КЫРГЫЗ РЕСПУБЛИКАСЫНЫН БИЛИМ БЕРҮҮ
ЖАНА ИЛИМ МИНИСТРЛИГИ

Академик М.М. Адышев атындагы
ОШ ТЕХНОЛОГИЯЛЫК УНИВЕРСИТЕТИ

ЖОГОРКУ МАТЕМАТИКА САБАГЫНАН ТЕКШЕРҮҮ ИШТЕРДИН ВАРИАНТТАРЫ ЖАНА АЛАРДЫ АТКАРУУ ҮЧҮН УСУЛДУК КӨРСӨТМӨЛӨР

Окуу- практикалык колдонмо

Ош-2024

УДК: 51

ББК: 22.1

Т 25

БИжМЭ кафедрасынын жыйынында талкууланды. Протокол №7, 2023 ж. 17.03.2023.

ОшТУнун Усулдук Кеңеши сунуштады. Протокол №6, 2023 ж. 25.04.2023.

ISBN 978-9967-487-52-9

Сын пикирчилер:
Мадраимов С.М. - п.и.к., доцент, ОшМПУнин профессору;
Мамбетов Ж.И. - ф-м.и.к., доцент, ОшТУнун Информатика кафедрасынын башчысы;

Ташбаев А.М., Курманалиева Г.С.

Жогорку математика сабагынан текшерүү иштердин варианттары жана аларды аткаруу үчүн усулдук көрсөтмөлөр. Окуу- практикалык колдонмо . - Ош, ОшТУ. - 2024-ж. - 120 бет.

Бул окуу-практикалык колдонмо жогорку математика курсунун программасынын негизинде, окуу планы боюнча бул дисциплинага бөлүнгөн сааттардын санын, ошондой эле окуу профилин эске алуу менен түзүлгөн. Экономикалык, инженердик-техникалык багыттагы бакалаврлардын күндүзгү жана сырттан окуу бөлүмүнүн студенттерине арналган.

Колдонмодо биринчи жана экинчи семестрде аткарылган 5 текшерүү иштин тапшырмалары камтылган, текшерүү иштердин типтүү версиясы үчүн чечимдер берилген, алар изилденүүчү ар бир тема боюнча кыскача теориялык маалыматтарды камтыйт.

Окуу-усулдук колдонмо экономикалык жана инженердик-техникалык багыттагы бакалаврлардын окуу пландарында каралган “Жогорку математика” предметин окуп үйрөнүүдө колдонууга сунушталат.

ISBN 978-9967-487-52-9

УДК 51
ББК 22.1

МАЗМУНУ

ЖАЛПЫ УСУЛДУК КӨРСӨТМӨЛӨР

Текшерүү иштерди аткаруунун тартиби

Ар бир текшерүү ишти аткарууну окуу китебиндеги тиешелүү курстук материалды үйрөнүп, ар бир темада көрсөтүлгөн маселелерди чечкенден кийин гана баштоо керек. Ошондой эле ар бир тема үчүн бул колдонмодо берилген маселелерди чечүү жолдорун кылдат талдоо керек. Бул учурда төмөнкү көрсөтмөлөрдү аткаруу керек:

1. Ар бир иш өзүнчө дептерге кол жазма түрүндө аткарылышы керек. Дептердин сырткы мукабасында студенттердин фамилиясы жана инициалдары, толук шифр, текшерүү иштин номери жана аткарылган күнү көрсөтүлүшү керек. Бардык маселелерди чечүү жолдору жана аларга түшүндүрмөлөр жетишээрлик берилген болушу керек. Зарыл болгон учурда бул маселени чечүүдө колдонулган формулаларды, теоремаларды, корутундуларды көрсөтүү менен теориянын суроолоруна тиешелүү шилтемелерди жасоо керек. Бардык эсептөөлөр (анын ичинде жардамчы) толугу менен аткарылышы керек. Чиймелер жана графиктер масштабдуу бирдиктерди, координата окторун жана чийменин башка элементтерин көрсөтүү менен тыкан жана так аткарылууга тийиш.

2. Студент ишти кайра мугалимден алгандан кийин андагы белгилеген бардык кемчиликтерди ондоого милдеттүү. Студент тапшыра албай калган учурда окутуучунун бардык талаптарын мүмкүн болушунча кыска мөөнөттө аткарууга жана баштапкы бүтүргөн ишин тиркөө менен ишти кайра кароого берүүгө милдеттүү.

3. Текшерүү иштi ар бир студент өз алдынча аткарышы керек.

4. Экзамендик сессиянын жүрүшүндө студент бардык каралып, аткарылган тест иштерин тапшырууга милдеттүү. Зарыл болгон учурда (окутуучунун талабы боюнча) студент экзамен учурунда бул эмгектерде камтылган бардык же айрым тапшырмалар боюнча оозеки түшүндүрмө берүүгө милдеттүү.

5. Бул колдонмодо студент университетте ийгиликтүү билим алуусу жана экзамендерди же тесттерди тапшыруу үчүн өздөштүрүүгө керек болгон математика боюнча зарыл минималдуу билимди чагылдырган тапшырмалар берилген.

№1- ТЕКШЕРҮҮ ИШ

Сызыктуу алгебранын жана аналитикалык геометриянын элементтери

1-10. А жана В эки матрицасы берилген. Төмөндөгүлөрдү тапкыла:

а) $A\cdot B$; **б)** BA ; **в)** A^{-1}; **г)** $A\cdot A^{-1}$; **д)** $A^{-1}\cdot A$.

1. **A =** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, **B=** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

2. **A=** $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, **B=** $\begin{pmatrix} 2 & 8 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

3. **A=** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, **B=** $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

4. **A=** $\begin{pmatrix} -6 & 1 & 11 \\ 9 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$, **B=** $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

5. **A=** $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, **B=** $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

6. **A=** $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, **B=** $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

7. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}6 & 7 & 3\\ 3 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 5\\ 4 & -1 & -2\\ 4 & 3 & 7\end{pmatrix}$

8. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 4\\ 3 & -1 & -4\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}3 & 3 & 1\\ 0 & 6 & 2\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$

9. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 7 & 3\\ -4 & 9 & 4\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}6 & 5 & 2\\ 1 & 9 & 2\\ 4 & 5 & 2\end{pmatrix}$

10. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 6 & 1\\ 1 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}4 & -3 & 2\\ -4 & 0 & 5\\ 3 & 2 & -3\end{pmatrix}$

11-20. Сызыктуу тендемелер системасынын биргелешкен экендигин текшергиле жана эгерде ал биргелешкен болсо, аны төмөндөгү усулдар менен чыгаргыла:

а) Крамердин эрежеси боюнча,

б) тескери матрица усулу менен,

в) Гаусстун усулу менен.

11. $\begin{cases}2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7\\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1\\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6\end{cases}$ **12.** $\begin{cases}2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3\\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4\\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3\end{cases}$

13. $$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

14. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7 \end{cases}$$

15. $$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -9 \end{cases}$$

16. $$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5 \end{cases}$$

17. $$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12 \end{cases}$$

18. $$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases}$$

19. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

20. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 20 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15 \end{cases}$$

21-30. Бир тектүү сызыктуу тендемелер системасын чыгаргыла:

21. $$\begin{cases} x + 6y - 5z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \\ x - 3y + y + 4z = 0 \end{cases}$$

22. $$\begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ 5x + 2y - z = 0 \\ 6x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

23. $$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - 4y - 15z = 0 \\ 3x + 6y + z = 0 \end{cases}$$

24. $$\begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ 9x + 7y - 3z = 0 \\ 24x - y - 8z = 0 \end{cases}$$

25. $$\begin{cases} x + 4y - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ 4x + 7y - z = 0 \end{cases}$$

26. $$\begin{cases} x + 4y + z = 0 \\ 7x + 6y + 2z = 0 \\ 6x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

27. $\begin{cases} x+6y-z=0 \\ 5x+y+2z=0 \\ 6x+5y+z=0 \end{cases}$ **28.** $\begin{cases} x+6y+z=0 \\ 5x+y+2z=0 \\ 6x+5y+z=0 \end{cases}$

29. $\begin{cases} x+7y+8z=0 \\ x-2y-z=0 \\ 6x-3y-3z=0 \end{cases}$ **30.** $\begin{cases} 3x+7y-6z=0 \\ 2x+2y-4z=0 \\ 5x+4y-10z=0 \end{cases}$

31-40. Декарттык координаталар системасында $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ векторлору берилген. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторлору базисти түзөөрүн көрсөткүлө. $\vec{d}$ векторунун ушул базистеги координаталарын тапкыла.($\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ базисиндеги $\vec{d}$ векторунун ажыралышын жазгыла).

31. $\vec{d}=\{-15,5,6\}$, $\vec{a}=\{0,5,1\}$, $\vec{b}=\{3,2,-1\}$, $\vec{c}=\{4,1,0\}$

32. $\vec{d}=\{8,9,4\}$, $\vec{a}=\{1,0,1\}$, $\vec{b}=\{0,-2,1\}$, $\vec{c}=\{1,3,0\}$

33. $\vec{d}=\{23,-14,-30\}$, $\vec{a}=\{2,1,0\}$, $\vec{b}=\{1,-1,0\}$, $\vec{c}=\{-3,2,5\}$

34. $\vec{d}=\{3,1,3\}$, $\vec{a}=\{2,1,0\}$, $\vec{b}=\{1,0,1\}$, $\vec{c}=\{4,2,1\}$

35. $\vec{d}=\{-1,7,0\}$, $\vec{a}=\{0,3,1\}$, $\vec{b}=\{1,-1,2\}$, $\vec{c}=\{2,-1,0\}$

36. $\vec{d}=\{11,-1,4\}$, $\vec{a}=\{1,-1,2\}$, $\vec{b}=\{3,2,0\}$, $\vec{c}=\{-1,1,1\}$

37. $\vec{d}=\{-13,2,18\}$, $\vec{a}=\{1,1,4\}$, $\vec{b}=\{-3,0,2\}$, $\vec{c}=\{1,2,-1\}$

38. $\vec{d}=\{0,-8,9\}$, $\vec{a}=\{0,-2,1\}$, $\vec{b}=\{3,1,-1\}$, $\vec{c}=\{4,0,1\}$

39. $\vec{d}=\{8,-7,-13\}$, $\vec{a}=\{0,1,5\}$, $\vec{b}=\{3,-1,2\}$, $\vec{c}=\{-1,0,1\}$

40. $\vec{d}=\{2,7,5\}$, $\vec{a}=\{1,0,1\}$, $\vec{b}=\{1,-2,0\}$, $\vec{c}=\{0,3,1\}$

41-50. ABC үч бурчтугунун чокулары берилген. Төмөндөгүлөрдү тапкыла:

1. AB жагынын узундугун;
2. AB жана BC жактарынын теңдемелерин жана алардын бурчтук коэффициенттерин;
3. CD бийиктигинин теңдемесин жана анын узундугун;
4. AE медианасынын теңдемесин жана ушул медиананын CD бийиктиги менен кесилишкен K чекитинин координатасын;
5. K чекити аркылуу өтүүчү AB жагына параллель болгон түз сызыктын тендемесин;
6. CD түз сызыгына карата A чекитине симметриялуу жайгашкан M чекитининн координаталарын. Графикти тургузуу.

41. $A(-3;-3),\quad B(5;-7),\quad C(7;7)$

42. $A(4;4),\quad B(-8;-6),\quad C(3;8)$

43. $A(-4;-3),\quad B(-7;3),\quad C(1;4)$

44. $A(4;-2),\quad B(6-;4),\quad C(-2;2)$

45. $A(2;3),\quad B(-3;6),\quad C(6;1)$

46. $A(1;2),\quad B(-3;1),\quad C(3;-5)$

47. $A(1;-6),\quad B(-1;4),\quad C(3;5)$

48. $A(-2;7),\quad B(3;1),\quad C(6;-3)$

49. $A(-2;2),\quad B(-4;6),\quad C(6;4)$

50. $A(-1;3),\quad B(2;2),\quad C(6;-3)$

51-60. $A_1A_2A_3A_4$ пирамидасынын чокусунун координаталары берилген. Төмөндөгүлөрдү тапкыла:

1. A_1A_2 кырынын узундугун;
2. A_1A_2 жана A_1A_3 кырларынын ортосундагы бурчту;
3. A_1A_4 кыры менен $A_1A_2A_3$ бетинин ортосундагы бурчту;
4. $A_1A_2A_3$ бетинин аянтын;
5. Пирамиданын көлөмүн;
6. A_1A_2 түз сызыгынын теңдемесин;
7. $A_1A_2A_3$ тегиздигинин теңдемесин;
8. A_4 чокусунан $A_1A_2A_3$ бетине түшүрүлгөн бийиктиктин теңдемесин.

51. $A_1(6;5;2)$, $A_2(5;4;6)$, $A_3(2;1;3)$, $A_4(6;3;5)$

52. $A_1(2;5;3)$, $A_2(9;3;4)$, $A_3(4;5;2)$, $A_4(7;1;6)$

53. $A_1(6;1;-3)$, $A_2(4;2;-2)$, $A_3(4;2;0)$, $A_4(1;2;-4)$

54. $A_1(5;5;4)$, $A_2(1;1;-4)$, $A_3(-3;4;1)$, $A_4(2;8;-1)$

55. $A_1(2;4;-1)$, $A_2(-2;-1;-3)$, $A_3(1;-1;3)$, $A_4(3;2;4)$

56. $A_1(-6;5;6)$, $A_2(-3;7;1)$, $A_3(5;7;8)$, $A_4(6;-2;2)$

57. $A_1(2;4;3)$, $A_2(-1;-1;5)$, $A_3(4;8;3)$, $A_4(-3;6;7)$

58. $A_1(-3;-5;4)$, $A_2(-5;8;-3)$, $A_3(1;-2;-2)$, $A_4(1;1;-2)$

59. $A_1(-3;1;-2)$, $A_2(-1;5;1)$, $A_3(1;7;-3)$, $A_4(8;5;8)$

60. $A_1(3;-1;-1)$, $A_2(1;6;1)$, $A_3(-1;-1;6)$, $A_4(0;4;1)$

61-70. Теңдемени каноникалык көрүнүшкө алып келгиле, ийринин түрүн аныктагыла жана графигин тургузгула.

61. $x^2 - y^2 + 4x - 6y - 30 = 0$ **62.** $3x^2 + 5y^2 + 18x - 10y - 13 = 0$

63. $x^2 - 4x - y - 5 = 0$ **64.** $-2x^2 + y^2 - 4x + 2y - 5 = 0$

65. $3x^2 + y^2 - 12x + 6y - 13 = 0$ **66.** $6x^2 + y^2 + 24x + 2y = 0$

67. $2y^2 + 4x - 4y - 6 = 0$ **68.** $x^2 - 6x + y - 1 = 0$

69. $3x^2 - y^2 + 6x - 4y - 2 = 0$ **70.** $5x^2 + 2y^2 + 30x - 8y - 7 = 0$

№1- ТЕКШЕРҮҮ ИШТИ ЧЫГАРУУ ҮЧҮН УСУЛДУК КӨРСӨТМӨЛӨР.

1-10. А жана В эки матрицасы берилди. Төмөндөгүлөрдү тапкыла:

а) AB; *б*) BA; *в*) A^{-1}; *г*) AA^{-1}; *д*) $A^{-1}A$.

$$A=\begin{pmatrix}-4 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & 2\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 3\end{pmatrix}.$$

Чыгаруу:

а) А матрицасынын мамычаларынын саны В матрицасынын жолчолорунун санына барабар болгондуктан, АВ көбөйтүндүсүн табууга болот. С=АВ матрицасын табабыз, анын элементтери төмөнкүдөй формула боюнча табылат:

$$C_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}+...+a_{in}b_{nj}$$

$$C=A\cdot B=\begin{pmatrix}-4 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-4+0-2 & -8+0+1 & 12+0+3\\ 2-2-6 & 4+0+3 & -6-1+9\\ 3+4-4 & 6+0+2 & -9+2+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & -7 & 15\\ -6 & 7 & 2\\ 3 & 8 & -1\end{pmatrix}$$

б)

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4+4-9 & 0-2-6 & 1+6-6\\ -8+0+3 & 0+0+2 & 2+0+2\\ 8+2+9 & 0-1+6 & -2+3+6\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-9 & -8 & 1\\ -5 & 2 & 4\\ 19 & 5 & 7\end{pmatrix}. \qquad AB\neq BA$$

в) А матрицасынын тескери матрицасы А$^{-1}$ төмөндөгү көрүнүшкө ээ:

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta(A)}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix},$$

мында $\Delta(A)=\begin{vmatrix}-4 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & 2\end{vmatrix}=8+4+3+24=39\neq 0,$

башкача айтканда, А матрицасы кубулбаган матрица.

Демек, А $^{-1}$ тескери матрицасы жашайт. Алгебралык толуктоочторду табабыз:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-8; \quad A_{21}=-\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=2; \quad A_{31}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=1;$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}=5; \quad A_{22}=\begin{vmatrix}-4 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-11; \quad A_{32}\ -\begin{vmatrix}-4 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=14;$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=7; \quad A_{23}=-\begin{vmatrix}-4 & 0\\ 3 & 2\end{vmatrix}=8; \quad A_{33}\ \begin{vmatrix}-4 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}=4;$$

$$A^{-1} = \frac{1}{39}\begin{pmatrix} -8 & 2 & 1 \\ 5 & -11 & 14 \\ 7 & 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{39} & \frac{2}{39} & \frac{1}{39} \\ \frac{5}{39} & -\frac{11}{39} & \frac{14}{39} \\ \frac{7}{39} & \frac{8}{39} & \frac{4}{39} \end{pmatrix}$$

г) $A \cdot A^{-1} = \frac{1}{39}\begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{8}{39} & \frac{2}{39} & \frac{1}{39} \\ \frac{5}{39} & -\frac{11}{39} & \frac{14}{39} \\ \frac{7}{39} & \frac{8}{39} & \frac{4}{39} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$

д) $A \cdot A^{-1} = \frac{1}{39}\begin{pmatrix} -8 & 2 & 1 \\ 5 & -11 & 14 \\ 7 & 8 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$

Башкача айтканда, тескери матрица туура табылган.

11-20. Сызыктуу теңдемелер системасынын биргелешкен экендигин текшергиле жана эгерде ал биргелешкен болсо, аны төмөнкү усулдар менен чыгаргыла:

а) Крамердин эрежеси боюнча

б) тескери матрица усулу менен

в) Гаусстун усулу менен

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 3; \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = -7 \end{cases}$$

Чыгаруу:

а) Системанын негизги аныктагычын табабыз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 1\cdot 4\cdot(-3) + 2\cdot(-1)\cdot(-1) + 5\cdot(-3)\cdot 3 - (-1)\cdot 4\cdot 3 -$$

$$1\cdot(-3)\cdot(-1) - 5\cdot 2\cdot(-3) = -16, \qquad \Delta = -16 \neq 0.$$

Системанын негизги аныктагычы нөлдөн айырмалуу болгондуктан, система жалгыз гана чечимге ээ. Системанын чечимин Крамердин эрежеси боюнча табабыз:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

мында

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ -7 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 64; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & -7 & -3 \end{vmatrix} = -16; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 32;$$

Демек, $x_1 = \frac{64}{-16} = -4, \quad x_2 = \frac{-16}{-16} = 1, \quad x_3 = \frac{32}{-16} = -2.$

б) Системанын чечимин тескери матрица усулу менен табуу үчүн системаны AX= B матрица формасында жазып алабыз. Системанын чечими X= A^{-1} B көрүнүшүндө табылат. A^{-1} тескери матрицасын табабыз (ал жашайт, себеби $\Delta(A) = \Delta = -16 \neq 0$)

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -15; \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 16; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -11;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -14; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 16; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -6.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-16}\begin{pmatrix} -15 & 16 & -11 \\ -3 & 0 & 1 \\ -14 & 16 & -6 \end{pmatrix};$$

Системанын чечими

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-16}\begin{pmatrix} -15 & 16 & -11 \\ -3 & 0 & 1 \\ -14 & 16 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} = \frac{1}{-16}\begin{pmatrix} -45+32+77 \\ -9+0-7 \\ -42+32+42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Демек, $x_1 = -4, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -2.$

в) Системаны Гаусстун усулу менен чыгарабыз.

Системанын кенейтилген матрицасын жазабыз жана аны тепкич көрүнүшүнө алып келебиз:

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & -3 & -7 \end{array}\right).$$

Ал үчүн биринчи жолчону (-2) ге көбөйтүп экинчи жолчого кошобуз, андан соң биринчи жолчону (-3) кө көбөйтүп үчүнчү жолчого кошобуз.

Үчүнчү жолчону (-16) га бөлүп, экинчи жана үчүнчү жолчолордун ордун алмаштырабыз. Төмөндөгүнү алабыз:

$$C=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 5 & -1 & 3\\ 2 & 4 & -3 & 2\\ 3 & -1 & -3 & -7\end{array}\right)\rightarrow\left(\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 5 & -1 & 3\\ 0 & -6 & -1 & -4\\ 0 & -16 & 0 & -16\end{array}\right)\right.\rightarrow$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 5 & -1 & 3\\ 0 & -6 & -1 & -4\\ 0 & 1 & 0 & \cdot 1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 5 & -1 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & -6 & -1 & -4\end{array}\right)$$

Андан соң экинчи жолчону 6 га көбөйтүп үчүнчү жолчо менен кошобуз, төмөндөгүнү алабыз.

$$C=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 5 & -1 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 2\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 5 & -1 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -2\end{array}\right)$$

Кийин экинчи жолчону 5 ке көбөйтүп биринчи жолчодон кемитебиз жана үчүнчү жолчону кошобуз. Жыйынтыгында, төмөнкүгө ээ болобуз.

$$C=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 5 & -1 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -2\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -2\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & -4\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -2\end{array}\right)$$

Мындан төмөндөгү келип чыгат:

$$x_1=-4; \qquad x_2=1; \qquad x_3=-2$$

21-30. Бир тектүү сызыктуу теңдемелер системасын чыгаргыла.

$$\begin{cases} 3x+4y-z=0, \\ x-3y+5z=0, \\ 4x+y+4z=0 \end{cases}$$

Бир тектүү сызыктуу теңдемелер системасы дайыма биргелешкен. Эгерде системанын негизги аныктагычы $\Delta \neq 0$ болсо, анда система $x=0, y=0, z=0$ деген жалгыз гана чечимге ээ.

Эгерде системанын негизги аныктагычы $\Delta = 0$ болсо, анда система чексиз көп чечимге ээ болот.

Чыгаруу:

$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$ болгондуктан, система чексиз көп чечимге ээ.

