ОШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЖАЛАЛ-АБАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Б. ОСМОНОВА

ДИССЕРТАЦИОННЫЙ СОВЕТ К Д 05 22 651

На правах рукописи
УДК 517.968.72+74

Абдирайимова Назигай Абдинабиевна

Метод вспомогательных ядер и асимптотические свойства решений вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений на полуоси

01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы
и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ош – 2022

Диссертационная работа выполнена на кафедре математического анализа Ошского государственного университета.

Научный руководитель:	**Искандаров Самандар,** доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторий теории интегро-диффренциальных уравнений (Кыргызстан, г. Бишкек).

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации. Как известно, трудами ученых многих стран мира создано мощное научное направление-исследование асимптотических свойств (ограниченности, стремления к нулю, устойчивости, асимптотической устойчивости и.т.д.) решений интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ) типа Вольтерра при неограниченном возрастании независимой перемененной. В связи с теоретической и практической важностью исследований по этому направлению, начиная с работ В. Вольтерра (они отражены в его широко известных двух монографиях: М.: Наука, 1976, 1982 [15, 29]) в последние семьдесят лет появилось большое количество работ, многие из которых отражены в монографиях Я. В. Быкова (1957), Р. Беллмана, К. Л. Кука (1967), C. Corduneanu (1973), М. Иманалиева (1974), Н. Х. Арутюняна, В. Б. Колмановского (1983), Дж. Хейла (1984), Б. С. Разумихина (1988), А. А. Мартынюка, В. Лакшмикантама, С. Лилы (1989), А. А. Мартынюка, Д. Като, А. А. Шестакова (1990), А. А. Шестакова (1990), G. Gripenberg's, S.-O. Londen's, O. Staffans (1990), Н. В. Азбелева, В. П. Максимова, Л. Ф. Рахматуллины (1991), В. Лакшмикантама, С. Лилы, А. А. Мартынюка (1991), М. К. Дауылбаева (1999), Н. В. Азбелева, П. М. Симонова (2001), С. Искандарова (2002), T. A. Burton's (2005), R. P. Agarwal's, L. Berezansky, E. Braverman, A. Domoshnitsky (2012) и в обзорных статьях J. A. Nohel's (1964, 1971), Н. В. Азбелева, Л. Ф. Рахматуллины (1978), C. M. Dafermos, J. A. Nohel's (1979), Н. В. Азбелева, В. П. Максимова (1982), М. И. Иманалиева, Б. В. Хведелидзе, Т. Г. Гегелия, А. А. Бабаева, А. И. Боташева, (1982), Н. В. Азбелева (1985, 1988), Н. Х. Арутюняна, А. Д. Дроздова, В. Б. Колмановского (1987), O. J. Staffans (1988), S. Elaydi, S. Sivasundaram's (1989), Н. В. Азбелева, Л. М. Березанского, А. В. Чистякова (1989), М. И. Иманалиева, А. И. Боташева (1990), T. Furumochi, S. Matsuoka (1999), М. И. Иманалиева, С. Искандарова (2000), C. Tunç, O. Tunç (2018). В них разработаны новые методы и определены новые научные направления для исследований различных асимптотических свойств решений линейных и нелинейных, скалярных и векторных, функциональных и операторных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра.

Отметим, что в становление общей и качественной теории ИДУ типа Вольтерра на полуоси существенный вклад внесли такие ученые, как В. Вольтерра (1881-1940, 1976, 1982 гг.), Я. В. Быков (1951-1957 гг.), М. И. Иманалиев (1956-2015 гг.), Ю. А. Ведь (1960-2006 гг.), А. И. Боташев (1962-1998 гг.), Л. Е. Кривошеин (1962 г.), J. J. Levin (1963-1968 гг.), J. A. Nohel (1964-1971 гг.), C. Corduneanu (1963-1973 гг.), А. Д. Мышкис (1949-1977, 2003 гг.), Н. В. Азбелев (1979-2001 гг.), Н. Н. Красовский (1956-1959 гг.), Е. А. Барбашин (1957-1967 гг.), А. М. Самойленко (1973-1976 гг.), В. П. Максимов (1982-1991 гг.), Л. Ф. Рахматуллина (1978-1991 гг.), Л. Н. Березанский (1982-2012 гг.), А. И. Домошницкий (2012 г.), П. М. Симонов (1991-2001 гг.), В. Р. Винокуров (1967 г.), К. Какишов (1973-1991 гг.), К. Алымкулов (1972-1992 гг.), П. С. Панков (1971-1992 гг.), А. Саадабаев (1982-2009 гг.), Г. Ражапов (1965-1973 гг.), З. Пахыров (1971-2017 гг.), А. Асанов (1977-2022 гг.), А. Б. Байзаков (2003-2022 гг.), М. К. Дауылбаев (1979-2022 гг.), Б. С. Разумихин (1988 г.), А. А. Мартынюк (1985-1991 гг.), В. Лакшимикантам и С. Лила (1969-2007 гг.), T. A. Burton (1978-2005 гг.), R. P. Agarwal (1982-2012 гг.), G. Gripenberg, S.-O. Londen и O. Staffans (1979-1990 гг.), C. Tunç (2016-2022 гг.) и многие другие отечественные и зарубежные ученые.

Тщательный анализ опубликованных работ показывает, что несмотря на многочисленность работ кыргызских и иностранных авторов, мало проведены исследования асимптотических свойств решений при $t \in I$ линейных ИДУ типа Вольтерра высоких порядков следующего вида:

$$x^{(m)}(t) + \sum_{k=0}^{m-1} a_k(t)x^{(k)}(t) + \int_{t_0}^{t} \sum_{r=0}^{p} Q_r(t,\tau)x^{(r)}(\tau)d\tau = f(t), \ t \ge t_0, \quad (**)$$

где $p < m-1$, $Q_r(t,\tau)$ $(r = 0,1..p)$-немалые ядра, т. е. ИДУ m-го порядка с неполными ядрами $(m \ge 2)$. Здесь следует отметить, что в монографии В. Вольтерра (1982, с. 193 - 194) написано о том, что линейное однородное ИДУ второго порядка с неполным ядром, т. е. при $Q_1(t,\tau) \equiv 0$, а также с коэффициентом $a_0 = const > 0$, появляется при исследовании колебаний упругой струны в случае линейной эредитарности (линейного последействия). Такое ИДУ второго порядка получается из ИДУ с частными производными гиперболического типа при применении метода разделения переменных Фурье.

