УДК 517.928

Аширбаева Айжаркын Жоробековна,
ф.-м.и.д., профессор,
SPIN-код: 8257-0830, Author ID: 918646
Каримова Гулзат Абдигапаровна, аспирант,
Молдокаримова Айжамал Эргешмаматовна, магистр,
Ош технологиялык университети
E-mail: aijarkyn.osh@mail.ru

ЭКИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ДАРАЖАЛУУ ӨЗГӨЧӨЛ ҮГҮ МЕНЕН ЖЕКЕЧЕ ТУУНДУЛУУ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕНИН ЧЫГАРЫЛЫШЫН ИЗИЛДӨӨ

Кошумча аргумент кийирүү усулу менен даражалуу өзгөчөлүктөрү бар экинчи тартиптеги жекече туундулуу дифференциалдык теңдеменин чечимин изилдөө маселеси каралган. Бул усул менен кандайдыр бир коюлган маселени чечүүнүн жолун тандоого жана баштапкы маселени чечиминин бар экендигин жана жалгыз экенин далилдөөгө болот. Мындай маселелерди чечүү актуалдуу маселелерден болуп саналат.

Ачкыч сөздөр: Даража, өзгөчөлүк, экинчи тартип, кошумча аргумент кийирүү усулу, интегралдык теңдеме, жалгыздык

Аширбаева Айжаркын Жоробековна,
д.ф.-м.н., профессор,
Каримова Гулзат Абдигапаровна, аспирант,
Молдокаримова Айжамал Эргешмаматовна, магистр,
Ошский технологический университет

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА СО СТЕПЕННЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

Предусмотрен вопрос изучения решения дифференциального уравнения с частными производными второго порядка со степенными особенностями. Использован метод дополнительного аргумента. Этим методом можно выбрать способ решения поставленной задачи и доказать, что решение задачи существует и является единственной. Решение таких вопросов является одним из актуальных.

Ключевые слова: Степень, оссобенность, второй порядок, метод дополнительного аргумента, интегральное уравнение, единственность .

Ashirbaeva Aizharkyn Zhorobekovna,
doctor of physical and mathematical sciences, professor,
Karimova Gulzat Abdigaparovna, graduate student,
Moldokarimova Aizhamal Ergeshmamatovna,
graduate student, Osh Technological University

INVESTIGATION OF THE SOLUTION OF A SECOND-ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION WITH POWER-LAW SINGULARITIES

The issue of studying the solution of a second-order partial differential equation with power-law singularities by the method of an additional argument is envisaged. By this method, you can choose a way to solve the problem and prove that the solution to the problem exists and is the only one. The solution of such issues is one of the most urgent.

Key words: Degree, completeness, second order, additional argument method, integral equation, uniqueness.

Киришүү. Бул макалада экинчи тартипке чейинки белгисиз функциянын жекече туундусу камтылган дифференциалдык теңдеме каралган. Белгисиз функциянын жекече туундуларынын коэффициентери катары t жана x өзгөрмөлөрү белгилүү бир даражада берилген. Даражадагы сандар m, n чыныгы сандар.

Биринчи тартиптеги даражалуу өзгөчөлүктөргө ээ болгон теңдемелер [1-2] эмгектеринде каралган..

Маселенин коюлушу. Төмөнкү маселени карайлы:

$$t^{2m}u_{tt}(t,x) - x^{2n}u_{xx}(t,x) + mt^{2m-1}u_t(t,x) - nx^{2n-1}u_x(t,x) = f(t,x,u), \tag{1}$$

$0 \le t \le T, \quad x \in R, \quad 0 \le m < 1, \quad n \in R,$

$$u(0,x) = \varphi_0(x) \quad x \in R \tag{2}$$

$$u_t(0,x) = \varphi_1(x), \quad x \in R \tag{3}$$

Эгерде (1) де $m \ge 1$болсо, анда теңдемеде өзгөчөлүк пайда болот.

(1)-(3) маселесиндеги берилген функциялар жетишерлик деңгээлде жылмакай функциялар болсун дейли, башкача айтканда:

$\varphi_0(x), \varphi_1(x) \in C_b^2(\,R), \; f(t,x,u) \in C_b^2([0,T] \times R^2) \cap Lip(L|_u),$

$\overline{C}_b^{(k)}$– өзүнүн k –тартипке чейинки үзгүлтүксүз жана чектелген жекече туундуларына ээ болгон функциялар классы,

$Lip(L|u)$- Липшиц шартын *u* өзгөрмөсү боюнча *L>0-const* коэффициенти менен канаттандырган функциялардын классы.