Системанын каалаган эки тендемесин алалы (Мисалы, биринчи жана экинчи) жана анын чечимин табалы.

$$\begin{cases} 3x+ \quad 4y- \quad z= \quad 0 \\ x- \quad 3y+ \quad 5z= \quad 0 \end{cases}$$

$$x=\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} t = 17t, \; y=-\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} t = -16t, \; z=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} t = -13t,$$

Мында t каалаган сан.

31-40. Декарттык координаталар системасында $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ векторлору берилген. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторлору базисти түзөөрүн көрсөткүлө. $\vec{d}$ векторунун ушул базистеги координаталарын тапкыла. ($\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ базисиндеги $\vec{d}$ векторунун ажыралышын жазгыла.)

$$\vec{d}=\{-1,7,-4\},\quad \vec{a}=\{-1,2,1\},\quad \vec{b}=\{2,0,3\},\quad \vec{c}=\{1,1,-1\}.$$

Чыгаруу:

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ векторлору базисти түзөт, эгерде ушул векторлордун координаталарынан түзүлгөн аныктагыч нөлдөн айырмалуу болсо. Эсептейбиз.

$$\Delta=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 3\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=0+6+2-0-(-3)-(-4)=15\neq 0,$$

Демек, $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ векторлору базисти түзөт. $\vec{d}$ векторунун $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ базисиндеги ажыралышы төмөндөгүдөй көрүнүшкө ээ:

$\vec{d}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$, мында $\alpha,\ \beta,\ \gamma-\vec{d}$ векторунун $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ базисиндеги координаталары.

$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ ны табуу үчүн сызыктуу теңдемелер системасын түзөбүз.

$$\begin{cases}-\alpha+2\beta+\gamma=-1\\ 2\alpha+\gamma=7\\ \alpha+3\beta-\gamma=-4\end{cases}$$

Мында белгисиздин алдындагы коэффициенттер базистик вектордун кординаталарына, ал эми бош мүчөлөр $\vec{d}$ векторунун координаталарына барабар. Системанын негизги аныктагычы мурда эсептелген жана ал 15 ке барабар, ошондуктан системаны Крамердин эрежеси боюнча чыгарууга болот.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 7 & 0 & 1 \\ -4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 30, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \end{vmatrix} = -15, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 7 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 45$$

Демек, $\alpha = \frac{30}{15} = 2,\ \beta = \frac{-15}{15} = 1,\ \gamma = \frac{45}{15} = 3$ жана $\vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$.

41-50. ABC үч бурчтугунун чокулары берилген: $A(4;3),\ B(-3;-3),\ C(2;7)$. Төмөндөгүлөрдү тапкыла:

1. AB жагынын узундугун;
2. AB жана BC жактарынын теңдемелерин жана алардын бурчтук коэффициенттерин;
3. CD бийиктигинин теңдемесин жана анын узундугун;
4. AE медианасынын теңдемесин жана ушул медиананын CD бийиктиги менен кесилишкен K чекитинин координатасын;
5. K чекити аркылуу өтүүчү AB жагына параллель болгон түз сызыктын тендемесин;
6. CD түз сызыгына карата A чекитине симметриялуу жайгашкан M чекитинин координаталарын. Графикти тургузуу.

Чыгаруу:

1) Эки чекиттин арасындагы аралыкты табуунун формуласынан пайдаланабыз:

$$d = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}$$

Мында $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ушул чекиттердин координаталары. Демек, АВ жагынын узундугу төмөнкүгө барабар:

$$|AB| = \sqrt{(-3-4)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{49+36} = \sqrt{85} \approx 9,2$$

2) Эки чекит аркылуу өткөн түз сызыктын теңдемесинен пайдаланабыз:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

АВ жагынын теңдемеси:

$$\frac{x-4}{-3-4} = \frac{y-3}{-3-3} \Rightarrow 6(x-4) = 7(y-3) \Rightarrow 6x-7y-3=0 \Rightarrow y = \frac{6}{7}x - \frac{3}{7}$$

Акыркы теңдеме бурчтук коэффициенти менен берилген теңдеме, демек, мындан $k_{AB} = \frac{6}{7}$.

ВС жагынын теңдемеси:

$$\frac{x-(-3)}{2-(-3)} = \frac{y-(-3)}{7-(-3)} \Rightarrow \frac{x+3}{5} = \frac{y+3}{10} \Rightarrow 10(x+3) = 5(y+3) \Rightarrow$$
$$2x-y+3=0, \Rightarrow y = 2x+3 \quad жана \quad k_{BC} = 2.$$

3) CD бийиктиги АВ жагына перпендикулярдуу, ошондуктан $k_1 \cdot k_2 = -1$ перпендикулярдуулук шартынан пайдаланабыз жана андан төмөндөгүнү табабыз.

$$k_{CD} = -\frac{1}{k_{AB}} = -\frac{7}{6}$$

Берилген чекит аркылуу өтүүчү, бурчтук коэффициенти менен берилген түз сызыктын теңдемесинен пайдаланабыз:

$$y-y_0=k\left(x-x_0\right).$$

Бул теңдемедеги x_0,y_0 дун ордуна С чекитинин координаталарын жана k_{CD} ны коюп, CD бийиктигинин теңдемесин табабыз:

$$y-7=-\frac{7}{6}(x-2) \quad \Rightarrow \quad 7x+6y-56=0$$

CD бийиктигинин узундугун С чекитинен АВ түзүнө чейинки аралыкты табуунун формуласы боюнча табабыз.

$$h=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

мында $Ax+By+C=0$ AB-жагынын теңдемеси, $\left(x_0,y_0\right)$- С чекитинин координаталары.

Эсептейбиз:

$$h=\left|CD\right|=\frac{\left|6\cdot 2-7\cdot 7-3\right|}{\sqrt{6^2+7^2}}=\frac{40}{\sqrt{85}}\approx\frac{40}{9{,}2}=4{,}35$$

4) АЕ медианасынын теңдемесин түзүү үчүн ВС жагынын тең ортосу болгон Е чекитинин координаталарын табабыз

$$x_E=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{-3+2}{2}=-\frac{1}{2}; \qquad y_E=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{-3+7}{2}=2.$$

А жана Е эки чекити аркылуу өтүүчү түз сызыктын теңдемесин жазабыз:

$$\frac{x-4}{-0{,}5-4}=\frac{y-3}{2-3} \Rightarrow x-4=4{,}5(y-3)\Rightarrow x-4{,}5y+9{,}5=0 \text{ же } 2x-9y+19=0$$

Бул тендеме АЕ - медианасынын теңдемеси.

CD бийиктиги менен АЕ медианасынын кесилишкен чекиттеринин кординаталарын табабыз. Ал үчүн ушул түз сызыктардын теңдемелеринен система түзөбүз жана аны чыгарабыз.

$$\begin{cases} 7x+6y-56=0 \\ 2x-9y+19=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x+6y=56 \\ 2x-9y=-19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{26}{5} \\ y=\dfrac{49}{15} \end{cases} \Rightarrow \ K(26/5;\ 49/15)$$

5) К чекити аркылуу өтүүчү түз сызык АВ жагына параллель болгондуктан, алардын бурчтук коэффициенти $k_{AB}=\frac{6}{7}.$ Анда К чекити жана бурчтук коэффициенти боюнча түз сызыктын теңдемесин түзөбүз.

$$y-\frac{49}{15}=\frac{6}{7}(x-\frac{26}{5}) \quad \Rightarrow \quad 6x-7y-\frac{25}{3}=0 \quad \text{же} \quad 18x-21y-25=0.$$

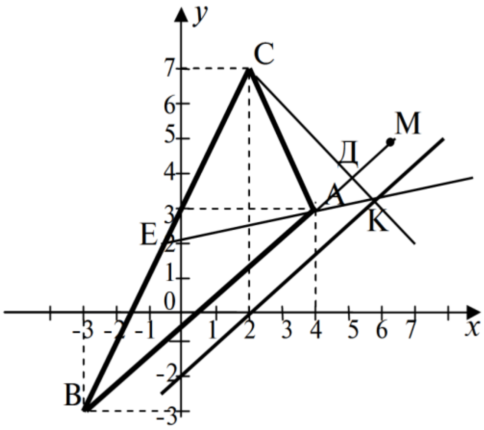
6) D чекитинин координаталарын табабыз. D чекити АВ жагы менен CD бийиктигинин кесилишинде жаткандыктан, төмөндөгү системаны чыгарабыз.

$$\begin{cases} 6x-7y-3=0 \\ 7x+6y-56=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x-7y=3 \\ 7x+6y=56 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{82}{17} \\ y=\dfrac{63}{17} \end{cases} \Rightarrow D(82/17; \quad 63/17).$$

М чекитинин координаталарын табабыз. Ал чекит CD түз сызыгына карата А чекитине симметриялуу жайгашкан жана D чекити АМ кесиндисинин тең ортосу болуп эсептелет, башкача айтканда

$$x_D=\frac{x_A+x_M}{2}; \qquad y_D=\frac{y_A+y_M}{2};$$

$$x_M=2x_D-x_A=2\cdot\frac{82}{17}-4=\frac{96}{17}\approx 5{,}6;$$
$$y_M=2y_D-y_A=2\cdot\frac{63}{17}-3=\frac{75}{17}\approx 4{,}4.$$



Векторлордун скалярдык, вектордук жана аралаш көбөйтүндүсү

Аныктама: a жана b эки векторунун скалярдык көбөйтүндүсү деп, $c=a\cdot b$ саны аталат жана ал берилген векторлордун модулдарын алардын арасындагы бурчтун косинусуна көбөйткөнгө барабар:

$$a\cdot b=|a|\cdot|b|\cdot\cos(a,\wedge b) \qquad \textit{мында } 0\le(a,\wedge b)\le\pi.$$

Векторлордун скалярдык көбөйтүндүсүнүн негизги касиеттери:

1) $a\cdot b=b\cdot a;$

2) $(\lambda a)\cdot b=\lambda(a\cdot b)=a\cdot(\lambda b);$

3) $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c;$

4) $a\cdot b=|a|\cdot np_a b=|b|\cdot np_b a;$

5) $a\cdot a=|a|^2;$

6) $a\cdot b=0 \quad \Leftrightarrow \quad a\perp b$

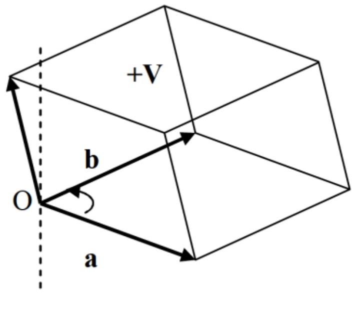
Эгерде $a=(x_1, y_1, z_1),\ b=(x_2, y_2, z_2)$ болсо , анда i, j, k базисинде

$$a\cdot b=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2;$$

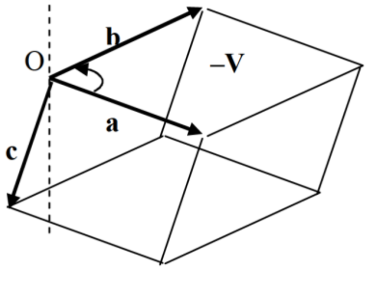
$$|a|=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}; \qquad |b|=\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2};$$

$$\cos(a,\wedge b)=\frac{a\cdot b}{|a|\cdot|b|}=\frac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

Аныктама: Башталышы О чекити болгон иреттелген компланардуу a, b, c үч вектору оң үчтүк деп аталат, эгерде a векторунан b векторуна эң кыска бурулуш c векторунун акыркы чекитинен байкалып, сааттын жебесине каршы болсо. Карама каршы учурда сол үчтүк деп аталат.

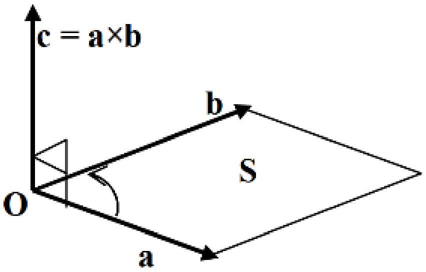


Оң үчтүк



Сол үчтүк

Аныктама: а жана b векторлорунун векторлук көбөйтүндүсү деп $c = a \times b$ деп белгиленүүчү, төмөндөгү үч шартты канааттандырган вектор аталат:



1) $|c| = |a||b| \sin(a,\wedge b);$

2) $c \perp a, \quad c \perp b;$

3) a,b,c - үчтүгү оң үчтүк.

Векторлордун вектордук көбөйтүндүсүнүн негизги касиеттерин санап өтөлү:

1) $a \times b = -(b \times a);$

2) $(\lambda a) \cdot b = \lambda(a \times b) = a \cdot (\lambda b);$

3) $a \times (b + c) = a \times b + a \times c;$

4) $a \times b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \| b$

5) $|a \cdot b| = S,$ мында S - башталышы O чекити болгон, а жана b векторлоруна тургузулган параллелограммдын аянты.

Эгерде $a = \left(x_1, y_1, z_1\right), \; b = \left(x_2, y_2, z_2\right)$ болсо, анда $a \times b$ вектордук көбөйтүндүсү а жана b векторлорунун координаталары аркылуу төмөндөгүчө туюнтулат:

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Аныктама: *a, b, c* векторлорунун аралаш көбөйтүндүсү деп $(a \times b) \cdot c$ саны аталат.

Векторлордун аралаш көбөйтүндүсүнүн негизги касиеттерин санап өтөлү:

1) $(a \times b) \cdot c = a \cdot (b \times c)$, ошондуктан аралаш көбөйтүндүнү abc деп белгилесек болот;

2) $abc = bca = cab = -bac = -cba = -acb$;

3) Аралаш көбөйтүндүнүн геометриялык мааниси: $abc = \pm V$, мында V - ушул векторлорго тургузулган параллелепипеддин көлөмү.

“+V ” – эгерде a,b,c үчтүгү – оң үчтүк болсо,

“- V ” – эгерде a,b,c үчтүгү – сол үчтүк болсо.

4) abc =0 $\Leftrightarrow$ a,b,c- компланардуу векторлор.

Эгерде $a = \left(x_1, y_1, z_1\right)$, $b = \left(x_2, y_2, z_2\right)$, $c = \left(x_3, y_3, z_3\right)$болсо, анда

$$abc = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

51-60. $A_1A_2A_3A_4$ пирамидасынын чокусунун координаталары берилген. Төмөндөгүлөрдү тапкыла:

1. A_1A_2 кырынын узундугун;

2. A_1A_2 жана A_1A_3 кырларынын ортосундагы бурчту;

3. A_1A_4 кыры менен $A_1A_2A_3$ бетинин ортосундагы бурчту;

4. $A_1A_2A_3$ бетинин аянтын;

5. Пирамиданын көлөмүн;

6. A_1A_2 түз сызыгынын теңдемесин;

7. $A_1A_2A_3$ тегиздигинин теңдемесин;

8. A_4 чокусунан $A_1A_2A_3$ бетине түшүрүлгөн бийиктиктин теңдемесин.

$A_1(4;7;8),\ A_2(-1;13;0),\ A_3(2,4,9),\ A_4(1,8,9)$

Чыгаруу.

1) Эки чекиттин арасындагы аралыкты табуу формуласынан пайдаланабыз:

$$d=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2+\left(z_2-z_1\right)^2},$$

мында (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) ушул чекиттердин координаталары.

Демек, A_1A_2 кырынын узундугу

$$\left|A_1A_2\right|=\sqrt{(-1-4)^2+(13-7)^2+(0-8)^2}=\sqrt{25+36+64}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$$

2) A_1A_2 жана A_1A_3 кырларынын ортосундагы бурч $\overrightarrow{A_1A_2}$ жана $\overrightarrow{A_1A_3}$ багыттоочу векторлорунун арасындагы бурчка барабар.

$$\overline{A_1A_2} = \{-1-4; 13-7;\ 0-8\} = \{-5; 6; -8\}$$

$$\overline{A_1A_3} = \{2-4; 4-7;\ 9-8\} = \{-2;\ -3; 1\}$$

$$\cos\varphi = \frac{(\overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_1A_3})}{\left|\overline{A_1A_2}\right|\cdot\left|\overline{A_1A_3}\right|} = \frac{(-5)\cdot(-2)+6\cdot(-3)+(-8)\cdot 1}{\sqrt{(-5)^2+6^2+(-8)^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+(-3)^2+1^2}} =$$
$$= \frac{-16}{\sqrt{125}\cdot\sqrt{14}} \approx -0{,}38$$

$$\textit{Демек,} \qquad \varphi = \arccos\ (-0{,}38) \approx 112^0$$

3) A_1A_4 кыры менен $A_1A_2A_3$ бетинин ортосундагы бурчту табуу үчүн $A_1A_2A_3$ бетине перпендикулярдуу болгон векторду табышыбыз керек. Ал вектор нормаль вектор деп аталат жана A_1A_2 жана A_1A_3 векторлорунун вектордук көбөйтүндүсүнө барабар, башкача айтканда,

$$\vec{n} = \overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -5 & 6 & -8 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} 6 & -8 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} -5 & -8 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} -5 & 6 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} =$$
$$= -18i + 21j + 27k = \{-18;\ 21;\ 27\}.$$

$$\overline{A_1A_4} = \{1-4;\ 8-7;\ 9-8\} = \{-3;\ 1;\ 1\}.$$

A_1A_4 кыры менен $A_1A_2A_3$ бетинин ортосундагы бурчтун синусун төмөндөгү формула боюнча табабыз:

$$\sin\varphi=\frac{\left|\overline{A_1A_4}\cdot\bar{n}\right|}{\left|\overline{A_1A_4}\right|\cdot\left|\bar{n}\right|}=\frac{(-3)\cdot(-18)+1\cdot21+1\cdot27}{\sqrt{(-3)^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{(-18)^2+21^2+27^2}}=$$

$$=\frac{102}{\sqrt{11}\cdot3\sqrt{166}}\approx0{,}8$$

Демек, A_1A_4кыры менен $A_1A_2A_3$ бетинин ортосундагы бурч

$$\varphi=\arcsin0{,}8=52^0$$

4) $A_1A_2A_3$ бетинин аянты төмөндөгүгө барабар

$$S_{A_1A_2A_3}=\frac{1}{2}\left|\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3}\right|=\frac{1}{2}\left|\{-18;\ 21;\ 27\}\right|=\frac{3}{2}\sqrt{166}\approx19{,}3$$

5) Пирамиданын көлөмү төмөнкүгө барабар:

$$V=\frac{1}{6}\left|(\overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_1A_3}\overline{A_1A_4}\cdot)\right|=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}-5&6&-8\\-2&-3&1\\-3&1&1\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\left|15+16-18+72+5+12\right|=17$$

6) Эки чекит аркылуу өткөн түз сызыктын теңдемесинен пайдаланабыз

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

Анда A_1A_2 түз сызыгынын теңдемесин төмөндөгүчө жазсак болот:

$$\frac{x-4}{-1-4}=\frac{y-7}{13-7}=\frac{z-8}{0-8}\qquad же\qquad\frac{x-4}{-5}=\frac{y-7}{6}=\frac{z-8}{-8}$$

7) (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) чекиттери аркылуу өтүүчү тегиздиктин теңдемесинен пайдаланабыз

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Анда $A_1A_2A_3$ тегиздигинин теңдемеси төмөндөгүдөй көрүнүштө болот:

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-7 & z-8 \\ -1-4 & 13-7 & 0-8 \\ 2-4 & 4-7 & 9-8 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(x-4)\begin{vmatrix} 6 & -8 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - (y-7)\begin{vmatrix} -5 & -8 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + (z-8)\begin{vmatrix} -5 & 6 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

Жөнөкөйлөткөндөн соң, *6x-7y-9z+97=0* теңдемесин алабыз.

8) A_4H бийиктигинин теңдемесин, A_4H түз сызыгы менен $A_1A_2A_3$ тегиздиктеринин перпендикулярдуулук шартынан алабыз. Түз сызыктын багыттоочу вектору катары $A_1A_2A_3$ тегиздигинин $\vec{n} = \{6; -7; -9\}$ нормаль векторун алууга болот. Анда бийиктиктин теңдемеси төмөндөгүчө жазылат:

$$\frac{x-1}{6} = \frac{y-8}{-7} = \frac{z-9}{-9}.$$

61-70. Теңдемени каноникалык көрүнүшкө алып келгиле, ийринин түрүн аныктагыла жана графигин тургузгула .

1-мисал. $4x^2+9y^2+32x-54y+109=0$

Чыгаруу:

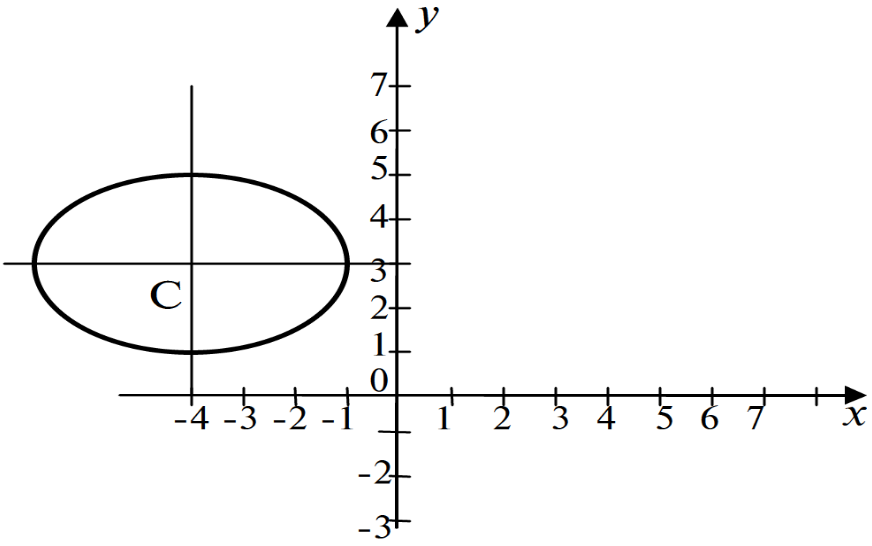
Теңдеменин x мүчөлөрүн жана y мүчөлөрүн толук квадратка чейин толуктайбыз:

$$4(x^2+8x+16)-64+9(y^2-6y+9)-81+109=0 \Rightarrow 4(x+4)^2+9(y-3)^2=36$$

Акыркы теңдемени 36 га бөлүп, теңдемени каноникалык түргө келтиребиз

$$\frac{(x+4)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{4}=1$$

Бул борбору C(-4;3) чекитинде жаткан, чоң жарым огу a = 3, кичине жарым огу b=2 болгон эллипс.



2-мисал. $x^2 - 6y^2 - 12x - 24y = 0$

Чыгаруу.