Предлагаемая диссертационная работа посвящается развитию метода вспомогательных ядер для установления достаточных условий асимптотической устойчивости и устойчивости решений линейных и слабо нелинейных ИДУ второго, третьего, четвертого и пятого порядков с неполными ядрами на полуоси, что показывает актуальность избранной темы настоящей работы.

Связь темы диссертации с приоритетными научными направлениями, крупными научными программами (проектами), основными научно-исследовательскими работами, проводимыми образовательными и научными учреждениями. Диссертационная работа выполнена в рамках научно-исследовательской темы: «Применение сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений при решении инженерно-технических и физических задач» (руководитель – д.ф.-м.н., профессор С. К. Каримов) кафедры математического анализа Ошского государственного университета (2020–2021 гг., гос. регистр. №0007520, 01.01.2018 г.) и результаты настоящей работы вошли в соответствующие отчеты по этой теме.

Цель и задачи исследования. Цель настоящей работы состоит в развитии метода вспомогательных ядер, в сочетании с другими известными методами, для решения следующих задач:

1) получить достаточные условия асимптотической устойчивости решений линейного ИДУ второго порядка типа Вольтерра с полными ядрами в случае, когда решения соответствующего линейного дифференциального уравнения (ДУ) второго порядка могут быть асимптотически неустойчивыми;
2) получить достаточные условия устойчивости решений слабо нелинейных ИДУ второго и третьего порядков типа Вольтерра с немалым ядром при неизвестной функции;
3) получить достаточные условия асимптотической устойчивости решений линейных ИДУ третьего, четвертого и пятого порядков типа Вольтерра с неполными и немалыми ядрами;
4) получить достаточные условия устойчивости решений слабо нелинейных ИДУ четвертого и пятого порядков типа Вольтерра с неполными и немалыми ядрами.

Научная новизна полученных результатов. Установлены достаточные условия:

1) асимптотической устойчивости решений линейного ИДУ второго порядка типа Вольтерра в случае, когда решения соответствующего линейного ДУ второго порядка могут быть асимптотически неустойчивыми;
2) устойчивости решений слабо нелинейных ИДУ второго и третьего порядков типа Вольтерра с немалым ядром при неизвестной функции;
3) асимптотической устойчивости решений линейных ИДУ третьего, четвертого и пятого порядков типа Вольтерра с неполными и немалыми ядрами;
4) устойчивости решений слабо нелинейных ИДУ четвертого и пятого порядков типа Вольтерра с неполными и немалыми ядрами.

Для получения этих результатов развит метод вспомогательных ядер, в сочетании с известными методами таких, как нестандартный метод сведения к системе, метод возведения уравнений в квадрат, метод преобразования уравнений В. Вольтерра, метод срезывающих функций, метод частичного срезывания, метод интегральных неравенств, и с применением леммы Люстерника-Соболева.

Практическая значимость полученных результатов. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании асимптотической устойчивости и устойчивости решений новых классов ИДУ типа Вольтерра высоких порядков с неполными и немалыми ядрами на полуоси, и в теории упругости с явлением последействия, и при исследовании устойчивости некоторых процессов, протекающих в сплошных средах с памятью, например, при исследовании устойчивости колебаний вязко-упругих тел; также при подготовке специальных курсов по теории устойчивости решений ИДУ типа Вольтерра на полуоси для студентов старших курсов, магистрантов, аспирантов, докторантов и соискателей ученых степеней.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту.

Установление достаточных условий:

1) асимптотической устойчивости решений линейного ИДУ второго порядка типа Вольтерра в случае, когда решения соответствующего линейного ДУ второго порядка могут быть асимптотически неустойчивыми;
2) устойчивости решений слабо нелинейных ИДУ второго и третьего порядков типа Вольтерра с немалым ядром при неизвестной функции;
3) асимптотической устойчивости решений линейных ИДУ третьего, четвертого и пятого порядков типа Вольтерра с неполными и немалыми ядрами;
4) устойчивости решений слабо нелинейных ИДУ четвертого и пятого порядков типа Вольтерра с неполными и немалыми ядрами;
5) Развитие метода вспомогательных ядер.

Личный вклад соискателя. В совместных работах [1-4, 6, 7, 10] постановка задач и обсуждение результатов принадлежит научному руководителю С. Искандарову, проведение доказательств теорем, следствий и построение иллюстративных примеров - соискателю.

Апробация результатов диссертации. Результаты настоящей работы доложены обсуждены на:

- Международной научной конференции «III Борубаевские чтения», посвященной 35-летию со дня образования Института математики НАН КР (г. Бишкек, ИМ НАН КР, 24 мая, 2019г.);
- Международной научно-практической конференции «Актуальные проблемы теоретической и прикладной математики», посвященной 100-летию со дня рождения профессора Кривошеина Л. Е. (г. Бишкек, КНУ им. Ж. Баласагына, 18 окт., 2019 г.);
- International Scientific Conference «Problems of Modern Mathematics» dedicated to the 70th anniversary of Academician A. A. Borubaev, (Bishkek, IM NAS, June 15–19, 2021);
- научном семинаре Отдела математики КТУ «Манас» (рук. - к.ф.-м.н., проф. КТУ «Манас» А. Б. Урдалетова, март, 2020 г.);
- региональном семинаре «Актуальные пролемы математики и их применения» имени К. Алымкулова (25 октября, 2022 г.);
- конференции “Жогорку окуу жайлардагы илим изилдөөлөрдүн фундаменталдык жана колдонмо маанилүүлүгү” (Жалал-Абад, 12 ноября, 2022 г.).

