(x)=O(\varepsilon^{n+1/2})$, $\varepsilon\to 0$, $x\in[0,1]$.

Отсюда следует справедливость теоремы.

Теорема. Для решения задачи (1)-(2) справедливо асимптотическое разложение

$$y_\varepsilon(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(x)+\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\pi_k(t)+\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k z_k(\tau),$$

где $t=x/\mu,\tau=(1-x)/\varepsilon,\mu=\sqrt{\varepsilon}.$

А также предельное соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to 0}y_\varepsilon(x)=y_0(x),\ x\in(0,1).$$

Литература:

1. Boureanu M.-M., Vélez-Santiago A. (2019). Fine regularity for elliptic and parabolic anisotropic Robin problems with variable exponents, Journal of Differential Equations, 266(12):8164-8232, https://doi.org/10.1016/j.jde.2018.12.026.

2. Кожобеков К.Г., Турсунов Д.А. (2019). Асимптотика решения краевой задачи, когда предельное уравнение имеет нерегулярную особую точку. Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. Т. 29, Вып 3, С.1-9.
3. Sibuya Y. (1975). Global theory of a second order linear ordinary differential equation with a polynomial coefficient. Elsevier, ISBN: 978-0-444-10959-0, 289 pages.
4. Ильин А.М., Данилин А.Р. (2009). Асимптотические методы в анализе. М.: Физматлит, С.248.
5. Tursunov D.A. (2017). The asymptotic solution of the three-band bisingularly problem. Lobachevskii Journal of Mathematics. 38(3), p.542–546.
6. Кожобеков К.Г., Турсунов Д.А. (2017). Асимптотика решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с дробной точкой поворота. Известия Иркутского госуниверситета. Серия «Математика», Т. 21. –С. 108-121.