Теңдеменин x мүчөлөрүн жана y мүчөлөрүн толук квадратка чейин толуктайбыз:

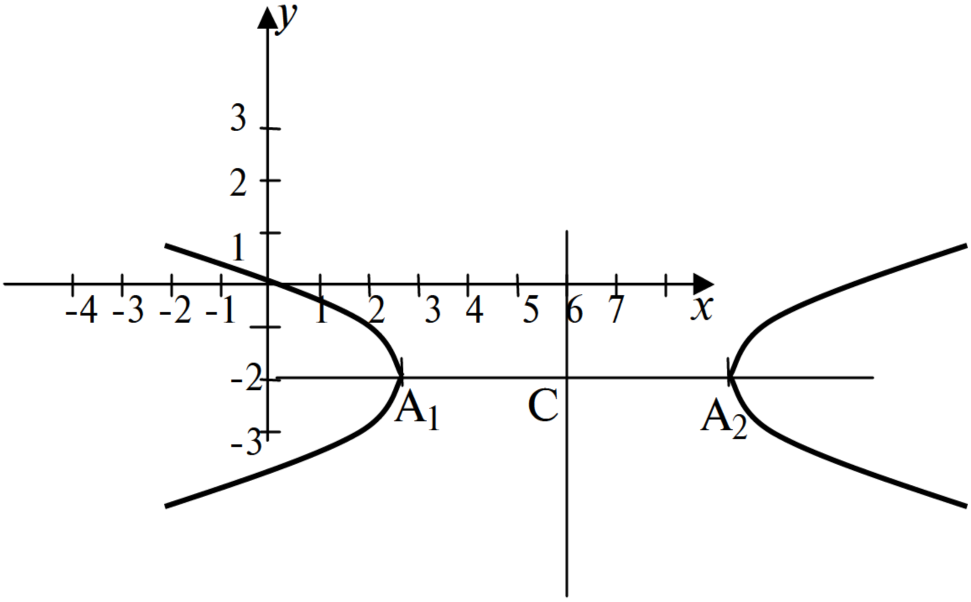
$$(x^2 - 12x + 36) - 36 - 6(y^2 + 4y + 4) + 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-6)^2 - 6(y+2)^2 = 12$$

Акыркы теңдемени 12 ге бөлүп, теңдемени каноникалык көрүнүшкө алып келебиз.

$$\frac{(x-6)^2}{12} - \frac{(y-2)^2}{2} = 1$$

Бул борбору С (6;-2) чекитинде жатуучу, чыныгы жарым огу $a = \sqrt{12}$, мнимый жары могу $b = \sqrt{2}$ ге барабар болгон гипербола.

Гиперболанын чокулары $A_1(6 - \sqrt{12};\ -2)$ жана $A_2(6 + \sqrt{12};\ -2)$.



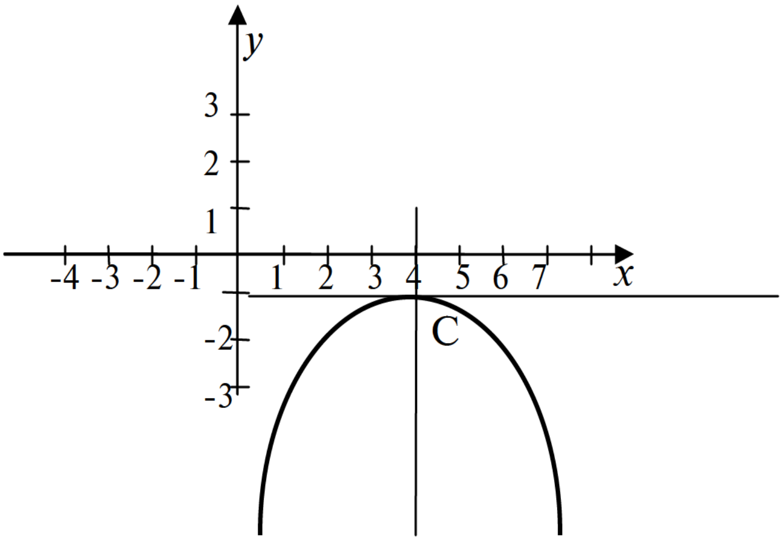
3-мисал. $x^2 - 8x + 2y + 18 = 0$

Чыгаруу.

Теңдеменин x ти кармаган мүчөлөрүн толук квадратка чейин толуктайбыз:

$$x^2 - 8x + 16 + 2y + 2 = 0 \;\Rightarrow\; (x-4)^2 + 2(y+1) = 0 \;\Rightarrow\; (x-4)^2 = -2(y+1)$$

Чокусу C(4:-1) чекитинде жатуучу , төмөн жакты караган параболанын каноникалык теңдемесин алдык.



№2- ТЕКШЕРҮҮ ИШ

Математикалык анализге киришүү

71-80. Лопиталдын эрежесин колдонбостон пределдерди эсептегиле.

71. *а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^6-5x+6}{x^6-12x^2+20}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{3x^2-8x-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{1+x}-2}{x-3}$; *г*) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot tgx}{\cos x-\cos^3 x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty} x(\ln(3x-1)-\ln(3x-2))$.

72. *а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^6-3x^4+6}{3x^6+2x^2+10}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2-5x-3}{x^2-x-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1}$; *г*) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos 6x}{1-\cos 4x}\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{\ln(1+x)}$.

73. *а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-3x^2-2x}{3x^3+4x^2+4}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{3x^2-4x-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3-\sqrt{2x+9}}$; *г*) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x^2+2x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{1-2x}$.

74. *а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x}{8x^3-4x^2+5}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x^2-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+7x}\right);$ *г*) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos 5x}}{2x};$

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+2}\right)^{3x}.$

75. *а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{100x^2+4x+5}{4x^3+x^2-3x};$ *б*) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{2x^2-6x+4};$

в) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}};$ *г*) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x+\sin 2x}{6x};$

д) $\lim\limits_{x\to\infty}x(\ln(2x+1)-\ln(2x+3)).$

76. *а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^5-5x^3+8}{x^5+2x^4+7};$ *б*) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{6-x-x^2}{x^3-8};$

в) $\lim\limits_{x\to -4}\frac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8};$ *г*) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{7x\sin 3x};$

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x+2}\right)^{-2x}.$

77. *а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^3-2x^2-4x}{2x^3+8x^2-x+5};$ *б*) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^3-27};$

в) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{5+x}-3}{x-4};$ *г*) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin 2x}{\cos x-\cos^3 x};$

д) $\frac{\lim}{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x}\right)^{1-3x}.$

78. *а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x^4+5x^2+6}{4x^4+2x^2+3};$ *б*) $\lim\limits_{x\to 6}\frac{2x^2-72}{x^2-7x+6};$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-1}{3x\sin 3x}$; *г*) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty} x(\ln(x+3)-\ln(x+2))$.

79. *а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+9}{6x^3+10x^2+5}$; *б*) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2-x-14}{x^2+8x+12}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2+2x}\right)$; *г*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x^3-\cos^3 x}{4x\sin x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x}\right)^{3+x}$.

80. *а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+15x^2+11}{3x^4-2x^2+2}$; *б*) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{3x^2+10x+3}{2x^2+5x-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x^2+4x-1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}}$; *г*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot tg 3x}{1-\cos 6x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x+1}\right)^{-4x}$.

81-90. $y=f(x)$ функциясы жана анын эки x_1 жана x_2 аргументинин маанилери берилген.

1) бул функция аргументтин ар бир маанисинде үзгүлтүксүзбү же үзүлүшкө ээ болобу?

2) эгер үзүлүшкө ээ болсо, функциянын пределин оң жактан жана сол жактан тапкыла;

81. $f(x)=10^{\frac{1}{3x+1}}$, $x_1=2$; $x_2=-1/3$.

82. $f(x)=3^{\frac{1}{2+x}}$, $x_1=0$; $x_2=-2$.

83. $f(x)=5^{\frac{1}{4+x}}$, $x_1=1$; $x_2=-4$.

84. $f(x)=2^{\frac{1}{x-1}}$, $x_1=0$; $x_2=1$.

85. $f(x)=7^{\frac{1}{x}}$, $x_1=0$; $x_2=-3$.

86. $f(x)=10^{\frac{1}{7-x}}$, $x_1=5$; $x_2=7$.

87. $f(x)=6^{\frac{1}{4-2x}}$, $x_1=2$; $x_2=1/2$.

88. $f(x)=4^{\frac{1}{6-2x}}$, $x_1=3$; $x_2=4$.

89. $f(x)=2^{\frac{1}{4x+2}}$, $x_1=1$; $x_2=-1/2$.

90. $f(x)=8^{\frac{1}{6-x}}$, $x_1=6$; $x_2=4$.

91-100. $y=f(x)$ функциясы берилген. Функциянын үзүлүш чекиттерин тапкыла, эгерде жашаса. График тургузгула.

91. $$f(x)=\begin{cases}-1, \text{ эгерде } x<0,\\ -\cos x, \text{ эгерде } 0\le x\le \pi/2,\\ \pi/2+x, \text{ эгерде } x>\pi/2.\end{cases}$$

92. $$f(x)=\begin{cases}x, \text{ эгерде } x\le -2,\\ 2-x, \text{ эгерде } -2<x<0,\\ x^2+2, \text{ эгерде } x\ge 0.\end{cases}$$

93. $$f(x)=\begin{cases}x, \text{ эгерде } x\le -1,\\ 1/2, \text{ эгерде } -1<x\le \pi/6,\\ \sin x, \text{ эгерде } x>\pi/6.\end{cases}$$

94. $$f(x)=\begin{cases}x^2-4, \text{ эгерде } x<-1,\\ 3x, \text{ эгерде } -1\le x\le 3,\\ 5, \text{ эгерде } x>3.\end{cases}$$

95. $$f(x)=\begin{cases}2, \text{ эгерде } x<-1,\\ 2-2x, \text{ эгерде } -1\le x\le 1,\\ \ln x, \text{ эгерде } x>1.\end{cases}$$

96. $$f(x)=\begin{cases}4/x, \text{ эгерде } x<-2,\\ x, \text{ эгерде } -2\le x<0,\\ 1-x, \text{ эгерде } x\ge 0.\end{cases}$$

97. $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{4-x}}{2}, \text{ эгерде } x<0,\\ \cos 2x, \text{ эгерде } 0\le x\le \pi/4,\\ -x, \text{ эгерде } x>\pi/4.\end{cases}$$

98. $$f(x)=\begin{cases}\cos x, \text{ эгерде } x\le -\pi,\\ -1, \text{ эгерде } -\pi\le x\le 0,\\ \sqrt{x+1}, \text{ эгерде } x>0.\end{cases}$$

99. $$f(x)=\begin{cases} x+\pi, \ \textit{эгерде} \ x\le -\pi, \\ \sin x, \ \textit{эгерде} \ -\pi < x \le 0, \\ 3-2x, \ \textit{эгерде} \ x>0. \end{cases}$$

100. $$f(x)=\begin{cases} x^2-4, \ \textit{эгерде} \ x<-2, \\ 3x+2, \ \textit{эгерде} \ -2\le x\le 2, \\ 12-x^2, \ \textit{эгерде} \ x>2. \end{cases}$$

№2- ТЕКШЕРҮҮ ИШТИ ЧЫГАРУУ ҮЧҮН УСУЛДУК КӨРСӨТМӨЛӨР

71-80. Лопиталдын эрежесин колдонбостон пределдерди эсептегиле.

Чыгаруу: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4+2x^3+5}{6x^4+3x^2-7x}$. $\dfrac{\infty}{\infty}$ түрүндөгү аныксыздык.

Бул аныксыздыкты ачуу үчүн бөлчөктүн алымын дагы, бөлүмүн дагы x тин жогорку даражасына бөлөбүз, биздин мисалда x^4.Төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^4+2x^3+5}{6x^4+3x^2-7x}=\lim_{x\to\infty}\frac{7\frac{x^4}{x^4}+2\frac{x^3}{x^4}+\frac{5}{x^4}}{6\frac{x^4}{x^4}+3\frac{x^2}{x^4}-\frac{7x}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{7+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^4}}{6+\frac{3}{x^2}-\frac{7}{x^3}}=\frac{7}{6},$$

себеби $x\to\infty \Rightarrow \dfrac{2}{x}, \dfrac{5}{x^4}, \dfrac{3}{x^2}, \dfrac{7}{x^3} \to 0.$

б) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-4}{3x^2+x-10}$. $\dfrac{0}{0}$ түрүндөгү аныксыздык.

Бул аныксыздыкты ачуу үчүн, кыскача көбөйтүүнүн формулаларынын жардамында бөлчөктүн алымын көбөйтүүчүлөргө ажыратабыз:

$$x^2-4=(x-2)(x+2)$$

Бөлчөктүн бөлүмүн квадраттык үч мүчөнү көбөйтүүчүлөргө ажыратуунун жардамында көбөйтүүчүлөргө ажыратабыз.

Ал үчүн $3x^2+x-10=0$ теңдемесин чыгарабыз.

$$\sqrt{D}=\sqrt{b^2-4ac}=\sqrt{1-4\cdot3\cdot(-10)}=11$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-1\pm11}{6};$$

$$x_1=\frac{5}{3},\quad x_2=-2.$$

$$3x^2+x-10=3\left(x-\frac{5}{3}\right)(x+2)=(3x-5)(x+2)$$

Алынган туюнтмаларды предел белгисинин алдына коебуз:

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2-4}{3x^2+x-10}=\lim_{x\to-2}\frac{(x-2)(x+2)}{(3x-5)(x+2)}=\lim_{x\to-2}\frac{x-2}{3x-5}=\frac{-2-2}{3\cdot(-2)-5}=\frac{-4}{-11}=\frac{4}{11}.$$

в) $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{21+x}-5}{x^3-64}\cdot$ $\frac{0}{0}$ түрүндөгү аныксыздык.

Бул аныксыздыкты ачуу үчүн, бөлчөктүн алымын да, бөлүмүн да бөлчөктүн алымынын түйүндөшүнө көбөйтөбүз.

$$\lim_{x\to4}\frac{\left(\sqrt{21+x}-5\right)\left(\sqrt{21+x}+5\right)}{\left(x^3-64\right)\left(\sqrt{21+x}+5\right)}=\lim_{x\to4}\frac{21+x-25}{\left(x^3-64\right)\left(\sqrt{21+x}+5\right)}.$$

Бөлчөктүн бөлүмүн кубдардын айырмасынын жардамында көбөйтүүчүлөргө ажыратабыз жана төмөндөгүнү алабыз:

$$\lim_{x\to4}\frac{x-4}{(x-4)\left(x^2+4x+16\right)\left(\sqrt{21+x}+5\right)}=\lim_{x\to4}\frac{1}{\left(x^2+4x+16\right)\left(\sqrt{21+x}+5\right)}=\frac{1}{480}.$$

г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{5x\cdot\sin x}{\cos2x-\cos4x}$. $\frac{0}{0}$ түрүндөгү аныксыздык.

Бул аныксыздыкты ачуу үчүн, бөлчөктүн бөлүмүн косинустардын айырмасынын формуласынын жардамында көбөйтүүчүлөргө ажыратабыз:

$$\cos2x-\cos4x=-2\sin\frac{2x+4x}{2}\cdot\sin\frac{2x-4x}{2}=-2\sin3x\sin(-x)=2\sin3x\sin x.$$

Андан соң $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ биринчи сонун пределин же

$x\to0$ $\sin x\cong x,$ $\sin3x\cong3x$ чексиз кичине чоңдуктарынын эквиваленттүүлүк касиетинен колдонобуз жана төмөнкүлөргө ээ болобуз:

$$\lim_{x\to0}\frac{5x\cdot\sin x}{\cos2x-\cos4x}=\lim_{x\to0}\frac{5x\cdot x}{2\sin3x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{5}{2\frac{\sin3x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x}}=\frac{5}{6}$$

$$\left(себеби,\ \lim_{x\to0}\frac{\sin3x}{x}=3\right)$$

же $\lim\limits_{x\to0}\frac{5x\cdot\sin x}{\cos2x-\cos4x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{5x\cdot x}{2\sin3x\cdot\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{5x^2}{2\cdot3x\cdot x}=\frac{5}{6}.$

д) $\lim\limits_{x\to\infty} 4x(\ln(1+2x)-\ln(3+2x))$.

Предел белгисинин алдындагы туюнтманы логарифмалардын касиетин колдонуп жөнөкөйлөтөбүз.

$$\lim_{x\to\infty} 4x(\ln(1+2x)-\ln(3+2x))=\lim_{x\to\infty} 4x\left(\ln\frac{1+2x}{3+2x}\right)=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{1+2x}{3+2x}\right)^{4x}.$$

Логарифмалык функция аныкталуу областында үзгүлтүксүз болгондуктан, үзгүлтүксүз функциялардын касиети боюнча предел менен логарифмдин ордун алмаштырууга болот, башкача айтканда

$$\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{1+2x}{3+2x}\right)^{4x}=\ln\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+2x}{3+2x}\right)^{4x}$$

Эми $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+2x}{3+2x}\right)^{4x}$ пределин табуу керек . 1^{∞} түрүндөгү аныксыздык.

Бул аныксыздыкты ачуу үчүн туюнтманы $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$ экинчи сонун пределине алып келебиз.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+2x}{1+3x}\right)^{4x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1+2x}{3+2x}-1\right)^{4x}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{3+2x}\right)^{4x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-2}{3+2x}\right)^{\frac{3+2x}{-2}}\right)^{\frac{-2}{3+2x}\cdot 4x}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{-8x}{3+2x}}=e^{-4},\ \textit{себеби}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-8x}{3+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-8}{\frac{3}{x}+2}=-\frac{8}{2}=-4,\qquad \left(x\to\infty,\ \frac{3}{x}\to 0\right)$$

Же башкача жол менен да жөнөкөйлөтсө болот: (Бөлчөктүн алымын жана бөлүмүн 2х ке мүчөлөп бөлүп жиберсе болот)

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{3+2x}\right)^{4x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{2x}}{1+\frac{3}{2x}}\right)^{4x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{4x}}{\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{4x}}=\frac{e^{\frac{1}{2}\cdot 4}}{e^{\frac{3}{2}\cdot 4}}=\frac{e^{2}}{e^{6}}=e^{-4}.$$

81-90. $y=f(x)=8^{\frac{1}{x-3}}$ функциясы жана анын $x_1=3$ жана $x_2=4$ аргументинин маанилери берилген.

1) бул функция аргументтин ар бир маанисинде үзгүлтүксүзбү же үзүлүшкө ээ болобу;

2) эгер үзүлүшкө ээ болсо, функциянын пределин оң жактан жана сол жактан тапкыла.

Чыгаруу.

$x_1=3$ чекити үчүн: $\lim\limits_{x\to 3-0}8^{\frac{1}{x-3}}=8^{-\infty}=0,\qquad \lim\limits_{x\to 3+0}8^{\frac{1}{x-3}}=8^{\infty}=\infty,$

башкача айтканда, $x_1=3$ чекитинде $f(x)$ функциясы чексиз үзүлүшкө ээ. ($x_1=3$ – экинчи түрдөгү үзүлүш чекити)

$x_2=4$ чекити үчүн: $\lim\limits_{x\to 4-0}8^{\frac{1}{x-3}}=8^{1}=8,\qquad \lim\limits_{x\to 3+0}8^{\frac{1}{x-3}}=8^{1}=8.$

Демек, $x_2=4$ чекитинде $f(x)$ функциясы үзгүлтүксүз.

91-100. $y = f(x)$ функциясы берилген. Функциянын үзүлүү чекиттерин тапкыла, эгерде жашаса. Графикти тургузгула.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \textit{эгерде } x \le 0, \\ (x-1)^2, & \textit{эгерде } 0 \le x \le 2, \\ 5-x, & \textit{эгерде } x > 2. \end{cases}$$

Чыгаруу.

$f(x)$ функциясы $(-\infty;0)$, $(0;2)$, $(2;+\infty)$ интервалдарында аныкталган жана үзгүлтүксүз, мында ал үзгүлтүксүз элементардык функциялар менен берилген. Демек, $x_1 = 0$ *жана* $x_2 = 2$ чекиттеринде гана үзүлүшкө ээ болушу мүмкүн.

$x_1 = 0$ чекити үчүн:

$$\lim_{x \to -0} f(x) = \lim_{x \to -0} x^2 = 0, \qquad \lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to +0} (x-1)^2 = 1,$$

$$f(0) = x^2\Big|_{x=0} = 0,$$

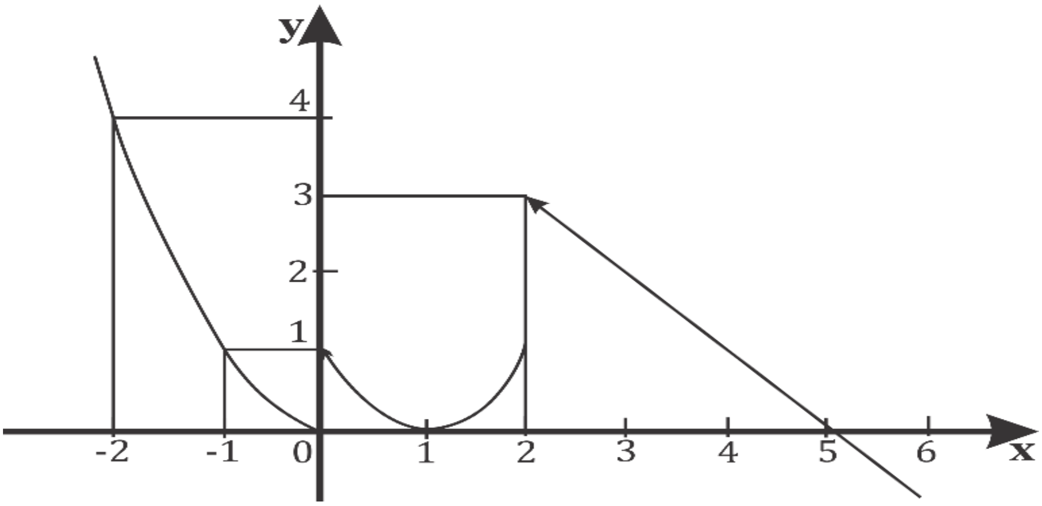
башкача айтканда $f(x)$ функциясы $x_1 = 0$ чекитинде биринчи түрдөгү үзүлүшкө ээ.

$x_2 = 2$ чекити үчүн

$$\lim_{x \to 2-0} f(x) = \lim_{x \to 2-0} (x-1)^2 = 1, \qquad \lim_{x \to 2+0} f(x) = \lim_{x \to 2+0} (5-x) = 3,$$

$$f(2) = (x-1)^2\Big|_{x=2} = 1,$$

башкача айтканда, $x_2 = 2$ чекитинде $f(x)$ функциясы биринчи түрдөгү үзүлүшкө ээ. Сүрөттө берилген функциянын графиги көрсөтүлгөн.



№3- ТЕКШЕРҮҮ ИШ

Туунду жана анын колдонулушу

101-110. Берилген функциялардын $\frac{dy}{dx}$ туундусун тапкыла.