Полнота отражения результатов диссертации в публикациях. Основное содержание диссертации опубликовано в 9 статьях [1-9] и в тезисах Международной конференции [10], список которых приведен в конце автореферата. Отметим, что статья [3] входит в базу данных Scopus.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из перечня сокращений и обозначений, введения, четырех глав, 11 разделов, заключения, практических рекомендации и списка использованных источников из 88 наименований, 100 стр. компьютерного текста.

В автореферате использована и сохранена система нумерации, принятая в диссертации: принята двойная сквозная нумерация внутри каждой главы. Например, формула (1.3) - это третья формула главы 1, теорема 2.4 - это четвертая теорема главы 2.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Материалы диссертации изложены в следующей последовательности.

Во ВВЕДЕНИИ дано обоснование актуальности темы, общая характеристика работы, цель и задачи исследования, научная новизна, практическая значимость, а также основные положения, выносимые на защиту.

В главе 1 “ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ” состоящей из двух разделов, дается обзор работ других авторов по теме диссертации и заключение, где определены нерешенные ранее задачи для исследований.

Глава 2 “МЕТОДОЛОГИЯ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ” состоит из двух разделов и в ней определены объект, предмет и поставлены конкретные задачи для исследований, дан краткий обзор некоторых качественных методов, связанных с решениями задач настоящей работы. Изложены содержания применяемых и развиваемых методов, помогающих при решении поставленных в данной работе задач таких, как метод вспомогательных ядер, нестандартный метод сведения к системе, метод преобразования уравнений В. Вольтерра, метод интегральных неравенств, метод возведения уравнений в квадрат, метод срезывающих функций, метод частичного срезывания. Приведены также леммы о некоторых преобразованиях, интегральном неравенстве и лемма Люстерника-Соболева.

Глава 3 “МЕТОД ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ЯДЕР И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ И АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРО - ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКОВ ТИПА ВОЛЬТЕРРА С НЕПОЛНЫМИ ЯДРАМИ НА ПОЛУОСИ” состоящей из четырех разделов, посвящена развитию метода вспомогательных ядер, с применением других известных методов, к исследованию вопросов асимптотической устойчивости и устойчивости решений линейных и слабо нелинейных ИДУ типа Вольтерра второго и третьего порядков на полуинтервале I.

В разделе 3.1 решена задача, где установлены достаточные условия асимптотической устойчивости решений линейного ИДУ второго порядка типа Вольтерра вида:

$$x''(t)+a_1(t)x'(t)+a_0(t)x(t)+\int_{t_0}^{t}\left[Q_0(t,\tau)x(\tau)+Q_1(t,\tau)x'(\tau)\right]d\tau=f(t),\quad t\ge t_0 \quad (3.1)$$

в случае, когда решения соответствующего ДУ второго порядка

$$x''(t)+a_1(t)x'(t)+a_0(t)x(t)=f(t),\quad t\ge t_0 \qquad (3.1_0)$$

могут быть асимптотически неустойчивыми, т. е. выявлено влияние интегральных возмущений на асимптотическую устойчивость решений линейного ДУ (3.1_0).

Методика исследования этой задачи такова: развивается метод вспомогательных ядер в сочетании с такими методами, как нестандартный метод сведения к системе, метод возведения уравнений в квадрат, метод преобразования уравнений В. Вольтерра, метод срезывающих функций, метод интегральных неравенств и применяется лемма Люстерника-Соболева.

Приведем основные результаты этого раздела. В ИДУ (3.1), следуя С. Искандарову (1998 г.), вводим некоторое вспомогательное ядро $H(t,\tau)$ с $x'(\tau)$ по правилу "веса":

$$\begin{aligned}&Q_0(t,\tau)x(\tau)+Q_1(t,\tau)x'(\tau)=Q_0(t,\tau)x(\tau)+\\&+\left[Q_1(t,\tau)-H(t,\tau)\right]x'(\tau)+H(t,\tau)x'(\tau),\end{aligned} \qquad (3.2)$$

затем проводим интегрирование по частям:

$$\int_{t_0}^{t}H(t,\tau)x'(\tau)d\tau=H(t,t)x(t)-H(t,t_0)x(t_0)-\int_{t_0}^{t}H'_\tau(t,\tau)x(\tau)d\tau. \quad (3.3)$$

Тогда с учетом (3.2), (3.3), из ИДУ (3.1) имеем следующее нагруженное ИДУ:

$$\begin{aligned}&x''(t)+a_1(t)x'(t)+\left[a_0(t)+H(t,t)\right]x(t)+\\&+\int_{t_0}^{t}\left\{\left[Q_0(t,\tau)-H'_\tau(t,\tau)\right]x(\tau)+\left[Q_1(t,\tau)-H(t,\tau)\right]x'(\tau)\right\}d\tau=\\&=f(t)+H(t,t_0)x(t_0).\end{aligned} \qquad (3.4)$$

Теперь в ИДУ (3.4) сделаем нестандартную замену С. Искандарова (2006 г.): $x'(t)+\lambda^2x(t)=W(t)y(t)$, т.е. применяем нестандартный метод сведения к системе и ИДУ (3.4) сводим к следующей эквивалентной системе:

$$\begin{cases}x'(t)+\lambda^2x(t)=W(t)y(t),\\ y'(t)+b_1(t)y(t)+b_0(t)x(t)+\\ +\int_{t_0}^{t}\left[P(t,\tau)x(\tau)+K(t,\tau)y(\tau)\right]d\tau=F(t)+(W(t))^{-1}H(t,t_0)x(t_0),\end{cases} \qquad (3.6)$$

где $b_1(t) \equiv a_1(t) - \lambda^2 + W'(t)(W(t))^{-1}$, $b_0(t) \equiv \left[a_0(t) + H(t,t) - \lambda^2 a_1(t) + \lambda^4\right](W(t))^{-1}$,
$P(t,\tau) \equiv (W(t))^{-1}[Q_0(t,\tau) - H'_\tau(t,\tau) + \lambda^2 H(t,\tau) - \lambda^2 Q_1(t,\tau)]$,
$K(t,\tau) \equiv (W(t))^{-1}[Q_1(t,\tau) - H(t,\tau)]W(\tau)$, $\quad F(t) \equiv f(t)(W(t))^{-1}$.