Биз кошумча аргумент кийирүү усулун колдонуунун алдында (1) теңдемесин бизге ыңгайлуу формада жазып алуубуз керек. (1) формуласын төмөнкүдөй жазып алалы:

$$t^m(t^m u_t(t,x) + x^n u_x(t,x))'_t - x^n(t^m u_t(t,x) + x^n u_x(t,x))'_x = f(t,x,u) \tag{4}$$

Чындыгында эле (4) теңдемесинен кашааларды ачып жиберсек, элементердык өзгөртүп түзүүлөрдөн кийин (1) барабардыгын алууга болот.

(4)-(3)-(2) маселеси үчүн кошумча аргумент кийирүү усулун колдонолу. Жыйынтыкта каралган маселе төмөнкү интегралдык теңдемеге келет:

$$t^m u_t(t,x) + x^n u(t,x) = \psi_0(q(0,t,x) + \int_0^t f(s,q(s,t,x),u(s,q(s,t,x))ds, \tag{5}$$

мындагы

$$q(s,t,x)=\left[\frac{m-1}{\frac{n-1}{t^{m-1}}+\frac{m-1}{x^{n-1}}-\frac{n-1}{s^{m-1}}}\right]^{\frac{1}{n-1}}, \quad (s,t,x)\in D_T^{+}\{0\le s\le t\le T, x\in R^{+},$$

эгерде $n\neq 1$,

$$q(s,t,x)=x\exp\left[\frac{1}{(m-1)s^{m-1}}-\frac{1}{(m-1)t^{m-1}}\right], (s,t,x)\in D_T\ \{0\le s\le t\le T, x\in R\ ,$$

эгерде $n=1$,

$\psi_0(x)=x^n u_x(0,x)=x^n\varphi_0'(x).$

$q(s,t,x)$ - функциясы $t^m q_t(s,t,x)-x^n q_x(s,t,x)=0$ барабардыгын канаатандыра тургандыгын жана ал функция үчүн төмөнкү шарт орун алаарын далилдейли:
$q(s,s,x)=x.$

Жекече туундуларды табабыз:

$$q_t(s,t,x)=q^n(s,t,x)\cdot\frac{1}{t^m}, \tag{6}$$

$$q_x(s,t,x)=q^n(s,t,x)\cdot\frac{1}{x^n}, \tag{7}$$

(6) барабардыгын t^m өзгөрмөсүнө, ал эми (7) барабардыгын x^n өзгөрмөсүнө көбөйтүп алабыз. Андан кийин (6)дан (7)ни кемитүү жолу менен биз караган барабардык орун алат:

$t^m q_t(s,t,x)-x^n q_x(s,t,x)=0,$

Ошондой эле $q(s,s,x)=x$ барабардыгы орун алат. Бул ырастоолор n=1 учур үчүн да туура болоорун далилдөөгө болот.

Биз жогоруда колдонгон усул менен (5),(2),(3) маселесин интегралдык теңдемеге келтирүүнү карайбыз. Колдонуунун мындай жолдору айкын мисалдарда [3] жумушунда берилген. Биз ошол эмгектен пайдалануу менен төмөнкү теңдемеге келдик:

$$u(t,x)=\varphi_0(p(0,t,x))+\int_0^t\psi_0(q(0,s,p(s,t,x))ds+\int_0^t\int_0^s f(\rho,q(\rho,s,p(s,t,x)),u(\rho,q(\rho,s,p(s,t,x))d\rho ds, \tag{8}$$

(8) деги

$$p(s,t,x)=\left[\frac{m-1}{\frac{n-1}{s^{m-1}}+\frac{m-1}{x^{n-1}}-\frac{n-1}{t^{m-1}}}\right]^{\frac{1}{n-1}}, \quad (s,t,x)\in D_T^{+} \quad \text{эгерде}\ n\neq 1,$$

$$p(s,t,x)=x\exp\left[\frac{1}{(m-1)t^{m-1}}-\frac{1}{(m-1)s^{m-1}}\right], \quad n=1, (s,t,x)\in D_T \quad \text{эгерде}\ n=1.$$

Биздин аныкталаган $p(s,t,x)$ функцияларыбыз үчүн барабардык орун алат:

$t^m p_t(s,t,x)+x^n p_x(s,t,x)=0,\ \ p(s,s,x)=x.$

Барабардыктын орун алаарын туундунун жардамында далилдөө эч кандай кыйынчылыктарды жаратбайт.

Биз максатыбызга жеттик, башкача айтканда (8) интегралдык теңдеменин чечимин табуу жетиштүү. Себеби (8) теңдемеси (1)-(3) маселесине эквиваленттүү.

Мындай жол менен коюлган баштапкы маселенин чечимин изилдөө биз колдонгон усулдун өзгөчөлүгү деп баалоого болот.