101. *а*) $y=\frac{3x-4}{\sqrt{x^2+3x-2}}$; *б*) $y=\left(3^{\sin 2x}-\cos^2 2x\right)^3$;

в) $y=\ln\arcsin\sqrt{1-x^2}$; *г*) $y=\ln\sqrt[3]{\frac{2-x^3}{x^3-6x}}$; *д*) $y=(2x+3)^{tgx}$.

102. *а*) $\frac{x+3}{\sqrt{x^3-6x-9}}$; *б*) $y=\left(2^{arctgx}-\ln\left(1+x^2\right)\right)^4$;

в) $y=\ln tgx^3$; *г*) $y=\ln\sqrt[4]{\frac{3x^2+2}{x^3+2x}}$; *д*) $y=(1+\cos 2x)^{\sin 3x}$

103. *а*) $y=\frac{2x}{\sqrt{x^3-5x^2+3}}$; *б*) $y=(3^{\cos 3x}+\sin^2 3x)^3$;

в) $y=arctg\frac{2x+1}{2x-1}$; *г*) $y=\ln\sqrt{\frac{x^2+3}{x^3+9x}}$; *д*) $y=\left(x^3+2\right)^{ctgx}$.

104. *а*) $y=\frac{3x}{\sqrt{x^3-4x^2+1}}$; *б*) $y=\left(2^{\arcsin 2x}+\arccos 2x\right)^4$

в) $y=arctg\sqrt{1-x^2}$; *г*) $y=\ln\sqrt[3]{\frac{2x^2-2}{x^3-3x}}$; *д*) $y=(tg2x)^{\cos 2x}$.

105. *а*) $y=\frac{4x}{\sqrt{x^3+5x^2-2}}$; *б*) $y=\left(5^{tg\,2x}-ctg^2 2x\right)^2$;

в) $y=e^{arctg^2\sqrt{2x-1}}$; *г*) $y=\sqrt[7]{\frac{x^2+4}{x^3+12x}}$; *д*) $y=(\cos x+5)^{tgx}$.

106. *а*) $y=\frac{4x+1}{\sqrt{x^2-16x-2}}$; *б*) $y=\left(4^{tg\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)^6$;

в) $y=\arcsin\sqrt{1-4x^2}$; *г*) $y=\ln\sqrt[5]{\frac{3-x^2}{x^3-9x}}$; *д*) $y=(x+\sin 6x)^{x^2}$.

107. *а*) $y=\frac{2x-3}{\sqrt{x^2+4x-3}}$; *б*) $y=\left(3^{\arccos 2x}+\sqrt{1-4x^2}\right)^4$;

в) $y=\ln\sin\left(e^{x^2}\right)$; *г*) $y=\ln\sqrt[7]{\frac{4-3x^2}{x^3-4x}}$; *д*) $y=(tg\,2x)^{tg\,2x}$.

108. *а*) $y=\frac{3x-8}{\sqrt{x^2+3x-4}}$; *б*) $y=\left(6^{\cos^2 x}+\sin^2 x\right)^2$;

в) $y=e^{\arcsin\sqrt{1-x}}$; *г*) $y=\ln\left(x^2+\sqrt{1+x^4}\right)$; *д*) $y=\left(2x+x^2\right)^x$.

109. *а*) $y=\frac{2x^3+5}{\sqrt{x^4+2x}}$; *б*) $y=\left(8^{\cos 2x}+\cos^2 x\right)^4$;

в) $y=\ln\arcsin\frac{2}{\sqrt{x}}$; *г*) $y=\ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}+1}\right)$; *д*) $y=(x+1)^{arctg\sqrt{x}}$.

110. *а*) $y=\frac{x^3-10}{\sqrt{x^4-8x}}$; *б*) $y=\left(2^{\arcsin x}-\sqrt{1-x^2}\right)^{10}$;

в) $y=\ln tg\frac{1}{\sqrt{x}}$; *г*) $y=\sqrt{x}\cdot arctg\sqrt{x}$; *д*) $y=(x+\ln x)^{\frac{1}{x}}$.

111-120. Берилген функциялар үчүн $\frac{dy}{dx}$ жана $\frac{d^2y}{dx^2}$ ты тапкыла.

111. *а*) $y=x\sqrt{1+x^2}$; *б*) $\begin{cases} x=2t-t^2, \\ y=3t-t^3. \end{cases}$

112. *а*) $y=\frac{x}{x^2-1}$; *б*) $\begin{cases} x=3\cos t, \\ y=4\sin t. \end{cases}$

113. *а*) $y=x^2\cdot\ln x$; *б*) $\begin{cases} x=\cos t+t\sin t, \\ y=\sin t-t\cos t. \end{cases}$

114. *а*) $y=xe^{-x}$; *б*) $\begin{cases} x=2\cos^2 t, \\ y=4\sin^3 t. \end{cases}$

115. *а*) $y=\left(1+x^2\right)arctgx$; *б*) $\begin{cases} x=2t^3+t, \\ y=\ln t. \end{cases}$

116. *а*) $y=e^x\cos x$; *б*) $\begin{cases} x=3t-t^3, \\ y=3t^2. \end{cases}$

117. *а*) $y=e^{-x}\sin x$; *б*) $\begin{cases} x=2t-t^2, \\ y=4t^3. \end{cases}$

118. *а*) $y=xe^{-x^2}$; *б*) $\begin{cases} x=ctgt, \\ y=\frac{1}{\cos^2 t}. \end{cases}$

119. *а*) $y=e^{2x}\cos 3x$; *б*) $\begin{cases} x=t-\ln t, \\ y=3t^2-2t^3. \end{cases}$

120. *а*) $y = x^3 e^{-x^2}$; *б*) $\begin{cases} x = 2t - \sin 2t, \\ y = 8\sin^3 t. \end{cases}$

121-130. Лопиталдын эрежесин пайдаланып, пределдерди чыгаргыла.

121. *а*) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(tgx - \dfrac{1}{1 - \sin x} \right)$; *б*) $\lim\limits_{x \to 0} x^{\sin x}$

122. *а*) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x} \right)$; *б*) $\lim\limits_{x \to 0} (\arcsin x)^{\sin x}$

123. *а*) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{x}{ctgx} - \dfrac{\pi}{2\cos x} \right)$; *б*) $\lim\limits_{x \to 0} (ctgx)^{1/\ln x}$

124. *а*) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x} \right)$; *б*) $\lim\limits_{x \to \infty} x^{1/x}$

125. *а*) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - ctg^2 x \right)$; *б*) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (tgx)^{2x - \pi}$.

126. *а*) $\lim\limits_{x \to 0} \left(ctgx - \dfrac{1}{x} \right)$; *б*) $\lim\limits_{x \to 0} (\cos 2x)^{3/x}$.

127. *а*) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{x}{\ln x} \right)$; *б*) $\lim\limits_{x \to 0} (\sin x)^x$.

128. *а*) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x \sin x} - \dfrac{1}{x^2} \right)$; *б*) $\lim\limits_{x \to \infty} (\ln x)^{1/x}$.

129. *а*) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x}{arctg\, x} - \dfrac{1}{x} \right)$; *б*) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\ln x}$.

130. *а*) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1} \right)$; *б*) $\lim\limits_{x \to 0} (1 - 2x)^{1/x}$.

131-140. $f(x)$ функциясынын $[a;b]$ кесиндисиндеги эң чоң жана эң кичине маанилерин тапкыла.

131. $f(x)=2-\sin x, [0;\pi/2]$ **132.** $f(x)=x+2\cos x, [-\pi/4;\pi/3]$

133. $f(x)=e^{-x^2}+2x^2, [-1;1]$ **134.** $f(x)=2x^2-\sqrt{x}+1, [0;1]$

135. $f(x)=x-\frac{2}{x}-3\ln x, [1;4]$ **136.** $f(x)=xe^{-2x^2}, [0;1]$

$f(x)=x^3-3\ln x, [1/2;1]$

139. $f(x)=4arctg\,x-2x+1, [0;1]$ **140.** $f(x)=x^2e^{-x}, [-1;2]$

141-150. Функциянын экстремумун изилдөөгө маселелерди чыгаргыла:

141. Жогору жагы ачык максималдуу сыйымдуулуктагы цилиндр түрүндөгү идиш жасоо талап кылынат. Эгерде аны жасоо үчүн $S=84{,}82\ дм^2$ материал кетсе, $(S\approx 27\pi)$ идиштин өлчөмдөрү (радиусу R жана бийиктиги H) кандай болушу керек?

142. Негизи (түзүүчүсү) a = 3м болгон конус формасындагы (воронка) чуңкурду казуу талап кылынат. Кайсы тереңдикте воронканын көлөмү эң чоң болот?

143. Максималдуу сыйымдуулугу бар жабык цилиндр формасындагы бак жасоо талап кылынат. Эгерде аны даярдоо үчүн $S=18{,}84\ м^2$ материал кетсе $(S\approx 6\pi)$ бактын өлчөмдөрү (радиусу R жана бийиктиги H) кандай болушу керек?

144. Үстү ачык резервуар негизи төрт бурчтуу параллелепипеддин формасына ээ. Эгерде ага 256 литр суу бата турган болсо, анын өндүрүшүнө эң аз материал кетүүсү үчүн резервуардын өлчөмдөрү кандай болушу керек?

145. Көлөмү $V = 25\, м^2\ (V \approx 8\pi)$ болгон негизи тегерек жана вертикалдуу каптал бети бар цилиндр формасындагы чуңкур казуу талап кылынат. Анын түбүнүн жана каптал бетинин жасалгалоосуна эң аз өлчөмдөгү материал кетүүсү үчүн чуңкурдун сызыктуу өлчөмдөрү (радиусу R жана бийиктиги H) кандай болушу керек?

146. Радиусу $R = 2\sqrt{3}$ болгон тегерек жыгачтан негизи b жана бийиктиги h болгон тик бурчтуу устунду кесүү талап кылынат. Устундун бышыктыгы bh^2 ка пропорционалдуу. b жана h тын кандай маанилеринде устундун бышыктыгы эң чоң болот?

147. Көлөмү $V = 50\, м^3\ (V \approx 16\pi)$ болгон жабык цилиндр формасындагы резервуарды жасоо талап кылынат. Аны даярдоо үчүн эң аз көлөмдөгү материалды колдонуу үчүн, резервуардын өлчөмдөрү (радиусу R жана бийиктиги H) кандай болушу керек?

148. Берилген каптал бети $S = 43\, м^2$ болгон кадимки төрт бурчтуу пирамида түрүндөгү чатырды орнотуу талап кылынат. Чатырдын сыйымдуулугу эң чоң болушу үчүн анын өлчөмдөрү (негизинин жагы a жана бийиктиги H) кандай болушу керек?

149. Цистерна түз тегерек цилиндр формасына ээ, бир тарабы жарым шар менен аяктаган. Анын сыйымдуулугу $V = 41{,}89\ м^3$

$\left(V \approx \frac{40}{3}\pi\right)$. Цистерна эң кичине жалпы бетке ээ боло тургандай, цилиндрдин R радиусун тапкыла.

150. Сугат каналынын кесилиши тең капталдуу трапециянын формасына ээ, анын капталдары кичине негизине барабар. Каптал жагынын бурчтары кандай болгондо каналдын бөлүгү эң чоң аянтка ээ болот?

№3- ТЕКШЕРҮҮ ИШТИ ЧЫГАРУУ ҮЧҮН УСУЛДУК КӨРСӨТМӨЛӨР

Туунду жана анын колдонулушу

Мейли $y = f(x)$ функциясы $[a,b]$ интервалында аныкталсын. $x = x_0$ көз карандысыз өзгөрмөсүнө $[a,b]$ интервалынан чыгып кетпей тургандай Δx өсүндүсүн беребиз, демек өзгөрмөнүн жаңы мааниси да $[a,b]$ интервалына таандык. Анда $y = f(x)$ функциясынын мааниси $y + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$ деп өзгөрөт, башкача айтканда $\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ өсүндүсүн алабыз.

Аныктама: Функциянын өсүндүсүнүн аргументтин өсүндүсүнө болгон катышынын $\Delta x \to 0$ предели, $y = f(x)$ функциясынын $x = x_0$ чекитиндеги туундусу деп аталат , башкача айтканда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

$[a,b]$ интервалынын ар бир чекитинде туундуга ээ болуучу $y = f(x)$ функциясы бул интервалда дифференцирленүүчү деп аталат;

функциянын туундусун табуу операциясы дифференцирлөө деп аталат.

Туунду : $\frac{dy}{dx}$, y' *же* $f'(x_0)$ деп белгиленет.

Туундуну эсептөөнүн эрежелери

Туундуну эсептөөдө жардам берүүчү бир нече эрежелерге токтолуп кетели. $u=u(x)$, $v=v(x)$ жана $y=y(x)$ функциялары дифференцирленүүчү функциялар деп эсептейбиз.

1. Турактуу сандын туундусу 0 гө барабар, $C'=0$.
2. Функциянын суммасынын (айырмасынын) туундусу ушул функциялардын туундуларынын суммасына (айырмасына) барабар:
$$(u \pm v)' = u' \pm v'.$$
3. Эки функциянын көбөйтүндүсүнүн туундусу төмөндөгү эреже боюнча табылат: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.
4. Турактуу көбөйтүүчүнү туунду белгисинин сыртына чыгарууга болот:
$$(C \cdot u)' = C \cdot u'$$
5. Эки функциянын катышынын туундусу: $(\frac{u}{v})' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$,

   жекече учурда $(\frac{C}{v})' = -\frac{C \cdot v'}{v^2}$.

6. Татаал функциянын туундусу.

Мейли $y(x) = f(u(x))$ болсун. Анда $y'(x) = f'(u) \cdot u'(x)$.

Бул формуланы төмөндөгү мисалда колдонуп көрөлү.

$y=\sin^5(6x^4+x^2)^3$ функциясынын туундусун эсептегиле.

$u=\sin(6x^4+x^2)^3$ деп белгилейли. Анда $y=u^5$. Андан соң $w=(6x^4+x^2)^3$ десек , $u=\sin w.$ Эң акырында $v=6x^4+x^2$ десек, $w=v^3$ болот. Ушул белгилөөлөрдү пайдаланып дифференцирлөө процессин төмөндөгүчө көрсөтүүгө болот:

$$y' = (u^5)' = 5u^4 \cdot u', \qquad u' = (\sin w)' = (\cos w)\cdot w',$$
$$w' = (v^3)' = 3v^2 \cdot v', \qquad v' = 24x^3+2x.$$

Бардык туундулар x боюнча алынып жатканын белгилеп кетишибиз керек. Эми бардык алынган туундуларды чогултабыз:

$$\begin{aligned}
&y' = 5(\sin(6x^4+x^2)^3)^4 \cdot u' = 5\sin^4(6x^4+x^2)^3 \cdot (\cos w)\cdot w' = \\
&= 15\sin(6x^4+x^2)^3 \cdot \cos(6x^4+x^2)^3 \cdot v^2 \cdot v = \\
&= 15\sin(6x^4+x^2)^3 \cdot \cos(6x^4+x^2)^3 (6x^4+x^2)^2 (24x^3+2x).
\end{aligned}$$

Жогоруда көрсөтүлгөн процедура татаал функциянын туундусун жаңыдан гана үйрөнгөн учурда аябай пайдалуу экендигин белгилеп кетсек болот.

7. Тескери функциясынын туундусу

$y_x' = \dfrac{1}{x_y'}$, *эгерде* $y=f(x)$ *жана* $x=\varphi(y)$ *болсо.*

Туундунун таблицасы

$f(x)$		$f'(x)$	$f(x)$		$f'(x)$
1.	c	0	11.	$\cos u$	$-\sin u \cdot u'$

2.	x	1	12.	$\mathrm{tg}u$	$\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$
3.	u^n	$nu^{n-1}\cdot u'$	13.	$\mathrm{ctg}u$	$-\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$
4.	$\sqrt{u}$	$\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$	14.	$\arcsin u$	$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
5.	$\frac{1}{u}$	$-\frac{1}{u^2}\cdot u'$	15.	$\arccos u$	$-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
6.	a^u	$a^u\cdot\ln\alpha\cdot u'$	16.	$\mathrm{arctg}u$	$\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$
7.	e^u	$e^u\cdot u'$	17.	$\mathrm{arcctg}u$	$-\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$
8.	$\log_a u$	$\frac{1}{u\ln\alpha}\cdot u'$	18.	$\mathrm{sh}u$	$\mathrm{ch}u\cdot u'$
9.	$\ln u$	$\frac{1}{u}\cdot u'$	19.	$\mathrm{ch}u$	$\mathrm{sh}u\cdot u'$
10.	$\sin u$	$\cos u\cdot u'$			

Туундунун геометриялык мааниси:

$f'(x_0)=tg\alpha$, *мында* $tg\alpha$ $y=f(x)$ ийрисинин x_0 чекитинде жүргүзүлгөн жаныманын бурчтук коэффициентине барабар.

101-110. Берилген функциялардын $\frac{dy}{dx}$ туундуларын тапкыла.

1-мисал. $y=\frac{5x-2}{\sqrt{x^2+5x-1}}$

Чыгаруу: Бөлчөктөн туунду алуу эрежесинен пайдаланабыз.

$$y'=\frac{(5x-2)'\cdot\sqrt{x^2+5x-1}-(5x-2)(\sqrt{x^2+5x-1})'}{(\sqrt{x^2+5x-1})^2}=$$

$$=\frac{5\sqrt{x^2+5x-1}-(5x-2)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+5x-1}}\cdot(2x+5)}{x^2+5x-1}=$$

$$=\frac{10(x^2+5x-1)-(5x-2)(2x+5)}{2(x^2+5x-1)^{3/2}}=\frac{29x}{2(x^2+5x-1)^{3/2}}$$

2-мисал. $y=(2^{tg3x}-\frac{1}{\cos 3x})^5$

Чыгаруу:

$$y'=5(2^{tg3x}-\frac{1}{\cos 3x})^4\cdot(2^{tg3x}-\frac{1}{\cos 3x})'=5(2^{tg3x}-\frac{1}{\cos 3x})^4\times$$
$$\times(2^{tg3x}\cdot\ln 2\cdot(tg3x)'+\frac{1}{\cos^2 3x}\cdot(\cos 3x)')=5(2^{tg3x}-\frac{1}{\cos 3x})^4\times$$
$$\times(2^{tg3x}\cdot\ln 2\cdot\frac{3}{\cos^2 3x}-\frac{3\sin 3x}{\cos^2 3x})=\frac{15}{\cos^2 3x}(2^{tg3x}-\frac{1}{\cos 3x})^4\times$$
$$\times(2^{tg3x}\cdot\ln 2-\sin 3x).$$

3- мисал. $y=e^{arctg\sqrt{x^2-1}}$

Чыгаруу:

$$y'=e^{arctg\sqrt{x^2-1}}\cdot(arctg\sqrt{x^2-1})'=e^{arctg\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{1}{1+(\sqrt{x^2-1})^2}\cdot\left(\sqrt{x^2-1}\right)'=$$

$$=e^{arctg\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{1}{1+x^2-1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot 2x=e^{arctg\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

4- мисал. $y=\ln\sqrt[4]{\frac{5+4x}{x^2+8x-10}}$

Чыгаруу. Логарифманын касиеттеринен пайдаланып, функцияны жөнөкөйлөтөбүз:

$$y=\frac{1}{4}\ln(\frac{5+4x}{x^2+8x-10})=\frac{1}{4}\ln(5+4x)-\frac{1}{4}\ln(x^2+8x-10)$$

Эми дифференцирлейбиз.

$$y'=(\frac{1}{4}\ln(5+4x)-\frac{1}{4}\ln(x^2+8x-10))'=\frac{1}{4}\cdot\frac{(5+4x)'}{5+4x}-\frac{1}{4}\cdot\frac{(x^2+8x-10)'}{x^2+8x-10}=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{4}{5+4x}-\frac{2x+8}{x^2+8x-10}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{4x^2+32x-40-10x-8x^2-40-32x}{(4x+5)(x^2+8x-10)}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{-4x^2-10x-80}{(4x+5)(x^2+8x-10)}=-\frac{x^2+2{,}5x+20}{(4x+5)(x^2+8x-10)}.$$

5-мисал. $y=(\arcsin\sqrt{x})^{2\sqrt{x}}$

Чыгаруу. Берилген функцияны логарифмалайбыз.

$$\ln y=\ln(\arcsin\sqrt{x})^{2\sqrt{x}},\quad \ln y=2\sqrt{x}\cdot\ln(\arcsin\sqrt{x})$$

Алынган барабардыктын эки жагын тең дифференцирлейбиз:

$$(\ln y)'=(2\sqrt{x}\cdot\ln(\arcsin\sqrt{x}))' \quad\Rightarrow\quad \frac{y'}{y}=(2\sqrt{x})'\cdot\ln(\arcsin\sqrt{x})+$$

$$+2\sqrt{x}\cdot(\ln\arcsin\sqrt{x})'=\frac{\ln(\arcsin\sqrt{x})}{\sqrt{x}}+2\sqrt{x}\cdot\frac{1}{(\arcsin\sqrt{x})}\cdot(\arcsin\sqrt{x})'=$$

$$=\frac{\ln(\arcsin\sqrt{x})}{\sqrt{x}}+2\sqrt{x}\cdot\frac{1}{(\arcsin\sqrt{x})}\times\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{\ln(\arcsin\sqrt{x})}{\sqrt{x}}+\frac{1}{(\arcsin\sqrt{x})\sqrt{1-x}}.$$

Мындан төмөндөгү келип чыгат:

$$y' = y\cdot\left(\frac{\ln(\arcsin\sqrt{x})}{\sqrt{x}} + \frac{1}{(\arcsin\sqrt{x})\sqrt{1-x}}\right) =$$

$$= (\arcsin\sqrt{x})^{2\sqrt{x}}\cdot\left(\frac{\ln(\arcsin\sqrt{x})}{\sqrt{x}} + \frac{1}{(\arcsin\sqrt{x})\sqrt{1-x}}\right)$$

111-120. Берилген функциялар үчүн $\frac{dy}{dx}$ жана $\frac{d^2y}{dx^2}$ ты тапкыла.