К исследованию системы (3.6) применяем метод С. Искандарова (2012 г.), т.е. каждое уравнение изучаем отдельным методом, а именно к первому уравнению системы (3.6) применяем метод возведения в квадрат (С. Искандаров, 1981, 2002 гг.), к второму - применяем метод срезывающих функций - следуя С. Искандарову (1980, 2002 гг.), введем предположения и обозначения:

$$K(t,\tau) = \sum_{i=0}^{n} K_i(t,\,\tau), \qquad F(t) = \sum_{i=0}^{n} F_i(t), \qquad (K), (F)$$

$$R_i(t,\tau) \equiv K_i(t,\tau)\big(\psi_i(t)\psi_i(\tau)\big)^{-1},\ E_i(t) \equiv F_i(t)\big(\psi_i(t)\big)^{-1} \qquad (i = 1..n),$$

$$R_i(t,t_0) = A_i(t) + B_i(t) \ \ (i = 1..n), \qquad (R)$$

$\psi_i(t)$ $\ (i = 1..n)$ - некоторые срезывающие функции,
$c_i(t)$ $\ (i = 1..n)$ - некоторые функции, и используем леммы 2.4, 2.5 из докторской диссертации С. Искандарова (Бишкек, 2003 г.). Отдельные преобразования для каждого уравнения системы (3.6) сложим и применяем метод интегральных неравенств Ю. А. Ведь, З. Пахырова (1973 г.). В итоге получаем следующую теорему

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть 1) $\lambda \neq 0,\ W(t) > 0;$ выполняются условия (K), (F), (R); 2) $b_1(t) \geq 0;$ 3) $A_i(t) \geq 0,\ B_i(t) \geq 0,\ B_i'(t) \leq 0,\ R'_{i\tau}(t,\tau) \geq 0,$ существуют функции $A_i^*(t) \in L^1(I, R_+),\ c_i(t),\ R_i^*(t) \in L^1(I, R_+)$ такие, что $A_i'(t) \leq A_i^*(t) A_i(t)$, $\left(E_i^{(k)}(t)\right)^2 \leq B_i^{(k)}(t) c_i^{(k)}(t),\ R''_{it\tau}(t,\tau) \leq R_i^*(t) R'_{i\tau}(t,\tau) \quad (i = 1..n;\ k = 0,1);$
4) $(W(t))^2 + |b_0(t)| + |F_0(t)| + (W(t))^{-1}|H(t,t_0)| + $
$+\int\limits_{t_0}^{t} [|P(t,\tau)| + |K_0(t,\tau)|] d\tau \in L^1(I, R_+ \setminus \{0\}).$ Тогда для любого решения $(x(t), y(t))$ системы (3.6) справедливы утверждения: $x^{(k)}(t) \in L^2(I,R)$ $\ (k = 0,1)$, $x(t) = O(1)$, $\ y(t) = O(1)$,

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Если выполняются все условия теоремы 3.1 и $W(t) \to 0$ при $t \to \infty$, то для любого решения $x(t)$ ИДУ (3.1) верны утверждения: $x^{(k)}(t) \to 0$ $\ (k = 0,1)$ при $t \to \infty$, т.е. любое решение $x(t)$ ИДУ (3.1) асимптотически устойчиво.

На самом деле, во-первых, в силу леммы Люстерника-Соболева: «если $x^{(k)}(t) \in L^2(I,R)$ $\ (k = 0,1)$ то $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$» (1965, 2012 гг.) из (3.10) следует, что любое решение $x(t)$ ИДУ (3.1): $x(t) \to 0$ при $t \to \infty;$ во-вторых, из замены (3.5) на основании $x(t) \to 0$, $W(t) \to 0,$ $t \to \infty;$ и $y(t) = O(1)$ вытекает, что $x'(t) \to 0$

при $t \to \infty$. Следовательно, любое решение $x(t)$ ИДУ (3.1) асимптотически устойчиво.

ПРИМЕР 3.1. Для ИДУ (3.1) с $t_0 = 0$, $a_1(t) \equiv 4e^{5t} + e^{-3t}$, $a_0(t) \equiv -1$,

$$Q_0(t,\tau) \equiv 36e^{-5t+10\tau}\sqrt{t-\tau+1} - \frac{2e^{-5t+10\tau}}{\sqrt{t-\tau+1}} + Q_1(t,\tau) + \frac{e^{-t}}{e^t + e^\tau + 2},$$

$$Q_1(t,\tau) \equiv -\frac{e^{-t+\tau}|\cos\tau|}{(t+\tau+1)^{10}}\left\{\left[\exp\left(\frac{\sin t}{(t+5)^2}\right)+\tau\right]^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{t-\tau+2}\right\}\times$$

$$\times\exp(\sqrt[3]{t\sin t} + t^2 + \sqrt[3]{\tau\sin\tau} + \tau^2) +$$

$+4e^{-5t+10\tau}\sqrt{t-\tau+1} - \dfrac{e^{-t+\tau}|\cos\tau|}{(t+\tau+1)^{10}}$, $f(t) \equiv -\dfrac{e^{-t}\exp(\sqrt[3]{t\sin t} + t^2)}{t+3}$ выполняются все условия теоремы 3.1 и следствия 3.1 при $H(t,\tau) \equiv 4e^{-5t+10\tau}\sqrt{t-\tau+1}$, $\lambda = 1$, $W(t) \equiv e^{-t}$,

здесь $b_1(t) = 4e^{5t} + e^{-3t} - 2$, $b_0(t) \equiv -e^{-2t}$,

$$P(t,\tau) \equiv \frac{1}{e^t + e^\tau + 2}, \; n = 1, \; \psi_1(t) \equiv \exp(t^2 + \sqrt[3]{t\sin t}),$$

$$R_1(t,\tau) \equiv \left[\exp\left(\frac{\sin t}{(t+5)^2}\right) + \tau\right]^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{t-\tau+2},$$

$$A_1(t) \equiv \exp\left(\frac{\sin t}{2(t+5)^2}\right), \; A_1^*(t) \equiv R_1^*(t) \equiv \frac{t+7}{(t+5)^3}, \; B_1(t) \equiv \frac{1}{t+2},$$

$E_1(t) \equiv -\dfrac{1}{t+3}$, $c_1(t) \equiv \dfrac{1}{t+2}$. Значит, любое решение такого ИДУ асимптотически устойчиво. Однако, для соответствующего ДУ второго порядка: $x''(t) + (4e^{5t} + e^{-3t})x'(t) - x(t) = 0$, $t \ge 0$, как отмечено Д. Р Меркиным (1987 г.), любое его решение не может быть асимптотически устойчивым, т. к. $a_0(t) \equiv -1 < 0$.