(8) үчүн удаалаш жакындаштыруу усулун колдонолу:

$$u^N(t,x)=\varphi_0(p(0,t,x))+\int_0^t \psi_0(q(0,s,p(s,t,x))ds+$$

$$+\int_0^t\int_0^s f(\rho,q(\rho,s,p(s,t,x)),u^{N-1}(\rho,q(\rho,s,p(s,t,x))d\rho ds,\quad N=1,2,3,,, \tag{9}$$

(9)да:

$$u^0(t,x)=\varphi_0(p(0,t,x))+\int_0^t \psi_0(q(0,s,p(s,t,x))ds,$$

Ал эми N=1,2,3… учурлар үчүн:

$$\| \ u^N(t,x)-u^{N-1}(t,x) \ \| = L\int_0^t\int_0^s \left\| u^{N-1}(\rho,q(\rho,s,p(s,t,x))-u^{N-2}(\rho,q(\rho,s,p(s,t,x))\right\| d\rho ds,$$

мында

$$\|u(t,x)\|=\sup\{|u(t,x)| 0\le t\le T,\quad x\in R\},$$

Анда

$$\| \ u^1(t,x)-u^0(t,x) \ \| \le M\frac{T^2}{2}=MP(T),$$

$$\left\| u^2(t,x)-u^1(t,x)\right\| \le MLP^2(T)$$

………………………………………………

$$\left\| u^N(t,x)-u^{N-1}(t,x)\right\| \le L^{N-1}MP^{N-1}(T)=P_N$$

………………………………………………

P_N сандары жыйналуучу катарды түзгөндүктөн, $u^0, u^1, \ldots u^i, \ldots$ удаалаштыгы u(t,x) үзгүлтүксүз функциясына бир өлчөмдүү жыйналат.

Мисал. (1) теңдемесинин оң жагындагы функция убакыттан гана көз каранды функция болсун дейли, башкача айтканда:

$$t^{2m}u_{tt}-x^{2n}u_{xx}+mt^{2m-1}u_t-nx^{2n-1}u_x=f(t), \tag{10}$$

(10) теңдемесин (2), (3) баштапкы шарттары менен карайбыз. Мындай маселенин чечимин жогорудагы эсептөөлөрдү эске алып жазып алууга болоорун көрөбүз:

$$u(t,x)=\varphi_0(p(0,t,x))+\int_0^t \psi_0(q(0,s,p(s,t,x))ds+\int_0^t (t-\rho)f(\rho)d\rho, \tag{11}$$

Бизде $n\ne 1$, $q(0,s,p(s,t,x))$ ны аныктайлы:

$$q(0,s,p(s,t,x))=\left[\frac{m-1}{\frac{n-1}{s^{m-1}}+\frac{m-1}{(p(s,t,x))^{n-1}}}\right]^{\frac{1}{n-1}}=\left[\frac{m-1}{\frac{n-1}{s^{m-1}}+\frac{m-1}{\frac{m-1}{\frac{n-1}{s^{m-1}}+\frac{m-1}{x^{n-1}}-\frac{n-1}{t^{m-1}}}}}\right]^{\frac{1}{n-1}}=$$

$$=\left[\frac{m-1}{2\frac{n-1}{s^{m-1}}+\frac{m-1}{x^{n-1}}-\frac{n-1}{t^{m-1}}}\right]^{\frac{1}{n-1}}=\widetilde{p}_0(s,t,x)$$

Анда (11) ден төмөнкүнү алабыз:

$$u(t,x)=\varphi_0(p(0,t,x))+\int_0^t\psi_0(\widetilde{p}_0(s,t,x))ds+\int_0^t(t-\rho)f(\rho)d\rho, \tag{12}$$

Интегралда алмаштыруу жүргүзөлү:

$\int_0^t\psi_0(\widetilde{p}_0(s,t,x))ds$ интегралында $\widetilde{p}_0(s,t,x)=\tau$ алмаштыруу жүргүзөлү:

$$s=\left[\frac{2(n-1}{\frac{m-1}{\tau^{n-1}}-\frac{m-1}{x^{n-1}}+\frac{n-1}{t^{m-1}}}\right]^{\frac{1}{m-1}}=r_0(\tau,t,x),\quad (\tau,t,x)\in D_x^+,$$

$$r_0(\tau,t,\tau)=\sqrt[m-1]{2}t,\qquad ds=\frac{\partial r_0(\tau,t,x)}{\partial\tau}d\tau.$$

(12)ден:

$$u(t,x)=\varphi_0(p(0,t,x))+\int_{\widetilde{p}_0(0,t,x)}^{\widetilde{p}_0(t,t,x)}\psi_0(\tau)\frac{\partial r_0(\tau,t,x)}{\partial\tau}d\tau+\int_0^t(t-\rho)f(\rho)d\rho, \tag{13}$$

(13) функциясы (10), (2), (3) маселесинин чечимин берет.

Эми $n=1$учурун карайлы.