1-мисал. $y = x^3\sin 3x$

Чыгаруу.

$$\frac{dy}{dx} = y' = (x^3\sin 3x)' = (x^3)'\sin 3x + x^3\cdot(\sin 3x)' = 3x^2\sin 3x + 3x^3\cos 3x;$$

$$\frac{d^2y}{d^2x} = y'' = (3x^2\sin 3x + 3x^3\cos 3x)' = 6x\sin 3x + 9x^2\cos 3x + 9x^2\cos 3x -$$

$$-9x^3\sin 3x = 3x((2-3x^2)\sin 3x + 6x\cos 3x).$$

2-мисал. $\begin{cases} x = 2t - \sin 2t \\ y = 8\sin^3 t \end{cases}$

Чыгаруу.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{(8\sin^3 t)'}{(2t - \sin 3t)'} = \frac{24\sin^2 t\cos t}{2 - 2\cos 2t} = \frac{24\sin^2 t\cos t}{2\cdot 2\sin^2 t} = 6\cos t;$$

$$\frac{d^2y}{d^2x} = \frac{(\frac{dy}{dx})'_t}{x'(t)} = \frac{(6\cos t)'}{(2t - \sin t)'} = \frac{-6\sin t}{4\sin^2 t} = -\frac{3}{2\sin t}.$$

Лопиталдын эрежеси

Мейли $f(x)$ жана $g(x)$ функциялары x_0 чекитинин чеке белинде үзгүлтүксүз жана дифференцирленүүчү болушсун жана ушул чекиттеги мааниси нөлгө барабар болсун: $f(x_0)=g(x_0)=0$. x_0 чекитинин чеке белинде $g'(x)\neq 0$ болсун.

Эгерде $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$ *предели жашаса , анда* $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$ *болот.*

Лопиталдын эрежеси $\frac{0}{0}$ жана $\frac{\infty}{\infty}$ түрүндөгү аныксыздыктарды ачуу үчүн колдонулат. Бул эки аныксыздык негизги аныксыздыктар деп аталат.

Ал эми $0\cdot\infty, \infty-\infty, 1^{\infty}, \infty^{0}, 0^{0}$ түрүндөгү аныксыздыктар теӊ күчтүү өзгөртүп түзүүлөрдүн жардамында негизги эки аныксыздыкка алып келинет.

121-130. Лопиталдын эрежесин пайдаланып , пределдерди эсептегиле .

Чыгаруу.

а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{tg^{2}2x}$. $x\to\frac{\pi}{2}$ $\frac{0}{0}$ түрүндөгү аныксыздыкты алабыз.

Лопиталдын эрежесин колдонобуз:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{tg^2 2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin x)'}{(tg^2 2x)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{2tg2x\cdot\frac{2}{\cos^2 2x}}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos^3 2x\cos x}{4\sin 2x}=-\frac{1}{4}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 2x\cos x}{2\sin x\cos x}=$$

$$=-\frac{1}{8}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 2x}{\sin x}=-\frac{1}{8}\cdot\frac{-1}{1}=\frac{1}{8}.$$

б) $\lim\limits_{x\to 0} x^{3/(4+\ln x)}$ 0^0 түрүндөгү анықсыздык .

$y=x^{3/(4+\ln x)}$ белгилөөсүн киргизебиз. Анда

$$\ln y=\ln x^{3/(4+\ln x)}=\frac{3\ln x}{4+\ln x},$$

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{3\ln x}{4+\ln x}=(\frac{\infty}{\infty})=\lim_{x\to 0}\frac{(3\ln x)'}{(4+\ln x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{1}=3.$$

$\ln\lim\limits_{x\to 0} x^{3/(4+\ln x)}=3$ болгондуктан, $\lim\limits_{x\to 0} x^{3/(4+\ln x)}=e^3.$

131-140. $f(x)=2\sin x+\cos 2x$ функциясынын $[0;\pi/2]$ кесиндисиндеги эң чоң жана эң кичине маанилерин тапкыла.

Чыгаруу.

$f'(x)=0$ шартынан функциянын сыналуучу чекиттерин табабыз.

$f'(x)=2\cos x-2\sin 2x=0.$ Алынган теңдемени чыгарабыз:

$$2\cos x - 4\sin x\cos x = 0 \;\Rightarrow\; 2\cos x(1-2\sin x) = 0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad 2\cos x = 0 \quad \text{же} \quad 2\sin x = 1$$
$$\cos x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\; n\in Z.$$
$$\sin x = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\; n\in Z.$$

Табылган бардык сыналуучу чекиттерден $x=\frac{\pi}{6}$ жана $x=\frac{\pi}{2}$ чекиттери гана $[0;\pi/2]$ кесиндисине таандык. Берилген функциянын ушул чекиттердеги жана аралыктын учтарындагы маанилерин эсептейбиз.

$$x=0, \qquad f(0)=1$$

$$x=\frac{\pi}{6}, \qquad f(\frac{\pi}{6}) = 2\sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{3} = 1 + \frac{1}{2} = 1{,}5$$

$$x=\frac{\pi}{2}, \qquad f(\frac{\pi}{2}) = 2\sin\frac{\pi}{2} + \cos\pi = 2-1 = 1$$

Демек, $f_{\text{эн чон}} = f(\frac{\pi}{6}) = 1{,}5;$

$f_{\text{эн кичине}} = f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = 1.$

141-150. Функциянын экстремумун изилдөөгө маселени чыгаргыла:

Берилген сыйымдуулугу $V = 14{,}14\text{м}^3$ $(V \approx \frac{9}{2}\pi)$ туура тегерек конус формасына ээ болгон зыгыр буласынан чатыр жасоо талап кылынат. Чатыр жасоо үчүн эң аз өлчөмдөгү була кетиши үчүн конустун өлчөмдөрү кандай болушу керек (бийиктиги H жана негизинин радиусу R)

Чыгаруу. Конустун көлөмү $V=\frac{1}{3}\pi R^2 H$, конустун каптал бети $S=\pi Rl$, мында l конустун түзүүчүсү. $l=\sqrt{H^2+R^2}$.

Ошентип, $S=\pi R\sqrt{H^2+R^2}$ функциясынын эң кичине маанисин табуу керек . Маселенин шарты боюнча:

$$\frac{1}{3}\pi R^2 H=\frac{9}{2}\pi \ \Rightarrow\ H=\frac{27}{2R^2}.\ \textit{Демек,}\ \ S(R)=\pi R\sqrt{R^2+\frac{27^2}{4R^4}}=\pi\frac{\sqrt{4R^6+729}}{2R}.$$

Алынган функцияны экстремумга изилдейбиз.

$$S'(R)=\pi\left(\frac{\sqrt{4R^6+729}}{2R}\right)'=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\frac{24R^5}{2\sqrt{4R^6+729}}\cdot R-\sqrt{4R^6+729}}{R^2}=$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{12R^6-4R^6-729}{R^2\sqrt{4R^6+729}}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{8R^6-729}{R^2\sqrt{4R^6+729}}.$$

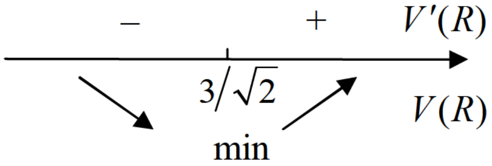
Функциянын сыналуучу чекиттерин табабыз.

$$S'(R)=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\pi}{2}\cdot\frac{8R^6-729}{R^2\sqrt{4R^6+729}}=0 \quad\Rightarrow\quad 8R^6-729=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ R^6=\frac{729}{8}=\left(\frac{9}{2}\right)^3 \quad\Rightarrow\quad R=\sqrt{\frac{9}{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}\approx 2{,}1.$$

(Маселенин шарты боюнча $R\neq 0$)

$$H=\frac{27}{2R^2}=\frac{27\cdot 2}{2\cdot 9}=3\text{м}$$



Демек, чатырга эң аз була кетиши үчүн чатырдын бийиктигин H=3м , ал эми негизинин радиусу R=2,1м болушу керек.

№4- ТЕКШЕРҮҮ ИШ

Дифференциалдык эсептөөнүн колдонулушу

151-170. Дифференциалдык эсептөөнүн усулдарын пайдаланып функцияны изилдегиле жана графигин тургузгула.

151. $y=\frac{x^3+4}{x^2}$ **152.** $y=\frac{4-x^3}{x^2}$ **153.** $y=\frac{2x^3+1}{x^2}$

154. $y=\frac{12-3x^2}{x^2-12}$ **155.** $y=\frac{3x^4+1}{x^3}$ **156.** $y=\frac{x^2-x+1}{x-1}$

157. $y=\frac{x^2-3x+3}{x-1}$ **158.** $y=\frac{x^2-4x+1}{x-4}$ **159.** $y=\frac{x^3-32}{x^2}$

160. $y=\frac{1-2x^3}{x^2}$ **161.** $y=e^{2x-x^2}$ **162.** $y=\sqrt[3]{x(x-3)^2}$

163. $y=(3-x)e^{x-2}$ **164.** $y=(x-2)e^{3-x}$ **165.** $y=(x-1)e^{3x+1}$

166. $y=\frac{e^{2-x}}{2-x}$ **167.** $y=-\frac{e^{-(x+2)}}{x+2}$ **168.** $y=\frac{e^{x/2}}{x}$

169. $y=\sqrt[3]{x(x+2)}$ **170.** $y=\sqrt[3]{(x-1)x^2}$.

171-180. $y=f(x)$ ийрисине $M_0\left(x_{0,}y_0\right)$ чекитинде жүргүзүлгөн жанымасынын жана нормалдын теңдемелерин жазгыла.

171. $y=(x-2)e^x, \quad M_0(0;-2)$ **172.** $y=\left(x^2+4\right)e^x, \quad M_0(0;4)$

173. $y=\frac{1}{x^2-4}, \quad M_0(1;-1/3)$ **174.** $y=\frac{x-5}{x^2-1}, \quad M_0(0;5)$

175. $y=(x-5)\sqrt{x}, \quad M_0(1;-4)$ **176.** $y=(x+1)\sqrt{x}, \quad M_0(1;2)$

177. $y=\frac{x^2+1}{x^2+9}, \quad M_0(0;1/9)$ **178.** $y=\frac{\ln x}{x^2+1}, \quad M_0(1;0)$

179. $y=\left(x^2-x\right)2^x, \quad M_0(0;0)$ **180.** $y=\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}, \quad M_0(4;-3)$

181-190. Дифференциалдын жардамында жакындаштырып эсептегиле.

181. $\sqrt{1+(0{,}08)^2}$ **182.** $\sqrt{17}$ **183.** $\arcsin 0{,}49$

184. $\cos 63°$ **185.** $tg\,46°$ **186.** $\sqrt{3+(7{,}05)^2-6\cdot 7{,}05-5}$

187. $arctg 0{,}98$ **188.** $\arccos 0{,}52$ **189.** $\sin 32°$

190. $\sqrt{5\cdot(5{,}08)^2+4\cdot 5{,}08-1}.$

№4- ТЕКШЕРҮҮ ИШТИ ЧЫГАРУУ ҮЧҮН УСУЛДУК КӨРСӨТМӨЛӨР

151-170. Дифференциалдык эсептөөнүн усулдарын пайдаланып функцияны изилдегиле жана графигин тургузгула.

Функцияны толук изилдөө жана графигин тургузуу үчүн төмөндөгүдөй схема колдонулат:

1. Функциянын аныкталуу областын табуу;
2. Функциянын үзүлүш чекиттерин, координата октору менен болгон кесилиш чекиттерин жана вертикалдык асимптоталарын(эгер жашаса) табуу;
3. Функцияны жуптукка,тактыкка жана мезгилдүүлүккө изилдөө;
4. Функциянын монотондуу аралыктарын жана экстремум чекиттерин табуу;
5. Функциянын иймектик жана томпоктук аралыктарын жана иймейүү чекиттерин табуу;
6. Функциянын графигинин асимптоталарын табуу;
7. Керектүү болгон кошумча эсептөөлөрдү жүргүзүү;
8. Функциянын графигин тургузуу.

1-мисал. $y = \frac{(x+3)^2}{x-4}$

Чыгаруу. Жогорудагы схеманы пайдаланабыз.

1. Функциянын аныкталуу областы $(-\infty;4)$ *жана* $(4;+\infty)$

2. Графиктин ордината чекити

$y > 0$ *эгерде* $x > 4$, $y < 0$ *эгерде* $x < 4$ *болсо.*

3. Берилген функциянын координата октору менен болгон

кесилиш чекиттери . $\left(0;-\frac{9}{4}\right)$ *жана* $(-3{,}0)$

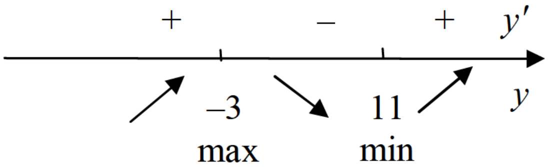
4. $x=4$ вертикалдык асимптота,себеби:

$$\lim_{x\to 4-0}\frac{(x+3)^2}{(x-4)}=-\infty; \qquad \lim_{x\to 4+0}\frac{(x+3)^2}{(x-4)}=+\infty$$

5. Функцияны өсүүгө, кемүүгө жана экстремумга изилдейбиз.

$$y'=\frac{2(x+3)(x-4)-(x+3)^2}{(x-4)^2}=\frac{x^2-8x-33}{(x-4)^2},$$

$$y'=0 \quad \Rightarrow x^2-8x-33=0, \quad \Rightarrow x_1=11, \quad x_2=-3$$



$(-\infty;-3)$ интервалында $y'>0,$ демек бул аралыкта функция өсөт.

$(-3;4)$ интервалында $y'<0,$ демек функция кемийт.

Демек, функция $x=-3$ чекитинде максимумга ээ болот: $y_{\max}(-3)=0.$

$(4,11)$ интервалында $y'<0,$ демек бул аралыкта функция кемийт.

$(11,+\infty)$ интервалында $y'>0,$ демек бул аралыкта функция өсөт.

Демек, $x=11$ чекитинде функция минимумга ээ болот: $y_{\min}(11)=28.$

6. Функцияны иймектикке, томпоктукка изилдейбиз жана иймейүү чекиттерин аныктайбыз.

$$y''=\frac{(2x-8)(x-4)^2-\left(x^2-8x-33\right)\cdot 2(x-4)}{(x-4)^4}=\frac{98}{(x-4)^3}.$$

$(-\infty;4)$ интервалында $y''<0,$ демек функция бул аралыкта томпок.

$(4;+\infty)$ интервалында $y'' > 0$, демек функция бул аралыкта иймек.

$x = 4$ чекитинде функция аныкталбагандыктан, иймейүү чекити жок.

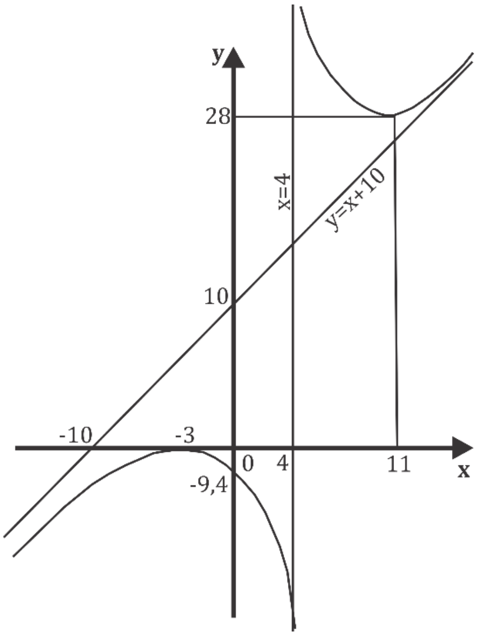
7. $y = kx + b$ жантык асимптотасын табабыз:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x+3)^2}{(x-4)} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} (\frac{(x+3)^2}{x-4} - x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{10x-9}{x-4} = 10$$

Ошентип, жалгыз гана $y = x + 10$ деген жантык асимптота жашайт.

8.Функциянын графигин тургузабыз



2-мисал. $y = x \cdot e^{-x^2/2}$

Чыгаруу. Функцияны изилдөөнүн жалпы схемасынан пайдаланабыз.

1. Функциянын аныкталуу областы $(-\infty;+\infty)$

2. x = 0 болгондо y = 0, демек функциянын графиги координата башталышы аркылуу өтөт

3. Функция $(0;+\infty)$ интервалында он маанилерди жана $(-\infty;0)$ интервалында терс маанилерди кабыл алат.

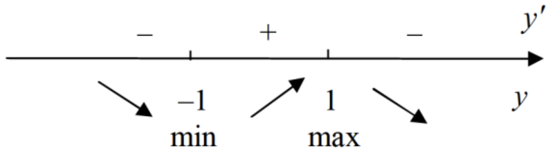
4. Вертикалдык асимптоталары жок.

5. $y(-x) = -x\,e^{-x^2/2} = -y(x)$ болгондуктан, функция так жана анын графиги координата башталышына карата симметриялуу

6. Функцияны монотондуулукка жана экстремумга изилдейбиз:

$$y' = \left(\frac{x}{e^{x^2/2}}\right)' = \frac{e^{x^2/2} - x\cdot xe^{x^2/2}}{e^{x^2}} = \frac{e^{x^2/2}(1-x^2)}{e^{x^2}} = \frac{1-x^2}{e^{x^2/2}}$$

Эгерде $y' = 0 \;\Rightarrow\; 1 - x^2 = 0 \Rightarrow\; x_1 = -1,\;\; x_2 = 1,$ болот



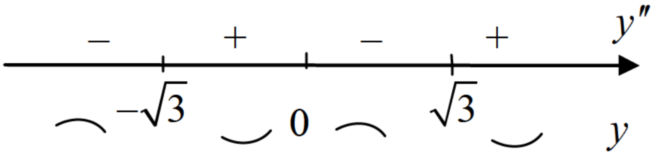
$$y_{\min}(-1) = -\frac{1}{e^{1/2}} \approx -0{,}6, \qquad y_{\max}(1) = \frac{1}{e^{1/2}} \approx 0{,}6$$

7. Экинчи туунду менен байланышкан функциянын касиеттерин изилдейбиз:

$$y'' = \left(\frac{1-x^2}{e^{x^2/2}}\right)' = \frac{-2xe^{-x^2/2} - (1-x^2)\cdot xe^{x^2/2}}{e^{x^2}} =$$

$$= \frac{xe^{x^2/2}(-2-1+x^2)}{e^{x^2}} = \frac{x(x^2-3)}{e^{x^2/2}}$$

$$y'' = 0 \;\Rightarrow\; x(x^2-3) = 0 \;\Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = -\sqrt{3}, \quad x_3 = -\sqrt{3}$$



$x=\pm\sqrt{3},\ x=0$ чекиттеринде y'' белгисин өзгөрткөндүктөн, ушул чекиттерде функциянын графигинде иймейүү чекиттерин алабыз:

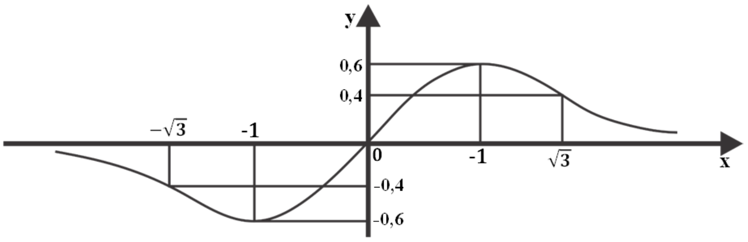
$$y(\pm\sqrt{3})=\pm\frac{\sqrt{3}}{e^{3/2}}\approx\pm0{,}4, \qquad y(0)=0.$$

8. $y=kx+b$ жантык асимптотасын табабыз.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{e^{x^2/2}}=0,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{e^{x^2/2}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{xe^{x^2/2}}=0.$$

$y=0$ горизонталдык асмптомасына ээ болобуз.



3-мисал. $y=\sqrt[3]{x^2(x+3)}.$

Чыгаруу.

1. Берилген функция бардык $x\in R$ үчүн аныкталган.
2. Функциянын үзүлүш чекити жок.

Ox огун $x=-3$ жана $x=0$ чекиттеринде, Oy огун $y=0$ чекитинде кесип өтөт.

3. Функция жуп да, так да, мезгилдүү да эмес.

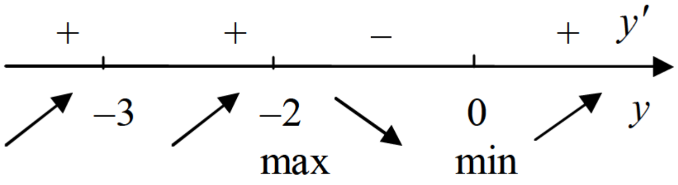
4. Функциянын туундусун табабыз

$$f'(x)=\left((x^3+3x^2)^{1/3}\right)'=\frac{1}{3}(x^3+3x^2)^{-2/3}\cdot(3x^2+6x)=\frac{x+2}{\sqrt[3]{x(x+3)^2}}$$

$$f'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad x+2=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=-2.$$

$x_2=-3,$ $x_3=0$ чекиттеринде туунду жашабайт. Бул чекиттер функциянын аныкталуу областын төмөндөгүдөй интервалдарга ажыратат:

$$(-\infty;-3);\ (-3;-2);\ (-2;0);\ (0;+\infty).$$



$y_{\max}(-2)=\sqrt[3]{4},$ $\qquad y_{\min}(0)=0.$

$x_2=-3$ чекитинде функция экстремумга ээ эмес, себеби бул чекиттин чеке белинде $f'(x)$ белгисин өзгөртпөйт.

5. Функциянын экинчи туундусун табабыз.

$$f''(x)=\left(\frac{x+2}{\sqrt[3]{x(x+3)^2}}\right)'=\frac{2}{\sqrt[3]{x^4(x+3)^5}}$$

Каалагандай x үчүн $f''(x) \neq 0$. Ошондуктан, иймейүү чекиттери катары экинчи туунду жашабаган чекиттер эсептелиши мүмкүн, башкача айтканда $x_2 = -3$, $x_3 = 0$. Экинчи туундунун белгисин аныктайбыз:

$x \in (-\infty; -3)$ $f''(x) > 0$ - ийри иймек;

$x \in (-3; 0) \bigcup (0; +\infty)$ $f''(x) < 0$ - ийри томпок.

$x_2 = -3$ чекитинин чеке белинде экинчи туунду белгисин өзгөрткөндүктөн, $M(-3; 0)$ - иймейүү чекити болуп эсептелет.

$x_3 = 0$ чекитинде иймейүү жок, себеби бул чекиттин чеке белинде экинчи туунду белгисин өзгөртпөйт.

6. Вертикалдык асимптотасы жок, себеби берилген функция чексиз үзүлүштөргө ээ эмес.