Раздел 3.2 посвящен развитию метода вспомогательных ядер, как в разделе 3.1 вводится некоторое вспомогательное ядро $H(t,\tau)$ по правилу (3.2), с использованием метода преобразования уравнений В. Вольтерра (1976 г.), метода частичного срезывания (С. Искандаров, Д. Н. Шабданов, 2004 г.), и метода интегральных неравенств Ю. А. Ведь, З. Пахырова (1973 г.), установлены достаточные условия устойчивости решений слабо нелинейного ИДУ второго порядка типа Вольтерра вида

$$x''(t) + a_0(t)x(t) + \int_{t_0}^{t} Q_0(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t) +$$

$$+F(t,x(t),\int_{t_0}^{t} h(t,\tau,x(\tau))d\tau), \quad t \geq t_0 \qquad (3.13)$$

при немалости неполного ядра, т. е. в случае, когда выполняется условие:

$$\int_{t_0}^{\infty}\int_{t_0}^{t} |Q_0(t,\tau)| d\tau dt = \infty$$

и со слабой нелинейностью:

$$|F(t,x,y)| \leq F_0(t) + g_0(t)|x| + g_1(t)|y|, \quad |h(t,\tau,x)| \leq g_2(t,\tau)|x| \qquad (F,\, h)$$

с неотрицательными $F_0(t), g_k(t), g_2(t,\tau)$ $(k = 0{,}1)$. Отметим, что в данном разделе не применили нестандартный метод сведения к системе, а при применении метода преобразования уравнений В. Вольтерра преобразованное нагруженное ИДУ второго порядка типа Вольтерра на полуоси умножается на $x'(t)$; метода частичного срезывания используются предположения и обозначения:

$$H(t,\tau) = \sum_{i=1}^{n} H_i(t,\tau),$$

$\psi_i(t)$ $(i = 1..n)$ - некоторые срезывающие функции, $P_i(t) \equiv H_i(t,t)(\psi_i(t))^{-2}$, $T_i(t,\tau) \equiv H_i(t,\tau)(\psi_i(\tau))^{-1}$ - частично срезанные ядра $(i = 1..n)$;

$f(t) = \sum_{i=0}^{n} f_i(t)$, $E_i(t) \equiv f_i(t)(\psi_i(t))^{-1}$ $(i = 1..n)$, а также некоторые функции $c_i(t)$ $(i = 1..n)$, связывающие функции $P_i(t)$ и $E_i(t)$ $(i = 1..n)$ аналогично, как в условии 3) теоремы 3.1 раздела 3.1, где вместо $B_i(t)$ стоит $P_i(t)$ $(i = 1..n)$.

В разделе 3.3 методика исследования раздела 3.1 развивается для установления достаточных условий асимптотической устойчивости решений линейного ИДУ третьего порядка типа Вольтерра вида:

$$\begin{gathered} x'''(t) + a_2(t)x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + \\ +\int_{t_0}^{t} \left[Q_0(t,\tau)x(\tau) + Q_1(t,\tau)x'(\tau)\right] d\tau = f(t), \quad t \geq t_0 \end{gathered} \qquad (3.21)$$

в случае, когда ядра $Q_k(t,\tau)$, $(k = 0, 1)$ - немалые, т. е. выполняются условия:

$$\int_{t_0}^{\infty}\int_{t_0}^{t} |Q_k(t,\tau)| d\tau dt = \infty \quad (k = 0, 1).$$

В данном случае вводится некоторое вспомогательное ядро $H(t,\tau)$ с $x''(\tau)$ следующим образом:

$$\begin{gathered} Q_0(t,\tau)x(\tau) + Q_1(t,\tau)x'(\tau) = Q_0(t,\tau)x(\tau) + Q_1(t,\tau)x'(\tau) + \\ +H(t,\tau)x''(\tau) - H(t,\tau)x''(\tau) \end{gathered}$$

и делается следующее интегрирование по частям:

$$-\int_{t_0}^{t} H(t,\tau)x''(\tau)d\tau = -H(t,t)x'(t) + H(t,t_0)x'(t_0) + \int_{t_0}^{t} H'_\tau(t,\tau)x'(\tau)d\tau$$

и ИДУ (3.21) сводится к следующему нагруженному ИДУ:

$$\begin{gathered}x'''(t)+a_2(t)x''(t)+a(t)x'(t)+a_0(t)x(t)+\\+\int\limits_{t_0}^{t}\left[Q_0(t,\tau)x(\tau)+Q(t,\tau)x'(\tau)+H(t,\tau)x''(\tau)\right]d\tau=f(t)-H(t,t_0)x'(t_0),\end{gathered}\tag{3.24}$$

где $a(t)\equiv a_1(t)-H(t,t),\qquad Q(t,\tau)\equiv Q_1(t,\tau)+H'_\tau(t,\tau).$

В ИДУ (3.24) также, как в разделе 3.1. делается нестандартная замена: $x'(t)+\lambda^2x(t)=W(t)y(t)$, что приводит нагруженное ИДУ третьего порядка (3.24) к эквивалентной системе из одного ДУ первого порядка для $x(t)$ из одного ИДУ второго порядка для $y(t)$. К первому уравнению этой системы применяется метод возведения уравнений в квадрат, а второму уравнению - метод преобразования уравнений В. Вольтерра (умножается на $y'(t)$) и метод срезывающих функций, отдельные преобразования для каждого уравнения сложатся, затем применяется метод интегральных неравенств Ю. А. Ведь, З. Пахырова (1973 г.). В конце используется лемма Люстерника-Соболева.