Анда $q(0,s,p(s,t,x))$:

$$q(0,s,p(s,t,x)=p(s,t,x)\exp\left[-\frac{1}{(m-1)s^{m-1}}\right]=x\exp\left[\frac{1}{(m-1)t^{m-1}}-\frac{1}{(m-1)s^{m-1}}-\frac{1}{(m-1)s^{m-1}}\right]=$$

$$=x\exp\left[\frac{1}{(m-1)t^{m-1}}-2\frac{1}{(m-1)s^{m-1}}\right]=\widetilde{p}_1(s,t,x),\quad (s,t,x)\in D_T.$$

$n=1$учур үчүн:

$$u(t,x)=\varphi_0(p(0,t,x))+\int_0^t\psi_0(\widetilde{p}_1(s,t,x))ds+\int_0^t(t-\rho)f(\rho)d\rho,$$

$\widetilde{p}_1(s,t,x)=\tau$ алмаштыруусун $\int\limits_0^t \psi_0(\widetilde{p}_1(s,t,x))ds$ интегралында жүргүзөбүз:

$$s=\left[\frac{2}{(m-1)[\ \frac{1}{(m-1)t^{m-1}}-\ln\frac{\tau}{x}\ ]}\right]^{\frac{1}{m-1}}=r_1(\tau,t,x),\quad (t,\tau,x)\in D_x^+,.$$

$$r_1(\tau,t,\tau)=\sqrt[m-1]{2}t,\qquad ds=\frac{\partial r_1(\tau,t,x)}{\partial\tau}d\tau.$$

Демек $n=1$учур үчүн төмөнкүдөй чечимди алабыз:

$$u(t,x)=\varphi_0(p(0,t,x))+\int\limits_{\widetilde{p}_0(0,t,x)}^{\widetilde{p}_0(t,t,x)}\psi_0(\tau)\frac{\partial r_1(\tau,t,x)}{\partial\tau}d\tau+\int\limits_0^t(t-\rho)f(\rho)d\rho.$$

Эгерде (1) теңдемесинде $m=0,\quad n=1$учурун карасак, башкача айтканда:

$$u_{tt}-x^2u_{xx}-xu_x=f(t)\tag{14}$$

(14)тү төмөнкү баштапкы шарттары менен карайлы:

$u(0,x)=x$

$u_t(0,x)=\varphi(x)$.

Табабыз:

$p(0,t,x)=x\exp\{s-t\}=xe^{s-t}$,

$\widetilde{p}_1(s,t,x)=x\exp\{2s-t\}=xe^{2s-t}$.

(14) теңдемесинин берилген шарттарды канаатандырган чечимин алабыз:

$$u(t,x)=\varphi_0(xe^{-t})+\int\limits_0^t\psi_0(xe^{2s-t})ds+\int\limits_0^t(t-s)f(s)ds$$

Биринчи интегралды берилгендерди колдонуу менен эсептөөнүн жыйынтыгында төмөнкүгө ээ болобуз:

$$u(t,x)=xcht+\int\limits_0^t(t-s)f(s)ds.$$

Алынган чечимдин коюлган маселени канаатандыраарын текшерели:

$$u_t(t,x)=xsht+\int\limits_0^t f(s)ds,$$

$$u_{tt}(t,x)=xcht+f(t)$$

$$u_x(t,x)=cht,\quad u_{xx}(t,x)=0.$$

Жыйынтыкта: $u_{tt}-x^2u_{xx}-xu_x=f(t)$.

Тыянак. Коюлган маселенин өзгөчөлүгү баштапкы шартта каралган экинчи функциянын, башкача айтканда $\varphi_1(x)$ функциясы маселенин чечимине эч кандай таасир бере албай тургандыгын көрдүк. Бирок бул функцияны баштапкы берилгендерден аныктоого болот, теңдеменин өзгөчөлүгүнө жараша.

Экинчи тартиптеги теңдемер үчүн аларды каноникалык формага келтирбей кошумча аргумент кийирүү усулун удаалаш колдонууга болоорун көрдүк.

Адабияттар:

1. Аширбаева А. Ж. Развитие метода дополнительного аргумента для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных произ-водных: Автореф. дисс. … канд. физ.-матем. наук. 01.01.02. [Текст] / А.Ж. Аширбаева // – Бишкек, 1995. – 15 с.

2. Аширбаева А. Ж. Интегро-дифференциальное уравнение в частных производных параболического типа с особенностью [Текст] / А.Ж. Аширбаева // Вестник ОшГУ. Серия физико-математических наук. –2002. – № 5. – С.66–70.
3. Аширбаева А. Ж. Применение метода дополнительного аргумента к нелинейным интегро-дифференциальным уравнениям гиперболического типа высшего порядка [Текст] / А. Ж. Аширбаева // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2004. – Вып. 33. – С. 83-87.