$y = kx + b$ жантык асимптотасын табабыз:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2(x+3)}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[3]{1 + \frac{3}{x}} = 1,$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} (\sqrt[3]{x^2(x+3)} - x) =$$

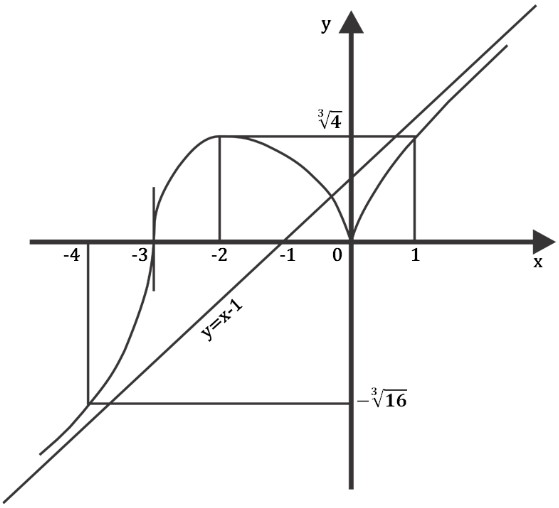
$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2(x+3) - x^3}{\sqrt[3]{x^4(x+3)^2} + x\sqrt[3]{x^2(x+3)} + x^2} =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^2}{\sqrt[3]{x^4(x+3)^2} + x\sqrt[3]{x^2(x+3)} + x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3}{\sqrt[3]{1 + \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2}} + \sqrt[3]{1 + \frac{3}{x}} + 1} = 1.$$

$y = x + 1$ деген жантык асимптотаны алдык.

7. Функциянын графигин тургузуудан мурда $x_2 = -3$ жана $x_3 = 0$ чекиттеринде абсцисса огун кесип өткөн α бурчун аныкташыбыз керек. Бул чекиттерде $y' = tg\alpha = \infty$ жана $\alpha = \frac{\pi}{2}$. $x_3 = 0$ чекитинде функция нөлдүк минимумга жеткендиктен, бул чекиттин чеке белинде анын графиги Ox огунан төмөнгө түшпөйт. $x_3 = 0$ чекитинде функциянын графиги кайра артка кайтат.

8. Изилдөөлөрдүн негизинде функциянын графигин тургузабыз.



171-180. $y = 4x - 3\sqrt[3]{x^2}$ ийрисине $M_0(1;1)$ чекити аркылуу жүргүзүлгөн жаныманын жана нормалдын теңдемесин жазгыла.

Чыгаруу.

$y = f(x)$ функциясына x_0 чекитинде жүргүзүлгөн жаныманын теңдемеси $y = f\left(x_0\right) + f'\left(x_0\right) \cdot \left(x - x_0\right)$

$y=f(x)$ функциясына x_0 чекитинде жүргүзүлгөн нормалдын

теңдемеси $y=f\left(x_0\right)-\dfrac{1}{f'\left(x_0\right)}\left(x-x_0\right)..$

Эгерде $f'\left(x_0\right)=0$ болсо, анда нормалдын тендемеси $x=x_0$ болот .

Биздин учурда $f(x)=4x-3\sqrt[3]{x^2}$ жана $f\left(x_0\right)=y_0=1.$

$$f'(x)=\left(4x-3\sqrt[3]{x^2}\right)'=4-3\cdot\frac{2}{3}x^{-1/3}=4-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\ . \qquad f'\left(x_0\right)=4-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\bigg|_{x=1}=2.$$

Жаныманын теңдемесине коюп төмөнкүнү алабыз:

$$y=1+2(x-1)\quad\Rightarrow\quad y=2x-1\quad \textit{же}\quad 2x-y-1=0$$

$y=f(x)$ функциясынын жана анын $x_0=1$ чекитиндеги туундусунун маанилерин нормалдын теңдемесине коюп, төмөнкүнү алабыз.

$$y=1-\frac{1}{2}(x-1)\quad\Rightarrow\quad y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\quad \textit{же}\quad x+2y-3=0.$$

Функциянын дифференциалы

Мейли $y=f(x)$ функциясы x чекитинде нөлдөн айырмалуу туундуга ээ болсун.

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)\neq 0.$ *Анда* $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha$ деп жазууга болот, мында $\Delta x\to 0,\ \alpha\to 0,$ *же* $\Delta y=f'(x)\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x.$

Ошентип, Δy өсүндүсү $f'(x)\cdot\Delta x$ *жана* $\alpha\cdot\Delta x$ эки кошулуучулардын суммасынан турат, ал кошулуучулар $\Delta x \to 0$ да чексиз кичине чоңдуктар болуп эсептелишет.

$f'(x)\cdot\Delta x$ биринчи кошулуучу Δy функциясынын өсүндүсүнүн негизги бөлүгү деп аталат.

Аныктама: $y = f(x)$ функциясынын x чекитиндеги дифференциалы деп функциянын туундусунун аргументтин өсүндүсүнүн көбөйтүндүсүнө барабар болгон өсүндүсүнүн негизги бөлүгү аталат жана $dy = f'(x)\cdot\Delta x$ деп белгиленет.

$x' = 1$ болгондуктан $dx = \Delta x,$ башкача айтканда көз карандысыз өзгөрмөнүн дифференциалы бул өзгөрмөнүн өсүндүсүнө барабар. Ошондуктан, $dy = f'(x)\cdot dx.$

Δy функциясынын өсүндүсүндөгү $\alpha\cdot\Delta x$ чексиз кичине чоңдугун таштап жиберип $\Delta y \approx dy$ жакындаштырылган барабардыгын алабыз. Жакындаштырылган барабардыкты төмөндөгүдөй көрүнүштө жазууга болот:

$$f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\cdot\Delta x \qquad же \qquad f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\cdot\Delta x..$$

Алынган формула функциялардын жакындаштырылган маанилерин табууга колдонулат.

181-190. Дифференциалдын жардамында жакындаштырып эсептегиле.

$a)\ \sqrt[3]{84}$ $\qquad$ $б)\ arctg\,0{,}98$

1-мисал. $\sqrt[3]{84}$.

Чыгаруу. $\sqrt[3]{84}=\sqrt[3]{64+20}$ көрүнүшүндө жазабыз жана $y=\sqrt[3]{x}$ функциясын кийиребиз, мында $x=x_0+\Delta x$ *демек* $x_0=64;\quad \Delta x=20$

Формуланы пайдаланабыз:

$$y\left(x_0+\Delta x\right)\approx y\left(x_0\right)+y'\left(x_0\right)\cdot\Delta x$$

$$y\left(x_0\right)=\sqrt[3]{64}=4,$$

$$y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}},\qquad y'(64)=\frac{1}{3\cdot 16}=\frac{1}{48}$$

Эсептейбиз: $\sqrt[3]{84}\approx 4+\frac{20}{48}=4{,}42$

2-мисал. $arctg0{,}98$

Чыгаруу. $y=arctgx,\qquad x_0=1,\qquad \Delta x=-0{,}02,$

$$y\left(x_0\right)=arctg1=\frac{\pi}{4},\qquad y'=\frac{1}{1+x^2},\qquad y'(1)=0{,}5$$

$$arctg\,0{,}98\approx\frac{\pi}{4}-0{,}5\cdot 0{,}02=0{,}77.$$

№5- ТЕКШЕРҮҮ ИШ

Анык эмес жана анык интегралдар

191-200. Анык эмес интегралдарды эсептегиле.

191.

$a)\ \int \frac{\sqrt[3]{\ln^2(x-1)}}{x-1}dx;$ $\qquad$ $б)\ \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}dx;$

$в)\ \int \frac{x^3+6x^2+10x+12}{(x-2)(x+2)^3}dx;$ $\qquad$ $г)\ \int tg^3 4x dx.$

192.

$a)\ \int \frac{\cos 2x}{\sin^3 2x}dx;$ $\qquad$ $б)\ \int \sqrt{x}\ln^2 x dx;$

$в)\ \int \frac{x^2-6x+8}{x^3+8}dx;$ $\qquad$ $г)\ \int \sin^4 x dx.$

193.

$a)\ \int \frac{\sqrt{ctg\, 7x}}{\sin^2 7x}dx;$ $\qquad$ $б)\ \int \frac{\arccos\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx;$

$в)\ \int \frac{2x^3+6x^2+5x}{(x+2)(x+1)^3}dx;$ $\qquad$ $г)\ \int \frac{dx}{5-4\sin x+2\cos x}.$

194.

$a)\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin^3 x}dx;$ $\qquad$ $б)\ \int \left(x^2+4\right)e^{2x}dx;$

$в)\ \int \frac{12-6x}{(x+1)\left(x^2-4x+13\right)}dx;$ $\qquad$ $г)\ \int \cos^4 x\, dx.$

195.

$a)\ \int e^{2x^3-1}x^2 dx;$ $\qquad$ $б)\ \int x arctg\, 2x\, dx;$

$в)\ \int \frac{x^3-6x^2+13x-8}{x(x-2)^3}dx;$ $\qquad$ $г)\ \int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[4]{\sin^5 x}}dx.$

196.

а) $\int e^{3\cos x+2}\sin x dx;$ *б)* $\int \ln(2x-1)dx;$

в) $\int \frac{x^2+3x-6}{(x+1)\left(x^2+6x+13\right)}dx;$ *г)* $\int \frac{dx}{3\sin x+4\cos x}.$

197.

а) $\int \frac{2x+1}{5x^2+2}dx;$ *б)* $\int x\sin^2 x dx;$

в) $\int \frac{x^3+6x^2+14x+10}{(x+1)(x+2)^3}dx;$ *г)* $\int \cos^4 x\sin^2 x\, dx.$

198.

а) $\int \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+9}}dx;$ *б)* $\int x^2\cos^2 x dx;$

в) $\int \frac{x^2+3x+2}{x^3-1}dx;$ *г)* $\int \sqrt[5]{\sin^4 x}\cos^3 x dx.$

199.

а) $\int \frac{3x+4}{\sqrt{4-x^2}}dx;$ *б)* $\int xtg^2 x dx;$

в) $\int \frac{x^3+6x^2+13x+8}{x(x+2)^3}dx;$ *г)* $\int \frac{2tgx+3}{\sin^2 x+2\cos^2 x}dx.$

200.

а) $\int \frac{(arctg\, x)^2+1}{1+x^2}dx;$ *б)* $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx;$

в) $\int \frac{3x+13}{(x-1)\left(x^2+2x+5\right)}dx;$ *г)* $\int \frac{dx}{5+2\sin x+3\cos x}.$

201-210. Анык интегралдарды үтүрдөн кийин эки белгиге чейинки тактыкта эсептегиле.

201. *а)* $\int\limits_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}dx;$ *б)* $\int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx.$

202. *а*) $\int\limits_{\sqrt{2}}^{1} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx;$ *б*) $\int\limits_{2}^{5} \frac{x^2dx}{(x-1)\sqrt{x-1}}.$

203. *а*) $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{4-x^2}\,dx;$ *б*) $\int\limits_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{dx}{e^x-1}.$

204. *а*) $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{x^3+1}{x^2\sqrt{4-x^2}}dx;$ *б*) $\int\limits_{0}^{4} \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}.$

205. *а*) $\int\limits_{1}^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2-x^2}}{x^4}dx;$ *б*) $\int\limits_{0}^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx.$

206. *а*) $\int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} \frac{dx}{x^2\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}};$ *б*) $\int\limits_{3}^{8} \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}.$

207. *а*) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\left(x^2+3\right)^{3/2}}dx;$ *б*) $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x-e^{-x}}.$

208. *а*) $\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}};$ *б*) $\int\limits_{0}^{13} \frac{x+1}{\sqrt[3]{2x+1}}dx.$

209. *а*) $\int\limits_{2}^{4} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx;$ *б*) $\int\limits_{\ln 3}^{0} \frac{1-e^x}{1+e^x}dx.$

210. *а*) $\int\limits_{0}^{3} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+9}}dx;$ *б*) $\int\limits_{3}^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}dx.$

211-220. Өздүк эмес интегралдарды эсептегиле же алардын таралуучулугун далилдегиле:

211. *а*) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^2+4x+5}$; *б*) $\int\limits_{0}^{1}\frac{2xdx}{\sqrt{1-x^4}}$.

212. *а*) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{2x^2-2x+1}$; *б*) $\int\limits_{0}^{1}\frac{xdx}{1-x^4}$.

213. *а*) $\int\limits_{4}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+1}}$; *б*) $\int\limits_{0}^{2/3}\frac{\sqrt[3]{\ln(2-3x)}}{2-3x}dx$.

214. *а*) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt[4]{\left(16+x^2\right)^5}}$; *б*) $\int\limits_{1/2}^{1}\frac{\ln 2dx}{(1-x)\ln^2(1-x)}$.

215. *а*) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x^3}{\sqrt[3]{\left(x^2+8\right)^4}}dx$; *б*) $\int\limits_{1/4}^{1}\frac{dx}{20x^2-9x+1}$.

216. *а*) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{\left(x^2+4\right)^3}}$; *б*) $\int\limits_{1/3}^{1}\frac{\ln(3x-1)}{3x-1}dx$.

217. *а*) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{16x^4-1}}$; *б*) $\int\limits_{1}^{3}\frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^5}}$.

218. *а*) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x^3}{\sqrt{16x^4+1}}dx$; *б*) $\int\limits_{0}^{1/3}\frac{dx}{9x^2-9x+2}$.

219. *а*) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{16x}{16x^4-1}dx$; *б*) $\int\limits_{1}^{3}\frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+9}}$.

220. *а*) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x}{16x^4+1}dx$; *б*) $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$.

221-235. Фигуранын аянтын жана жаанын узундугун табууда интегралды колдонууга маселелер.

221. $y=3\sqrt{-x}$ жана $y=-\frac{1}{2}x+2\frac{1}{2}$ сызыктары менен чектелген фигуранын аянтын эсептегиле.

222. Параметрдик теңдемелери менен чектелген фигуранын аянтын эсептегиле: $\begin{cases} x=4(t-\sin t), \\ y=4(1-\cos t). \end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$

223. $y=3\sqrt{x}$ жана $y=\frac{3}{4}x+2\frac{1}{4}$ сызыктары менен чектелген фигуранын аянтын эсептегиле.

224. $y=3\sqrt{5-x}$ жана $y=-\frac{3}{4}x+6$ сызыктары менен чектелген фигуранын аянтын эсептегиле.

225. $y=3\sqrt{x-5}$ жана $y=\frac{1}{2}x$ сызыктары менен чектелген фигуранын аянтын эсептегиле.

226. Параметрдик теңдемелери менен чектелген фигуранын аянтын эсептегиле $\begin{cases} x=3\cos t; \\ y=2\sin t. \end{cases}$ $(0\le t\le \pi)$

227. $y=3\sqrt{x-3}$ жана $y=\frac{1}{2}x+1$ сызыктары менен чектелген фигуранын аянтын эсептегиле.

228. $y=\sqrt{x-x^2}-\arccos\sqrt{x}+5,\ 1/9\le x\le 1$ теңдемеси менен берилген сызыктын жаасынын узундугун тапкыла.

229. Параметрдик теңдемелери менен берилген сызыктын жаасынын узундугун эсептегиле:

$$\begin{cases} x = 2\cos^3 t; \\ y = 2\sin^3 t. \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi).$$

230. $y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x,\ 0 \le x \le 7/9$ теңдемеси менен берилген сызыктын жаасынын узундугун тапкыла.

231. Параметрдик теңдемелери менен берилген сызыктын жаасынын узундугун эсептегиле:

$$\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t); \\ y = e^t(\cos t - \sin t). \end{cases} \quad (0 \le t \le \pi).$$

232. $y = -\ln\cos x,\ 0 \le x \le \pi/6$ теңдемеси менен берилген сызыктын жаасынын узундугун тапкыла.

233. $y = \sqrt{1-x^2} + \arccos x,\ 0 \le x \le 8/9$ теңдемеси менен берилген сызыктын жаасынын узундугун тапкыла.

234. Параметрдик теңдемелери менен берилген сызыктын жаасынын узундугун эсептегиле:

$$\begin{cases} x = 8(\cos t + t\sin t); \\ y = 8(\sin t - t\cos t). \end{cases} \quad (0 \le t \le \pi/4).$$

235. $y = 1 - \ln(x^2 - 1),\ 3 \le x \le 4$ теңдемеси менен берилген сызыктын жаасынын узундугун тапкыла.

№5- ТЕКШЕРҮҮ ИШТИ ЧЫГАРУУ ҮЧҮН УСУЛДУК КӨРСӨТМӨЛӨР

Анык эмес жана анык интегралдар

$F(x)$функциясы $f(x)$ функциясы үчүн баштапкы функция деп аталат, эгерде $F(x) = f(x)$ болсо. Ар кандай $(F(x)+C)$ көрүнүшүндөгү функция да $f(x)$ функциясы үчүн баштапкы функция болуп саналат, себеби $(F(x)+C)' = f(x)$, мында, С – каалагандай турактуу сан.

Аныктама: $f(x)$ функциясы үчүн бардык баштапкы функциялардын жыйындысын анык эмес интеграл деп айтабыз жана төмөндөгүдөй көрүнүштө жазабыз:

$$\int f(x)dx = F(x)+C,$$

мында, $f(x)$ - интеграл астындагы функция, С-турактуу сан.

Анык эмес интегралдын негизги касиеттери.

1. $\int f'(x)dx = \int df(x)+C = f(x)+C; \qquad d\int f(x)dx = d(F(x)+C) = f(x)dx$

2. $\int\left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx;$

3. $\int k\, f(x)dx = k\int f(x)dx, \;\; k = const.$

4.Эгерде $\int f(x)dx = F(x)+C$ *жана* $u = \varphi(x)$ болсо, анда $\int f(u)du = F(u)+C$

Айрым учурда, $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C.$

Функцияларды интегралдоонун негизги усулдары

1.1. Дифференциал белгисинин астына кийирүү жолу менен интегралдоо

4-касиет интегралдоо таблицасын бир кыйла кеңейтет. Кайсы бир таблицалык интегралды колдоноордон алдын, берилген интегралды төмөндөгүдөй көрүнүшкө алып келебиз

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(u)du, \ \textit{мында} \ \ u = \varphi(x).$$

Ушуга байланыштуу дифференциалдардын көп колдонулган өзгөртүп түзүүлөрүн белгилей кетүү пайдалуу, атап айтканда:

1) $dx = \frac{1}{a}d(ax+b), \ a \neq 0;$ 2) $xdx = \frac{1}{2}d\left(x^2\right);$

3) $\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d\left(\sqrt{x}\right);$ 4) $\frac{dx}{x} = d(\ln x);$ 5) $e^x dx = d\left(e^x\right);$

6) $\sin dx = -d(\cos x);$ 7) $\cos x dx = d(\sin x);$

8) $\frac{dx}{\cos^2 x} = d(tgx);$ 9) $\frac{dx}{\sin^2 x} = -d(ctgx);$

10) $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x);$ 11) $\frac{dx}{1+x^2} = d(arctgx);$

1-мисал.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x}} = -\frac{1}{3}\int \frac{d(1-3x)}{\sqrt{1-3x}} = \|u = 1-3x\| = -\frac{1}{3}2\sqrt{u} + C = -\frac{2}{3}\sqrt{1-3x} + C$$

2-мисал.

$$\int\frac{2x-5}{3x^2-2}dx=\frac{1}{3}\int\frac{d\left(3x^2-2\right)}{3x^2-2}-\frac{5}{\sqrt{3}}\int\frac{d\left(\sqrt{3}x\right)}{3x^2-2}dx=\left\|\begin{matrix}u=3x^2-2\\ t=\sqrt{3}x\end{matrix}\right\|=$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{du}{u}-\frac{5}{\sqrt{3}}\int\frac{dt}{t^2-2}=\frac{1}{3}\ln|u|-\frac{5}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\times\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|3x^2-2\right|-\frac{5}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}x-\sqrt{2}}{\sqrt{3}x+\sqrt{2}}\right|+C$$

3-мисал.

$$\int\frac{\arcsin x+x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx+\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\arcsin x d(\arcsin x)-$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(1-x^2\right)}{\sqrt{1-x^2}}=\left\|\begin{matrix}u=\arcsin x\\ t=1-x^2\end{matrix}\right\|=\int u du-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=$$

$$=\frac{u^2}{2}-\frac{1}{2}2\sqrt{t}=\frac{\arcsin^2 x}{2}-\sqrt{1-x^2}+C$$

1.2. Ордуна коюу жолу менен интегралдоо

$x=\varphi(t)$ деп белгилесек, мында t - жаңы өзгөрмө жана φ - үзгүлтүксүз дифференцирленүүчү функция, анда төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

$\varphi(t)$ функциясын барабардыктын оң жагындагы интеграл интегралдоо үчүн ыңгайлуу формага ээ боло тургандай кылып тандоого аракет кылабыз.

1-мисал.

$$\int x\sqrt{x-1}dx=\left\|\begin{array}{l} t=\sqrt{x-1} \\ x=t^2+1 \\ dx=2tdt \end{array}\right\|=\int\left(t^2+1\right)t\cdot 2tdt=2\int\left(t^4+t^2\right)dt=\frac{2}{5}t^5+\frac{2}{3}t^3+C=$$

$$=\frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2(3x+2)}{15}\sqrt{(x-1)^3}+C$$

Тригонометриялык ордуна коюулар

Мейли $a>0$ болсун.

1) Эгерде интегралда $\sqrt{a^2-x^2}$ болсо, анда

$$x=a\sin t, \quad \sqrt{a^2-x^2}=a\cos t, \quad dx=a\cos t dt.$$

2) Эгерде интегралда $\sqrt{x^2-a^2}$ болсо,анда

$$x=\frac{a}{\cos t}, \quad \sqrt{x^2-a^2}=atgt, \quad dx=\frac{a\sin t}{\cos^2 t}dt.$$

3) Эгерде интегралда $\sqrt{x^2+a^2}$ болсо,анда

$$x=atgt, \quad \sqrt{x^2+a^2}=\frac{a}{\cos t}, \quad dx=\frac{a}{\cos^2 t}dt.$$

2-мисал.

$$\int\frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2}dx=\left\|\begin{array}{l} a=2, \quad x=2tgt, \quad \sqrt{x^2+4}=\frac{2}{\cos t}, \quad dx=\frac{2dt}{\cos^2 t} \\ tgt=\frac{x}{2}, \cos t=\frac{2}{\sqrt{x^2+4}}, \sin t=tgt\cdot\cos t=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}} \end{array}\right\|=$$

$$=\int\frac{2}{\cos t\cdot 2tg^2 t}\cdot\frac{2dt}{\cos^2 t}=\int\frac{dt}{\cos t\cdot\sin^2 t}=\int\frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{\cos t\cdot\sin^2 t}dt=$$

$$=\int\frac{dt}{\cos t}+\int\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt=\ln\left|tgt+\frac{1}{\cos t}\right|+\int\frac{d(\sin t)}{\sin^2 t}=$$

$$=\ln\left|tgt+\frac{1}{\cos t}\right|-\frac{1}{\sin t}=\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right|-\frac{\sqrt{x^2+4}}{x}+C.$$

1.3. Бөлүктөп интегралдоо

Эгерде $u=\varphi(x)$ *жана* $v=\psi(x)$ - дифференцирленүүчү функциялар болсо, анда бөлүктөп интегралдоонун формуласы жашайт:

$$\int udv=u\cdot v-\int vdu$$

$\int P(x)e^{ax}dx,\ \int P(x)\sin axdx,\ \int P(x)\cos axdx$ түрүндөгү интегралдарда, $u=P(x)$ деп белгилөө туура, мында $P(x)$ - көп мүчө.