В разделе 3.4 решена задача 3.4, т.е. установлены достаточные условия устойчивости решений следующего ИДУ третьего порядка типа Вольтерра вида:

$$\begin{gathered}x'''(t)+a_2(t)x''(t)+a_1(t)x'(t)+a_0(t)x(t)+\int\limits_{t_0}^{t}Q_0(t,\tau)x(\tau)d\tau=f(t)+\\+F(t,x(t),\int\limits_{t_0}^{t}h(t,\tau,x(\tau))d\tau),\quad t\ge t_0\end{gathered}\tag{3.33}$$

в случае немалости ядра $Q_0(t,\tau)$, т. е. при

$$\int\limits_{t_0}^{\infty}\int\limits_{t_0}^{t}\left|Q_0(t,\tau)\right|d\tau dt=\infty$$

и при слабой нелинейности:

$$\left|F(t,x,y)\right|\le F_0(t)+g_0(t)\left|x\right|+g_1(t)\left|y\right|,\quad \left|h(t,\tau,x)\right|\le g_2(t,\tau)\left|x\right| \tag{SN}$$

с неотрицательными $F_0(t),g_0(t),g_1(t),g_2(t,\tau)$.

<u>Методика исследования задачи 3.4 такова</u>: развивается метод вспомогательных ядер в сочетании с такими методами, как нестандартный метод сведения к системе, метод преобразования уравнений В. Вольтерра, метод срезывающих функций и метод интегральных неравенств.

В данном разделе ИДУ (3.33) вводим некоторое вспомогательное ядро $H_2(t,\tau)$ с $x''(\tau)$ аналогично правилу “веса” (3.2) раздела 3.1:

$$Q_0(t,\tau)x(\tau)=Q_0(t,\tau)x(\tau)-H_2(t,\tau)x''(\tau)+H_2(t,\tau)x''(\tau).\tag{3.34}$$

Далее с учетом соотношения (3.34) проведем 2 раза подряд интегрирование по частям:

$$-\int\limits_{t_0}^{t}H_2(t,\tau)x''(\tau)d\tau=-H_2(t,t)x'(t)+H_2(t,t_0)x'(t_0)+\int\limits_{t_0}^{t}H'_{2\tau}(t,\tau)x'(\tau)d\tau=$$

$$= -H_2(t,t)x'(t) + H_2(t,t_0)x'(t_0) + H'_{2\tau}(t,t)x(t) -$$
$$-H'_{2\tau}(t,t_0)x(t_0) - \int_{t_0}^{t} H''_{2\tau\tau}(t,\tau)x(\tau)d\tau,$$

где $H'_{2\tau}(t,t) \equiv \frac{\partial H_2(t,\tau)}{\partial \tau}\Big|_{\tau=t}$. Тогда ИДУ (3.33) сводится к следующему нагруженному ИДУ:

$$\begin{aligned} & x'''(t) + a_2(t)x''(t) + \left[a_1(t) - H_2(t,t)\right]x'(t) + \left[a_0(t) + H'_{2\tau}(t,t)\right]x(t) + \\ & + \int_{t_0}^{t} \left\{ \left[Q_0(t,\tau) - H''_{2\tau\tau}(t,\tau)\right]x(\tau) + H_2(t,\tau)x''(\tau) \right\} d\tau = \\ & = f(t) - H_2(t,t_0)x'(t_0) + +H'_{2\tau}(t,t_0)x(t_0) + \\ & + F(t, x(t), \int_{t_0}^{t} h(t,\tau,x(\tau))d\tau),\ t \ge t_0. \end{aligned} \tag{3.36}$$

К нагруженному ИДУ (3.36) применим метод нестандартного сведения к системе, т.е. следуя С. Искандарову (2006 г.) сделаем нестандартную замену: $x''(t) + \lambda^2 x(t) = W(t)y(t)$, что приводит ИДУ (3.36) к эквивалентной системе из одного ДУ второго порядка для $x(t)$ и одного ИДУ первого порядка для $y(t)$. Далее эту систему исследуем методом преобразования уравнений В. Вольтерра (1976 г.), при этом первое уравнение этой системы умножаем на $x'(t)$, а второе - на $y(t)$, развиваем метод срезывающих функций и метод интегральных неравенств, как в разделе 3.1.

В главе 4 “МЕТОД ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ЯДЕР И ДОСТАТОЧНЫЕ ПРИЗНАКИ УСТОЙЧИВОСТИ И АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО И ПЯТОГО ПОРЯДКОВ ТИПА ВОЛЬТЕРРА С НЕПОЛНЫМИ ЯДРАМИ НА ПОЛУОСИ” состоящей из четырех разделов изучаются вопросы асимптотической устойчивости и устойчивости решений линейных и слабо нелинейных ИДУ типа Вольтерра четвертого и пятого порядков с неполными и немалыми ядрами на полуоси.

В разделе 4.1 решена задача 4.1, т.е. найдены достаточные условия асимптотической устойчивости решений ИДУ четвертого порядка типа Вольтерра вида:

$$\begin{aligned} & x^{(4)}(t) + a_3(t)x'''(t) + a_2(t)x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + \\ & + \int_{t_0}^{t} \left[Q_0(t,\tau)x(\tau) + Q_1(t,\tau)x'(\tau) + Q_2(t,\tau)x''(\tau)\right]d\tau = f(t), \quad t \ge t_0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

в случае, когда ядра $Q_k(t,\tau)$ $(k = 0, 1, 2)$ - немалые, т.е. при

$$\int_{t_0}^{\infty}\int_{t_0}^{t} \left|Q_k(t,\tau)\right| d\tau dt = \infty \quad (k = 0, 1, 2). \tag{Q_{k2}}$$

Отметим, что методика исследования задачи 4.1 аналогична методике исследования задачи 3.1. В этом случае в ИДУ (4.1) вводим некоторое вспомогательное ядро $H_1(t,\tau)$ с $x'''(\tau)$ следующим образом:

$$\sum_{k=0}^{2} Q_k(t,\tau)x^{(k)}(\tau) = \sum_{k=0}^{2} Q_k(t,\tau)x^{(k)}(\tau) + H_1(t,\tau)x'''(\tau) - H_1(t,\tau)x'''(\tau) \qquad (4.2)$$

и осуществляем интегрирование по частям:

$$-\int_{t_0}^{t} H_1(t,\tau)x'''(\tau)d\tau = -H_1(t,t)x''(t) + H_1(t,t_0)x''(t_0) + \int_{t_0}^{t} H'_{1\tau}(t,\tau)x''(\tau)d\tau$$

и в преобразованном нагруженном ИДУ четвертого порядка сделаем нестандартную замену (С. Искандаров, 2012 г.): $x'''(t) + px''(t) + qx'(t) + rx(t) = W(t)y(t)$. Затем первое уравнение, т.е. ДУ третьего порядка, полученной эквивалентной системы исследуем методом возведения уравнений в квадрат, а второе уравнение-методом срезывающих функций.

Раздел 4.2 посвящен решению задачи 4.2, т.е. найдены достаточные условия устойчивости решений слабо нелинейного ИДУ четвертого порядка типа Вольтерра вида

$$\begin{aligned} &x^{(4)}(t) + a_3(t)x'''(t) + a_2(t)x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + \\ &+\int_{t_0}^{t} [Q_0(t,\tau)x(\tau) + Q_1(t,\tau)x'(\tau) + Q_2(t,\tau)x''(\tau)]d\tau = \\ &= f(t) + F(t, x(t), x'(t), \int_{t_0}^{t} h(t,\tau,x(\tau),x'(\tau))d\tau), \quad t \ge t_0 \end{aligned} \qquad (4.12)$$

при немалости ядер $Q_k(t,\tau)$ $(k = 0,1,2)$, т. е. при условии (Q_{k2}) раздела 4.1 и при условии слабой нелинейности функций $F(t,x,y,z), h(t,\tau,x,y)$:

$$\begin{aligned} &|F(t,x,y,z)| \le F_0(t) + g_0(t)|x| + g_1(t)|y| + g_2(t)|z|, \\ &|h(t,\tau,x,y)| \le g_3(t,\tau)|x| + g_4(t,\tau)|y| \end{aligned} \qquad (SN)$$

с неотрицательными $F_0(t),\ g_k(t),\ g_v(t,\tau)$ $\qquad (k = 0,1,2;\ v = 0,1).$

Методика исследования задачи 4.2 аналогична методике исследования задачи 3.4. Приведем основные результаты этого раздела.

Следуя разделу 4.1, в ИДУ (4.12) вводим некоторое вспомогательное ядро $H_3(t,\tau)$ с $x'''(\tau)$ по правилу “веса”:

$$\sum_{k=0}^{2} Q_k(t,\tau)x^{(k)}(\tau) = \sum_{k=0}^{2} Q_k(t,\tau)x^{(k)}(\tau) + H_3(t,\tau)x'''(\tau) - H_3(t,\tau)x'''(\tau). \quad (4.13)$$

и интегрированием по частям имеем

$$-\int_{t_0}^{t} H_3(t,\tau)x'''(\tau)d\tau = -H_3(t,t)x''(t) + H_3(t,t_0)x''(t_0) + \int_{t_0}^{t} H'_{3\tau}(t,\tau)x''(\tau)d\tau. \, (4.14)$$

Тогда на основании (4.13), (4.14) из ИДУ (4.12) получается следующее нагруженное ИДУ четвертого порядка:

$$
\begin{aligned}
&x^{(4)}(t)+a_3(t)x'''(t)+\left[a_2(t)-H_3(t,t)\right]x''(t)+\\
&+a_1(t)x'(t)+a_0(t)x(t)+\int_{t_0}^{t}\{Q_0(t,\tau)x(\tau)+Q_1(t,\tau)x'(\tau)+\\
&+\left[Q_2(t,\tau)+H'_{3\tau}(t,\tau)\right]x''(\tau)+H_3(t,\tau)x'''(\tau)\}d\tau=\\
&=f(t)-H_3(t,t_0)x''(t_0)+F(t,x(t),x'(t),\int_{t_0}^{t}h(t,\tau,x(\tau),x'(\tau))d\tau),\quad t\ge t_0.
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

В преобразованном ИДУ (4.15) сделаем нестандартную замену С. Искандарова (2006 г.): $x''(t)+\lambda^2x(t)=W(t)y(t)$ и аналогично С. Искандарову, Д. Н. Шабданову (2007 г.) ИДУ (4.15) сведем к следующей эквивалентной системе:

$$
\begin{cases}
x''(t)+\lambda^2x(t)=W(t)y(t),\\
y''(t)+b_3(t)y'(t)+b_2(t)y(t)+b_1(t)x'(t)+b_0(t)x(t)+\\
+\int_{t_0}^{t}\left[T_0(t,\tau)x(\tau)+T_1(t,\tau)x'(\tau)+T_2(t,\tau)y(\tau)+K(t,\tau)y'(\tau)\right]d\tau=\\
=(W(t))^{-1}[f(t)-H_3(t,t_0)x''(t_0)]+\\
+(W(t))^{-1}F(t,x(t),x'(t),\int_{t_0}^{t}h(t,\tau,x(\tau),x'(\tau))d\tau),\quad t\ge t_0,
\end{cases}
\tag{4.17}
$$

где

$b_3(t)\equiv a_3(t)+2W'(t)(W(t))^{-1}$,

$b_2(t)\equiv a_2(t)-H_3(t,t)-\lambda^2+a_3(t)W'(t)(W(t))^{-1}+W''(t)(W(t))^{-1}$,

$b_1(t)\equiv[a_1(t)-\lambda^2a_3(t)](W(t))^{-1}$,

$b_0(t)\equiv[a_0(t)-\lambda^2a_2(t)+\lambda^2H_3(t,t)+\lambda^4](W(t))^{-1}$,

$T_0(t,\tau)\equiv(W(t))^{-1}[Q_0(t,\tau)-\lambda^2Q_2(t,\tau)-\lambda^2H'_{3\tau}(t,\tau)]$,

$T_1(t,\tau)\equiv(W(t))^{-1}[Q_1(t,\tau)-\lambda^2H_3(t,\tau)]$,

$T_2(t,\tau)\equiv(W(t))^{-1}[Q_2(t,\tau)W(\tau)+H'_{3\tau}(t,\tau)W(\tau)+H_3(t,\tau)W'(\tau)]$,

$K(t,\tau)\equiv(W(t))^{-1}H_3(t,\tau)W(\tau)$.