1-мисал.

$$\int\left(x^2+x\right)\cos 2xdx=\left\|\begin{array}{c}u=x^2+x,\quad du=(2x+1)dx\\ dv=\cos 2xdx,\ v=\int\cos 2xdx=\frac{1}{2}\sin 2x\end{array}\right\|=$$

$$=\left(x^2+x\right)\cdot\frac{1}{2}\sin 2x-\int\frac{1}{2}\sin 2x\cdot(2x+1)dx=\frac{\left(x^2+x\right)}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\int(2x+1)\sin 2xdx=$$

$$=\left\|\begin{array}{c}u=2x+1,\quad du=2dx\\ dv=\sin 2xdx,\quad v=-\frac{1}{2}\cos 2x\end{array}\right\|=\frac{\left(x^2+x\right)}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}\cos 2x\cdot(2x+1)-$$

$$-\int-\frac{1}{2}\cos 2x\cdot 2dx)=\frac{\left(x^2+x\right)}{2}\sin 2x+\frac{(2x+1)}{4}\cos 2x-$$

$$-\frac{1}{2}\int\cos 2xdx=\frac{\left(x^2+x\right)}{2}\sin 2x+\frac{(2x+1)}{4}\cos 2x-\frac{1}{4}\sin 2x+C=$$

$$=\frac{\left(2x^2+2x-1\right)}{4}\sin 2x+\frac{(2x+1)}{4}\cos 2x+C.$$

$\int P(x)\ln xdx,\quad \int P(x)\arcsin xdx,\quad \int P(x)arctgx\,dx$ көрүнүшүндөгү интегралдарда, $u=\ln x,$ *же* $u=\arcsin x,$ *же* $u=arctgx$ белгилөөсүн колдонуу ыңгайлуу, мында $P(x)$ - даражалуу функция.

2-мисал.

$$\int\frac{x\arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx=\left\|\begin{array}{l} \qquad\qquad u=\arcsin 2x,\quad du=\dfrac{2dx}{\sqrt{1-4x^2}} \\ dv=\dfrac{xdx}{\sqrt{1-4x^2}},\ v=\int\dfrac{xdx}{\sqrt{1-4x^2}}=-\dfrac{1}{8}\int\dfrac{d\left(1-4x^2\right)}{\sqrt{1-4x^2}}=-\dfrac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}\end{array}\right\|=$$

$$=\arcsin 2x\cdot\left(-\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}\right)-\int-\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}\cdot\frac{2dx}{\sqrt{1-4x^2}}=$$

$$=-\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}\cdot\arcsin 2x+\frac{1}{2}\int dx=-\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}\arcsin 2x+\frac{x}{2}+C.$$

3-мисал.

$$\int\ln\left(x^2+1\right)dx=\left\|\begin{array}{ll} u=\ln\left(x^2+1\right), & du=\dfrac{2xdx}{x^2+1} \\ dv=dx, & v=\int dx=x\end{array}\right\|=x\ln\left(x^2+1\right)-\int x\cdot\frac{2xdx}{x^2+1}=$$

$$=x\ln\left(x^2+1\right)-2\int\frac{x^2}{x^2+1}dx=x\ln\left(x^2+1\right)-2\int\frac{\left(x^2+1\right)-1}{x^2+1}dx=$$

$$=x\ln\left(x^2+1\right)-2\int\frac{x^2+1}{x^2+1}dx+2\int\frac{dx}{x^2+1}=x\ln\left(x^2+1\right)-2x+2arctgx+C.$$

1.4. Рационалдык функцияларды интегралдоо

Бүтүн санды бөлүп чыгаргандан кийин рационалдык функцияларды интегралдоо $\frac{P(x)}{Q(x)}$ туура рационалдык бөлчөктү интегралдоого келтирилет, мында $P(x)$ жана $Q(x)$- көп мүчөлөр, бөлчөктүн алымынын даражасы бөлүмүнүн даражасынан кичине. Бөлчөктүн бөлүмүн көбөйтүүчүлөргө ажыратууга болот жана ал төмөндөгүдөй көрүнүшкө ээ:

$$Q(x)=a_n(x-x_1)^{k_1}...(x-x_r)^{k_r}\ (x^2+p_1x+q_1)^{\ell_1}...(x^2+p_sx+q_s)^{\ell_s},$$

мында $x_1,...,x_r-$чыныгы тамырлар (жөнөкөй же эселүү), ал эми ар бир квадраттык үч мүчөнүн дискриминанты терс, башкача айтканда $D=p^2-4q<0.$

Теорема. Бөлүмү жогоруда көрсөтүлгөндөй көбөйтүүчүлөргө ажыраган каалагандай туура $\frac{P(x)}{Q(x)}$ рационалдык бөлчөгүн төмөндөгүдөй жөнөкөй бөлчөктөрдүн суммасы түрүндө көрсөтүүгө болот:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+...+\frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}}+\frac{B_1}{x-x_2}+\frac{B_2}{(x-x_2)^2}+$$

$$+...+\frac{B_{k_2}}{(x-x_2)^{k_2}}+...+\frac{C_1x+D_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+...+$$

$$+\frac{C_{l_1}x+D_{l_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}}+\ldots+\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_sx+q_s}++\frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_sx+q_s)^2}+$$

$$+\ldots+\frac{M_{l_s}x+N_{l_s}}{(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}}$$

мында $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots, C_1, D_1, \ldots, M_{1,} N_1, \ldots$ – кээ бир чыныгы коэффициенттер.

1-мисал. $\int\frac{3x^2+9x^2+10x+2}{(x-1)(x+1)^3}\,dx$

Чыгаруу:

Интеграл астындагы рационалдык бөлчөктүн бөлүмү эки тамырга ээ: жөнөкөй $x_1=1$ жана эселүү $x_2=-1$(эселүүлүгү $k_2=3$), ошондуктан бөлчөктү жөнөкөй бөлчөктөргө ажыратуу төмөндөгүдөй көрүнүшкө ээ:

$$\frac{3x^3+9x^2+10x+2}{(x-1)(x+1)^3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}+\frac{D}{(x+1)^3}=$$

$$=\frac{A(x+1)^3+B(x-1)(x+1)^2+C(x-1)(x+1)+D(x-1)}{(x-1)(x+1)^3}.$$

Бөлчөктөрдүн бөлүмдөрү барабар болгондуктан, алымдарын барабарлайбыз.

$$3x^3+9x^2+10x+2=A\,(x+1)^3+B(x-1)(x+1)^2+$$
$$C(x-1)(x+1)+D(x-1)$$

$x=1$ десек, $24=8\text{A}$ болот, мындан $\text{A}=3$;

$x=-1$ десек, $-2=-2D \Rightarrow D=1$

В жана С белгисиз коэффициенттерин табуу үчүн аныкталбаган коэффициенттер методун колдонобуз, ал үчүн барабардыктын оң жана сол жагындагы x^3 дун коэффициенттерин жана x^0 дун коэффициенттерин (же $x=0$ дү коёбуз) барабарлайбыз.

$$\frac{\text{x}^3 \,|\, 3=\text{A}+\text{B} \Rightarrow \text{B}=3-\text{A}=0}{x^0 \,|\, 2=A-B-C-D \Rightarrow C=A-B-D-2=0}$$

Ошентип, бардык коэффициенттер табылды жана рационалдык бөлчөктү төмөндөгүдөй көрүнүштө жазууга болот:

$$\frac{3\text{x}^3+9\text{x}^2+10\text{x}+2}{(\text{x}-1)(\text{x}+1)^3}=\frac{3}{\text{x}-1}+\frac{1}{(\text{x}+1)^3}$$

$$\int\frac{3x^3+9x^2+10x+2}{(x-1)(x+1)^3}dx=\int\frac{3}{x-1}dx+\int\frac{1}{(x+1)^3}dx=3\ln|x-1|-\frac{1}{2(x+1)^2}+C$$

2-мисал. $\int\frac{2x^3+11x^2+16x+10}{(x+2)^2(x^2+2x+3)}dx$

Чыгаруу:

Интеграл астындагы рационалдык бөлчөктүн бөлүмү $x=-2$ деген эселүү тамырга ээ (эселүүлүгү $k_1=2$), x^2+2x+3квадраттык үч мүчөсүнүн $D=-8<0$. Ошондуктан бөлчөктү жөнөкөй бөлчөктөргө ажыратуу төмөндөгудөй көрүнүшкө ээ:

$$\frac{2x^3+11x^2+16x+10}{(x+2)^2(x^2+2x+3)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x+2)^2}+\frac{Mx+N}{x^2+2x+3}=$$

$$=\frac{A(x+2)(x^2+2x+3)+B(x^2+2x+3)+Mx(x+2)^2+N(x+2)^2}{(x+2)^2(x^2+2x+3)}$$

Алгачкы бөлчөк менен жаңы табылган бөлчөктөрдүн алымдарын барабарлайбыз.

$$2x^3+11x^2+16x+10=A(x+2)(x^2+2x+3)+B(x^2+2x+3)+$$
$$+Mx(x+2)^2+N(x+2)^2$$

$x=-2$ десек, $3B=6$ болот, мындан $B=2$

Калган белгисиз коэффициенттерди табуу үчүн аныкталбаган коэффициенттердин методун колдонобуз. Ал үчүн барабардыктын оң жана сол жагындагы x^3, x^2, x^0 белгисиздеринин алдындагы коэффициенттерди барабарлайбыз .

$$x^3 \mid 2=A+M;$$
$$x^2 \mid 11=4A+B+4M+N \qquad \Rightarrow \qquad 4A+4M+N=9$$
$$x^0 \mid 10=6A+3B+4N \qquad \Rightarrow \qquad 6A+4N=4$$

Төмөндөгүдөй система келип чыгат:

$$\begin{cases} A+M=2 \\ 4(A+M)+N=9 \\ 6A+4N=4 \end{cases} \qquad N=1, \quad A=0, \quad M=2$$

Ошентип бардык коэффициенттер табылды. Рационалдык бөлчөк төмөндөгүдөй көрүнүшкө келет:

$$\frac{2x^3+11x^2+16x+10}{(x+2)^2(x^2+2x+3)}=\frac{2}{(x+2)^2}+\frac{2x+1}{x^2+2x+3}$$

$$\int\frac{2x^3+11x^2+16x+10}{(x+2)^2(x^2+2x+3)}\,dx=\int\frac{2}{(x+2)^2}\,dx+\int\frac{2x+1}{x^2+2x+3}\,dx\ (=)$$

$$\int\frac{2}{(x+2)^2}\,dx=-\frac{2}{x+2};$$

$$\int\frac{2x+1}{x^2+2x+3}\,dx=\left\|\begin{matrix}x^2+2x+3=(x+1)^2+2\\(2x+2)\,dx=d\,(x^2+2x+3)\end{matrix}\right\|=\int\frac{2x+2-1}{x^2+2x+3}\,dx=$$

$$=\int\frac{(2x+2)\,dx}{x^2+2x+3}-\int\frac{dx}{(x+1)^2+2}=\int\frac{d\,(x^2+2x+3)}{x^2+2x+3}-\frac{1}{\sqrt{2}}\,arctg\,\frac{(x+1)}{\sqrt{2}}=$$

$$=\ln\left|x^2+2x+3\right|-\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\,\frac{(x+1)}{\sqrt{2}}+C;$$

$$(=)-\frac{2}{x+2}+\ln\left|x^2+2x+3\right|-\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\,\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$$

1.5. Тригонометриялык функцияларды интегралдоо.

$\int\sin^m x\cos^n x\,dx$ *көрүнүшүндөгү интегралдар*

1) Эгерде $m=2k+1-$так оң сан болсо, анда

$$\int\sin^m x\cos^n x\,dx=-\int\sin^{2k}\cos^n x\,d\,(\cos x)=-\int(1-\cos^2 x)^k\times$$
$$\times\cos^n x\,d\,(\cos x)=\|\cos x=t\|=-\int(1-t^2)^k t^n\,dt,$$

башкача айтканда , интеграл $\cos x$ ке карата даражалуу функцияны интегралдоого келет. Эгерде, n - так оң сан болсо да ушундайча өзгөртүп түзүү колдонулат.

1-мисал.

$$\int\sqrt[4]{\cos x}\cdot\sin^5 x\,dx=-\int\sqrt[4]{\cos x}\cdot\sin^4 x\,d(\cos x)=-\int\sqrt[4]{\cos x}\,(\sin^2 x)^2\,d(\cos x)=$$

$$=-\int\sqrt[4]{\cos x}\,(1-\cos^2 x)^2 d(\cos x)=\|\cos x=t\|=-\int t^{1/4}(1-t^2)^2\,dt=$$

$$=-\int\left(t^{1/4}-2t^{9/4}+t^{17/4}\right)dt=-\frac{4t^{5/4}}{5}+2\cdot\frac{4t^{13/4}}{13}-\frac{4t^{21/4}}{21}+C=$$

$$=-2t^{5/4}\left(\frac{2}{5}-\frac{4}{13}t^2+\frac{2}{21}t^4\right)=-2\sqrt[4]{\cos^5 x}\,(\frac{2}{5}-\frac{4}{13}\cos^2 x+\frac{2}{21}\cos^4 x)+C.$$

2-мисал.

$$\int ctg^3 2x\,dx=\int\frac{\cos^3 2x}{\sin^3 2x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{\cos^2 2x\,d(\sin 2x)}{\sin^3 2x}=\frac{1}{2}\int\frac{\left(1-\sin^2 2x\right)d(\sin 2x)}{\sin^3 2x}=$$

$$=\|\sin 2x=t\|=\frac{1}{2}\int\frac{\left(1-t^2\right)dt}{t^3}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^3}-\frac{1}{2}\int\frac{t^2dt}{t^3}=-\frac{1}{4t^2}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=$$

$$=-\frac{1}{4t^2}-\frac{1}{2}\ln|t|+C=-\frac{1}{4\sin^2 2x}-\frac{1}{2}\ln|\sin 2x|+C.$$

2) Эгерде m жана n – жуп оң сандар болсо, анда интеграл астындагы туюнтманы төмөндөгү формулалардын жардамында өзгөртүп түзүшөт.

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x),\qquad \cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x),\qquad \sin x\cdot\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x.$$

3-мисал.

$$\int\cos^2 3x\cdot\sin^4 3x\,dx=\int(\cos 3x\cdot\sin 3x)^2\cdot\sin^2 3x\,dx=\int\frac{\sin^2 6x}{4}\cdot\frac{1-\cos 6x}{2}$$

$$dx=\frac{1}{8}\int\left(\sin^2 6x-\sin^2 6x\cos^2 6x\right)dx=\frac{1}{8}\int\frac{1-\cos 12x}{2}dx-\frac{1}{48}\int\sin^2 6x\,d(\sin 6x)$$

$$=\frac{1}{16}\int dx-\frac{1}{16}\int\cos 12x dx-\frac{1}{48}\cdot\frac{\sin^3 6x}{3}=\frac{x}{16}-\frac{\sin 12x}{192}-\frac{\sin^3 6x}{144}+C.$$

2) Эгерде m жана n – жуп сандар, бирок бирөөсү терс сан болсо, анда интеграл tgx же ctgx ке карата рационалдык функциядан интеграл алууга алып келинет.

4-мисал.

$$\int\frac{dx}{\cos^4 x}=\int\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}=\int\left(1+tg^2 x\right)d(tgx)=tgx+\frac{1}{3}tg^3 x+C.$$

$\int R(\sin x,\cos x)dx$ ***көрүнүшүндөгү интегралдар***

1) $tg\frac{x}{2}=t$ ордуна коюсунун жардамында,

$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx=\frac{2dt}{1+t^2},$ интеграл t өзгөрмөсүнө карата рационалдык функцияны интегралдоого алып келинет.

1-мисал.

$$\int\frac{dx}{\cos x+2\sin x+3}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}+2\frac{2t}{1+t^2}+3}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2+4t+3+3t^2}{1+t^2}}=\int\frac{2dt}{2t^2+4t+4}=$$

$$=\int\frac{dt}{t^2+2t+2}=\int\frac{dt}{(t+1)^2+1}=arctg\,(t+1)+C=arctg(tg\frac{x}{2}+1)+C.$$

2) Эгерде $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$ болсо, анда tgx =t өзгөртүп түзүүсүн колдонушат,

$$\sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\qquad \cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\qquad dx=\frac{dt}{1+t^2}.$$

2-мисал.

$$\int\frac{dx}{1+3\sin^2 x}=\int\frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+3\frac{t^2}{1+t^2}}=\int\frac{dt(1+t^2)}{(1+t^2)(1+t^2+3t^2)}=\int\frac{dt}{1+4t^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(2t)}{1+(2t)^2}=\frac{1}{2}arctg\,2t+C=\frac{1}{2}arctg\left(2tgx\right)+C.$$

3-мисал.

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x+3\sin x\cos x-\cos^2 x}=\int\frac{dx}{\cos^2 x(tg^2x+3tgx-1)}=$$

$$=\int\frac{d(tgx)}{(tg^2x+3tgx-1)}=\int\frac{dt}{t^2+3t-1}=\int\frac{dt}{(t+3/2)^2-13/4}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{13}}\ln\left|\frac{t+3/2-\sqrt{13}/2}{t+3/2+\sqrt{13}/2}\right|=\frac{1}{\sqrt{13}}\ln\left|\frac{2tgx+3-\sqrt{13}}{2tgx+3+\sqrt{13}}\right|+C.$$

2. Анык интеграл

Мейли, $[a,b]$ кесиндисинде $f(x)$ функциясы аныкталсын. $[a,b]$ кесиндисин $a=x_0<x_1<x_2<...<x_n=b$ деген n бөлүккө бөлөбүз.

Ар бир $\left(x_{i-1},x_i\right)$ интервалында ξ_i эркин чекитин алабыз жана $\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i$ суммасын түзөбүз, мында $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$.

Аныктама: $\sum\limits_{i-1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ көрүнүшүндөгү сумма интегралдык сумма деп аталат, ал эми анын $\max\Delta x_i\to 0$ умтулгандагы предели $f(x)$

функциясынын а дан b га чейинки анык интегралы деп аталат жана төмөндөгүчө белгиленет:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

Бул учурда $f(x)$ функциясы $[a,b]$ интервалында интегралданууучу деп аталат.

Мейли, $f(x)$ функциясы $[a,b]$ интервалында үзгүлтүксүз болсун. Анда бул интервалда $\int f(x)dx = F(x)+C$ анык эмес интегралы жашайт жана төмөндөгү формула орун алат

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

Бул формула *Ньютон-Лейбництин формуласы* деп аталат.

Эгерде $[a,b]$ интервалында $f(x) \geq 0$ болсо, анда геометриялык жактан анык интеграл $y = f(x)$ функциясынын графиги, Ох огу жана $x=a$, $x=b$ түз сызыктары менен чектелген ийри сызыктуу трапециянын аянтына барабар.

Анык интегралды чыгаруунун мисалдары.

1-мисал. $\displaystyle\int_{2\sqrt{3}}^{6} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$

Берилген интеграл $x = \frac{a}{\cos t}$, мында $a = 3$, тригонометриялык ордуна коюусунун жардамында табылат.

$$\int_{2\sqrt{3}}^{6}\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}=\left\|\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{\cos t},\quad dx=\dfrac{3\sin t}{\cos t}\ dt \\ \sqrt{x^2-9}=3\,tgt, \\ x=2\sqrt{3}\quad\Rightarrow\ \cos t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\quad\Rightarrow\ t=\dfrac{\pi}{6} \\ x=6\qquad\Rightarrow\ \cos t=\dfrac{1}{2}\qquad\Rightarrow\ t=\dfrac{\pi}{3} \end{array}\right\|=$$

$$=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{3\sin t\cdot\cos^2 t}{\cos^2 t\cdot 9\cdot 3tgt}\ dt=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\sin t}{9tgt}\ dt=\frac{1}{9}\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\sin t\cdot\cos t}{\sin t}\ dt=\frac{1}{9}\int_{\pi/6}^{\pi/3}\cos t\,dt=$$

$$=\frac{\sin t}{9}\Bigg|_{\pi/6}^{\pi/3}=\frac{1}{9}(\sin\pi/3-\sin\pi/6)=\frac{1}{9}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{18}=0{,}04$$

2- мисал.

$$\int_{3}^{8}\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\ dx=\left\|\begin{array}{l} x+1=t^2\ ,\ x=t^2-1 \\ dx=2t\ dt \\ x=3\ \Rightarrow\ t=2 \\ x=8\ \Rightarrow\ t=3 \end{array}\right\|=\int_{2}^{3}\frac{t+1}{t-1}2t\ dt=2\cdot\int_{2}^{3}\frac{t^2+t}{t-1}dt=$$

$$=2\cdot\int_{2}^{3}\frac{t^2-1+t+1}{t-1}\ dt==2\cdot\int_{2}^{3}\frac{t^2-1}{t-1}\ dt+2\cdot\int_{2}^{3}\frac{t+1}{t-1}\ dt=$$

$$=2\cdot\int_{2}^{3}\frac{(t-1)(t+1)}{t-1}\ dt+2\cdot\int_{2}^{3}\frac{t-1+2}{t-1}\ dt=$$

$$=2\cdot\int_{2}^{3}(t+1)\ dt+2\cdot\int_{2}^{3}\frac{t-1}{t-1}\ dt+4\cdot\int_{2}^{3}\frac{dt}{t-1}=2\Bigg|\left(\frac{t^2}{2}+t\right)\Bigg|_{2}^{3}+2\cdot\int_{2}^{3}dt+4\ln|t-1|\Big|_{2}^{3}=$$

$$=2\left(\frac{9}{2}+3-\frac{4}{2}-2\right)+2+4\ln 2-4\ln 1=9+4\ln 2=9+4\cdot 0{,}693=11{,}77.$$

3-мисал.

$$\int\limits_0^{\ln 3}\frac{dx}{e^x+4}=\left\|\begin{matrix} e^x=t, & dt=e^x dx \\ x=0 & \Rightarrow\ \ t=e^0=1 \\ x=\ln 3 & \Rightarrow\ \ t=3 \end{matrix}\right\|=\int\limits_1^3\frac{dt}{t(t+4)}=\int\limits_1^3\frac{dt}{t^2+4t}=\int\limits_1^3\frac{dt}{(t+2)^2-4}=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+2-2}{t+2+2}\right|\Big|_1^3=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t}{t+4}\right|\Big|_1^3=\frac{1}{4}\left(\ln\frac{3}{7}-\ln\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{4}\ln\frac{15}{7}\approx 0{,}19.$$

2.1. Өздүк эмес интегралдар.

1. $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ чексиз аралыктагы өздүк эмес интегралы деп $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$ предели аталат, эгерде бул предел жашаса жана чектелсе.

$$\text{Демек,}\quad \int\limits_a^{\infty} f(x)dx=\lim_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx.$$

$\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx$ *жана* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ интегралдары да жогорудагы интегралга окшош эле аныкталышат.

2. Эгерде $f(x)$ функциясы $x\in[a,b]$ тин бардык маанилеринде үзгүл - түксүз болсо, бирок $[a,b]$ интервалында жатуучу с чекитинде гана $f(x)$ экинчи түрдөгү үзүлүшкө ээ болсо, анда $\int\limits_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx+\lim\limits_{\delta\to 0}\int\limits_{c+\delta}^b f(x)dx,$ эгерде бул пределдер жашаса жана чектелсе.

Бул учурда $\int\limits_a^b f(x)dx$ интегралы чектелбеген функциянын өздүк эмес интегралы деп аталат.

Эгерде жогорудагы келтирилген пределдер чектелген болсо, анда өздүк эмес интеграл - жыйналат, эгерде чексиз болсо – таралат.

Мисалдар.

Өздүк эмес интегралдарды чыгаргыла же алардын таралуучулугун далилдегиле.

1-мисал.

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^3dx}{\sqrt[6]{\left(2x^4+1\right)^5}}=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{8}\int\limits_0^b\frac{d(2x^4+1)}{\sqrt[6]{(2x^4+1)^5}}=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{8}\int\limits_0^b(2x^4+1)^{-5/6}d(2x^4+1)=$$

$$=\frac{1}{8}\lim_{b\to\infty}\frac{(2x^4+1)^{-\frac{5}{6}+1}}{-\frac{5}{6}+1}\Bigg|_0^b=\frac{1}{8}\lim_{b\to\infty}\frac{(2b^4+1)^{\frac{1}{6}}}{\frac{1}{6}}=\frac{1}{8}\lim_{b\to\infty}6(2b^4+1)^{\frac{1}{6}}=\infty,$$

башкача айтканда, бул интеграл таралуучу.

2-мисал.

$$\int\limits_0^\infty\frac{dx}{2x^2+6x+6}=\lim_{b\to\infty}\int\limits_0^b\frac{dx}{2(x^2+3x+3}=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\int\limits_0^b\frac{dx}{x^2+2\cdot\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+3}=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\int\limits_0^b\frac{dx}{(x+\frac{3}{2})^2+\frac{3}{4}}=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\,arctg\,\frac{(x+\frac{3}{2})\cdot 2}{\sqrt{3}}\Bigg|_0^b=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\,\frac{(2x+3)}{\sqrt{3}}\Bigg|_0^b=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{\sqrt{3}}(arctg\,\frac{(2b+3)}{\sqrt{3}}-arctg\,\frac{3}{\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3})=\frac{\pi}{6\sqrt{3}}=\frac{\pi\sqrt{3}}{18}.$$

Предел чектүү сан, демек интеграл жыйналуучу.

3-мисал. $\int\limits_0^2 \frac{x^2dx}{\sqrt{64-x^6}}$

$x=2$ болгондо интеграл астындагы функциянын бөлүмү нөлгө барабар, демек, бул чекитте функция II түрдөгү үзүлүшкө ээ. Ошондуктан, берилген интеграл чектелбеген функциянын өздүк эмес интегралы болуп эсептелет.

$$\int\limits_0^2 \frac{x^2dx}{\sqrt{64-x^6}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{2-\varepsilon} \frac{x^2dx}{\sqrt{64-x^6}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{2-\varepsilon} \frac{x^2dx}{\sqrt{64-(x^3)^2}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{3}\int\limits_0^{2-\varepsilon} \frac{3x^2dx}{\sqrt{64-(x^3)^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{3}\int\limits_0^{2-\varepsilon} \frac{d(x^3)}{\sqrt{64-(x^3)^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{3}\arcsin\frac{x^3}{8}\Big|_0^{2-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{3}(\arcsin\frac{(2-\varepsilon)^3}{8}-0) = \frac{1}{3}\arcsin\frac{2^3}{8} = \frac{1}{3}\arcsin 1 = \frac{\pi}{6},$$

башкача айтканда, интеграл жыйналуучу.

2.2. Жалпак фигуралардын аянттарын эсептөө.

1. Эгерде берилген функция $y=f_1(x),\ y=f_2(x)$ функцияларынын графиктери жана $x=a,\ x=b$ түз сызыктары менен чектелген болсо, мында $\forall x\in[a,b]\quad f_1(x)\le f_2(x),$ анда фигуранын аянты

$S=\int\limits_a^b\left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx$ болот.

2. Эгерде ийри сызыктуу трапеция $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ параметрдик теңдемелери менен берилген ийри менен чектелсе, анда ийри сызыктуу трапециянын аянты $S=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\cdot\varphi'(t)\ dt$ формуласы менен табылат, мында, α жана β $\varphi(\alpha)=a,\quad \varphi(\beta)=b$ теңдемелеринен аныкталат.

1- мисал.

Төмөндөгү сызыктар менен чектелген фигуранын аянтын тапкыла:

$$y=3\sqrt{x-1} \quad \text{жана} \quad y=\frac{1}{2}x+2.$$

Чыгаруу.

Берилген ийрилердин кесилишкен чекиттерин табабыз:

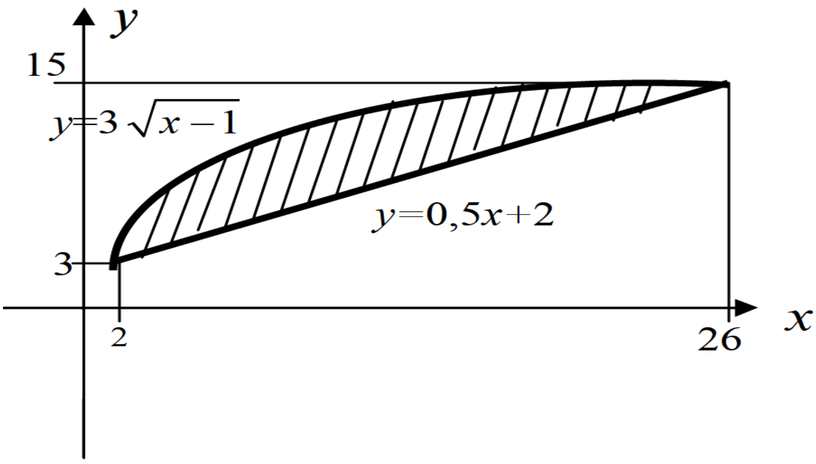
$$3\sqrt{x-1}=\frac{1}{2}x+2$$

Барабардыктын эки жагын тең квадратка көтөрөбүз, квадраттык теңдеме алабыз жана анын тамырларын табабыз:

$$9(x-1)=\frac{1}{4}x^2+2x+4, \qquad \frac{1}{4}x^2-7x+13=0,$$

$$D=49-13=36, \quad x_{1,2}=\frac{7\pm6}{2\cdot\frac{1}{4}}=2(7\pm6), \quad x_1=2, \quad x_2=26.$$

Фигураны тургузабыз жана анын аянтын эсептейбиз.



$$S=\int\limits_{2}^{26}(3\sqrt{x-1}-0{,}5x-2)\,dx=3\,\frac{(x-1)^{3/2}\cdot 2}{3}\Bigg|_{2}^{26}-0{,}5\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_{2}^{26}-2x\Bigg|_{2}^{26}=$$

$$=2\cdot 125-2-169+1-52+4=32.$$

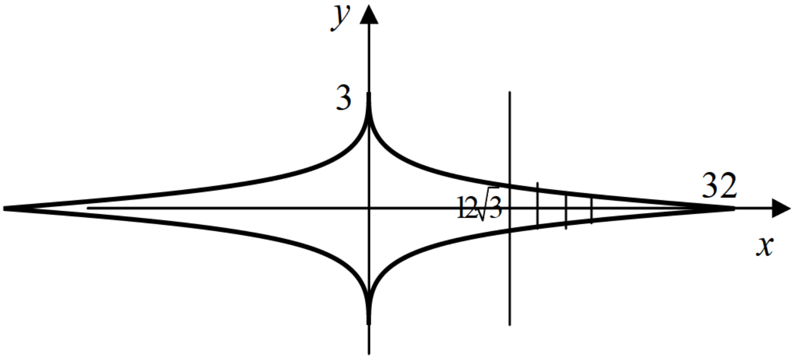
2-мисал. Берилген параметрдик теңдемелери менен чектелген фигуранын аянтын тапкыла.

$$\begin{cases} x=32\cos^3 t; \\ y=2\sin^3 t; \\ x=12\sqrt{3},\quad (x\geq 12\sqrt{3}) \end{cases}$$

Чыгаруу.

Мында $\varphi(t)=32\cos^3 t\,,\quad \psi(t)=2\sin^3 t.$

Фигураны тургузабыз жана штрихтелген бөлүгүнүн аянтын табабыз.



Ал үчүн интегралдоо пределдерин аныктайбыз:

$$32\cos^3 t = 12\sqrt{3}\,, \quad \cos^3 t = \frac{3\sqrt{3}}{8}, \quad \cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad t = \pm\frac{\pi}{6}.$$

$$32\cos^3 t = 32, \quad \cos^3 t = 1, \quad \cos t = 1, \quad t = 0.$$

Биз карап жаткан область Ох огуна симметриялуу болгондуктан, анын жогорку бөлүгүнүн аянты S_1 ди гана табабыз, анда фигуранын толук аянты $S = 2S_1$.

$$\varphi'(t) = -96\cos^2 t\sin t.$$

$$S_1 = -\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{0} 2\sin^3 t\cdot 96\cos^2 t\sin t\,dt = 192\int\limits_{0}^{\pi/6}\sin^4 t\cdot\cos^2 t dt =$$

$$= 192\int\limits_{0}^{\pi/6}(\sin t\cdot\cos t)^2\sin^2 t dt = 192\int\limits_{0}^{\pi/6}\frac{\sin^2 2t}{4}\cdot\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt =$$

$$= 24\int\limits_{0}^{\pi/6}(\sin^2 2t - \sin^2 t\cdot\cos 2t)\,dt = 24\int\limits_{0}^{\pi/6}\frac{1-\cos 4t}{2}dt -$$

$$-12\int\limits_{0}^{\pi/6}\sin^2 2td(\sin 2t) = 12t\Big|_{0}^{\pi/6} - 12\cdot\frac{1}{4}\sin 4t\Big|_{0}^{\pi/6} - 12\cdot\frac{\sin^3 2t}{3}\Big|_{0}^{\pi/6} =$$

$$= 12\frac{\pi}{6} - 3\sin\frac{2\pi}{3} - 4\sin^3\frac{\pi}{3} = 2\pi - 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 4\cdot\frac{3\sqrt{3}}{8} =$$

$$= 2\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = 2\pi - 3\sqrt{3}.$$

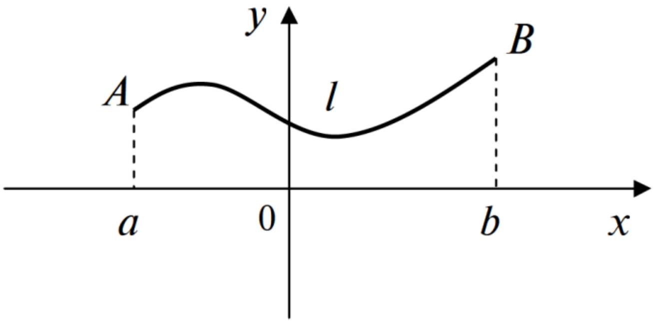
Демек, $S = 4\pi - 6\sqrt{3} \approx 2{,}17.$

2.3. Жалпак ийринин жаасынын узундугун эсептөө

1. Мейли, жалпак ийринин AB жаасы $y = f(x)$ теңдемеси менен берилсин, мында $f(x)$- үзгүлтүксүз дифференцирленүүчү функция.

Анда, AB жаасынын узундугу төмөндөгү формула боюнча табылат.

$$l=\int\limits_a^b\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$$



2. Эгерде ийри $x=\varphi(t),\ y=\psi(t)$ параметрдик теңдемелери менен берилген болсо, мында $\varphi(t),\ \ \psi(t)-$үзгүлтүксүз дифференцирленүүчү функциялар, анда жаанын узундугу l төмөндөгү формула боюнча табылат.

$$l=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt,$$

мында, $\alpha,\ \ \beta-AB$ жаасынын учтарына туура келүүчү t параметринин маанилери.

1-мисал.

$y=\ln\sin x,\ \frac{\pi}{3}\le\varphi\le\frac{\pi}{2},$ ийрисинин жаасынын узундугун эсептегиле.

Чыгаруу.

Жаанын узундугун төмөндөгү формула боюнча табабыз:

$$l=\int\limits_a^b\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx,$$

мында $\quad a=\frac{\pi}{3},\quad b=\frac{\pi}{2},\quad y'=\frac{\cos x}{\sin x},\quad 1+(y')^2=1+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}=\frac{1}{\sin^2 x}.$

Демек,

$$l=\int_{\pi/3}^{\pi/2}\sqrt{\frac{1}{\sin^2 x}}\,dx=\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{1}{\sin x}dx=\ln\left|tg\,\frac{x}{2}\right|\left|_{\pi/3}^{\pi/2}\right.=\ln\left|tg\,\frac{\pi}{4}\right|-\ln\left|tg\,\frac{\pi}{6}\right|=$$

$$=\ln 1-\ln\frac{1}{\sqrt{3}}=\ln\sqrt{3}\cong 0{,}55.$$

2-мисал. Параметрдик теңдемелери менен берилген ийрининин жаасынын узундугун тапкыла.

$$\begin{cases} x=4(2\cos t-\cos 2t); \\ y=4(2\sin t-\sin 2t). \end{cases} \qquad (0\le t\le \pi).$$

Чыгаруу.

Жаанын узундугун төмөндөгү формула боюнча табабыз

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt,\quad \textit{мында}\quad \alpha=0,\quad \beta=\pi,$$

$$x'(t)=4(-2\sin t+2\sin 2t)=8(-\sin t+\sin 2t),$$

$$y'(t)=4(2\cos t-2\cos 2t)=8(\cos t-\cos 2t),$$

$$(x')^2+(y')^2=64(\sin^2 t-2\sin t\sin 2t+\sin^2 2t+\cos^2 t-2\cos t\cos 2t+$$
$$+\cos^2 2t)=64(2-2(\cos 2t\cos t+\sin 2t\sin t))=128(1-\cos t)=$$
$$=128\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}=256\sin^2\frac{t}{2}.$$

Демек,

$$l=\int_0^{\pi}\sqrt{256\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=\int_0^{\pi}16\sin\frac{t}{2}dt=-16\cdot 2\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi}=-32\cos\frac{\pi}{2}+32\cos 0=32.$$

ТИРКЕМЕ

Кыскача көбөйтүүнүн формулалары

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b); \qquad (a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \text{ же } (a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b);$$

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \text{ же } (a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b);$$

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2); \qquad a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2);$$

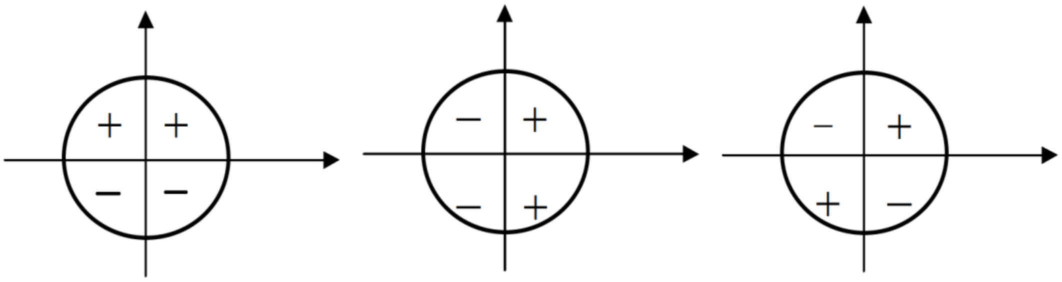
$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

мында x_1 жана x_2- $ax^2+bx+c=0$ теңдемесинин тамырлары,

$$\begin{cases} x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}, \quad \textit{эгерде} \quad D>0; \\ x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}, \quad \textit{эгерде} \quad D=0; \\ D=\sqrt{b^2-4ac}, \ D<0 \ \textit{болсо, чыныгы тамырлар жок}. \end{cases}$$

Тригонометриянын негизги формулалары

1. Тригонометриялык функциялардын белгилери



sin α **cos α** **tg α жана ctg α**

2. Келтирүүнүн формулалары

β	$\sin\beta$	$\cos\beta$	$\mathrm{tg}\beta$	$\mathrm{ctg}\beta$
$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$
$\pi/2-\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$
$\pi/2+\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$
$\pi-\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$
$\pi+\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$
$3\pi/2-\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$
$3\pi/2+\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$
$2\pi-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$
$2\pi+\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$

3. Бир бурчтун тригонометриялык функцияларынын ортосундагы байланыштар

$$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \qquad ctg\,\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}; \qquad \mathrm{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha};$$

$$\sin^2\alpha+\cos^2 a=1; \quad tg\,\alpha\cdot ctg\,\alpha=1;$$

$$1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}; \quad 1+ctg^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

4. Негизги бурчтардын тригонометриялык функцияларынын маанилери

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$
0	0	1	0	–
$30^\circ = \pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
$45^\circ = \pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1
$60^\circ = \pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$
$90^\circ = \pi/2$	1	0	–	1
$120^\circ = 2\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}/3$
$135^\circ = 3\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1	-1
$150^\circ = 5\pi/6$	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}$
$180^\circ = \pi$	0	-1	0	–
$270^\circ = 3\pi/2$	-1	0	–	0
$360^\circ = 2\pi$	0	1	0	–

4. Кошуунун формулалары

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta;$$

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\cdot tg\beta} \quad ; \quad tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha\cdot tg\beta}.$$

6. Кош бурчтун тригонометриялык функциялары

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha;$$

$$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha};$$

7. Жарым аргументтүү тригонометриялык функциялар

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}; \qquad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}; \qquad tg^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha};$$

8. Тригонометриялык функциялардын суммасын көбөйтүндүгө өзгөртүп түзүү формулалары

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

9. Тригонометриялык функциялардын көбөйтүндүсүн суммага өзгөртүп түзүү формулалары

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)];$$
$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)];$$
$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)].$$

10. Даражаны төмөндөтүү формулалары

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}; \quad \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \quad \text{же}$$

$$1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha; \quad 1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha.$$

Логарифмалар

Негизги формулалар

$$c = \log_a b (a > 0, a \neq 1, b > 0) \quad \Leftrightarrow \quad a^c = b$$

Негизги логарифмалык теңдештик: $a^{\log_a b} = b.$

Логарифмалоонун формулалары:

$$\log_a a = 1, \ \log_a 1 = 0,$$

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y, \ \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y,$$

$$\log_a x^p = p \log_a x, p \neq 2n; \ \log_a x^{2n} = 2n \log_a |x|.$$

Бир негизден башка негизге өтүү формулалары:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \qquad \log_a b = \frac{1}{\log_b a},$$

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1, \qquad \log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b,$$

$$\log_{a^m} b = \frac{1}{m} \log_a b, \qquad \log_{a^n} b^n = \log_a b.$$

Туундунун таблицасы

$f(x)$		$f'(x)$	$f(x)$		$f'(x)$
1.	c	0	11.	$\cos u$	$-\sin u \cdot u'$
2.	x	1	12.	$\operatorname{tg} u$	$\frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
3.	u^n	$nu^{n-1} \cdot u'$	13.	$\operatorname{ctg} u$	$-\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
4.	$\sqrt{u}$	$\frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$	14.	$\arcsin u$	$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
5.	$\frac{1}{u}$	$-\frac{1}{u^2} \cdot u'$	15.	$\arccos u$	$-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
6.	a^u	$a^u \cdot \ln\alpha \cdot u'$	16.	$\operatorname{arctg} u$	$\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
7.	e^u	$e^u \cdot u'$	17.	$\operatorname{arcctg} u$	$-\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
8.	$\log_a u$	$\frac{1}{u\ln\alpha} \cdot u'$	18.	$\operatorname{sh} u$	$\operatorname{ch} u \cdot u'$
9.	$\ln u$	$\frac{1}{u} \cdot u'$	19.	$\operatorname{ch} u$	$\operatorname{sh} u \cdot u'$
10.	$\sin u$	$\cos u \cdot u'$			

Анык эмес интегралдардын таблицасы

$1)\int dx = x + C;$ $\qquad$ $2)\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1;$

$2a)\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C;$ $\qquad$ $2б)\int \dfrac{dx}{x^2} = -\dfrac{1}{x} + C;$

$3)\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C;$

$4)\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, \quad (a > 0; a \neq 1);$ $\qquad$ $5)\int e^x dx = e^x + C;$

$6)\int \sin x\, dx = -\cos x + C;$ $\qquad$ $7)\int \cos x\, dx = \sin x + C;$

$8)\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\, x + C;$ $\qquad$ $9)\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tg\, x + C;$

$$10)\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\, \frac{x}{a} + C;$$

$$11)\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C = -\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C;$$

$$12)\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C;$$

$$13)\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C;$$

$$14)\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\,\frac{x}{2}\right| + C = \ln\left|\frac{1}{\sin x} - ctg\, x\right| + C;$$

$$15)\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C = \ln\left|\frac{1}{\cos x} + tg\, x\right| + C.$$

КОЛДОНУЛГАН АДАБИЯТТАР

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике /Д.Т. Письменный. М.: Айрис-пресс, 2007. Ч.1, 2. 288 с.
2. Натансон И. П. Краткий курс высшей математики /И.П. Натансон. СПб.: Издательство «Лань», 2003. 736 с.
3. Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики /Б.П. Демидович, В.А. Кудрявцев. М.: Изд-во «Астрель», 2003. 654 с.
4. Краснов М.Л. Вся высшая математика /М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И.Макаренко. Ч.1. М.: Эдиториал УРСС, 2001. 352 с.
5. Высшая математика /под редакцией Яковлева Г.Н. М.: Высшая школа, 2004. 584с.
6. Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа/ под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича М.: Наука,
7. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. - М.: Наука, 1973 - 2007.
8. Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометрии. — М.: Наука, 1975.
9. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. — М.: Наука, 1976—1978, т. 1, 2.
10. Шнейдер В. Е., Слуцкий А. И., Шумов А. С. Краткий курс высшей математики. М.: Высшая школа, 1978, т. 1, 2.
11. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. М. Высшая школа, 1999, часть 1,2.
12. Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике. М.: Наука, 1955-1977.