К исследованию системы (4.17) применим метод преобразования уравнений В. Вольтерра (1976 г.): первое уравнение умножаем на $x'(t)$, а второе - на $y'(t)$. Далее аналогично, как в разделе 3.1 применим метод срезывающих функций, т.е. введем предположения и обозначения (С. Искандаров, 1980, 2002 гг.):

$$K(t,\tau)=\sum_{i=0}^{n}K_i(t,\tau), \qquad (K), \qquad\qquad (W(t))^{-1}f(t)=\sum_{i=0}^{n}f_i(t), \quad (f)$$

$$R_i(t,\tau)\equiv K_i(t,\tau)\left(\psi_i(t)\psi_i(\tau)\right)^{-1}, \; E_i(t)\equiv f_i(t)\left(\psi_i(t)\right)^{-1} \qquad (i=1..n),$$

$$R_i(t,t_0)=A_i(t)+B_i(t) \qquad (i=1..n), \qquad (R)$$

$\psi_i(t)$ $(i=1..n)$ - некоторые срезывающие функции,

$c_i(t)$ $(i=1..n)$ - некоторые функции, используем леммы 1.4, 1.5 из докторской диссертации С. Искандарова (Бишкек, 2003 г.), применяем метод интегральных неравенств Ю. А. Ведь, З. Пахырова (1973 г.), что приведет к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть 1) $\lambda\neq 0, W(t)>0,$ выполняются условия *(SN), (K), (f), (R);* 2) $b_3(t)\geq 0;$ 3) $b_2(t)\geq b_{20}>0,$ существует функция $0\leq b_2^*(t)\in L^1(I,R_+)$ такая, что $b_2'(t)\leq b_2^*(t)b_2(t);$ 4) $A_i(t)\geq 0,\ B_i(t)\geq 0,\ B_i'(t)\leq 0,\ R_{i\tau}'(t,\tau)\geq 0,$ существуют функции $A_i^*(t)\in L^1(I,R_+),\ c_i(t),\ R_i^*(t)\in L^1(I,R_+)$ такие, что $A_i'(t)\leq A_i^*(t)A_i(t),$ $(E_i^{(k)}(t))^2\leq B_i^{(k)}(t)c_i^{(k)}(t)\ (i=1..n;\ k=0,1);$

5) $W(t)+\left|f_0(t)\right|+(W(t))^{-1}\left|H_3(t,t_0)\right|+\left|b_k(t)\right|+\int\limits_{t_0}^{t}\left[\left|T_j(t,\tau)\right|+\left|K_0(t,\tau)\right|\right]d\tau+$

$+(W(t))^{-1}\{F_0(t)+g_k(t)+\int\limits_{t_0}^{t}g_2(t)[g_3(t,\tau)+g_4(t,\tau)]d\tau\}\in L^1(I,R_+\setminus\{0\})$

$(k=0,1;\ j=0,1,2).$

Тогда для любого решения $(x(t),y(t))$ системы (4.17) верны утверждения:

$$x^{(k)}(t)=O(1) \qquad (k=0,1), \qquad y^{(k)}(t)=O(1) \qquad (k=0,1),$$

пусть, кроме того, 6) $W^{(k)}(t)=O(1)\ (k=0,1)$. Тогда для любого решения $x(t)$ ИДУ (4.12): $x^{(v)}(t)=O(1)\,(v=0,1,2,3),$ т. е. любое решение ИДУ (4.12) устойчиво.

В разделе 4.3 решена задача 4.3, т.е. развитием методики исследований задач 3.1, 3.3, 4.1 найдены достаточные условия асимптотической устойчивости решений ИДУ пятого порядка типа Вольтерра вида:

$$\begin{aligned}&x^{(5)}(t)+a_4(t)x^{(4)}(t)+a_3(t)x'''(t)+a_2(t)x''(t)+a_1(t)x'(t)+a_0(t)x(t)+\\&+\int\limits_{t_0}^{t}\left[Q_0(t,\tau)x(\tau)+Q_1(t,\tau)x'(\tau)+Q_2(t,\tau)x''(\tau)+Q_3(t,\tau)x'''(\tau)\right]d\tau=\\&=f(t),\quad t\geq t_0\end{aligned} \qquad (4.22)$$

в случае, когда ядра $Q_k(t,\tau)$ $(k=0,1,2,3)$ - немалые, т.е. при

$$\int\limits_{t_0}^{\infty}\int\limits_{t_0}^{t}\left|Q_k(t,\tau)\right|d\tau dt=\infty \quad (k=0,1,2,3). \qquad (Q_{k3})$$

Отметим, что развитие методики исследований задач 3.1, 3.3, 4.1 для задачи 4.3 состоит в следующем: в ИДУ (4.22) вводим некоторое вспомогательное ядро $H_4(t,\tau)$ с $x^{(4)}(\tau)$ следующим образом:

$$\sum_{k=0}^{3} Q_k(t,\tau)x^{(k)}(\tau)=\sum_{k=0}^{3} Q_k(t,\tau)x^{(k)}(\tau)+H_4(t,\tau)x^{(4)}(\tau)-H_4(t,\tau)x^{(4)}(\tau) \quad (4.23)$$

и проводим интегрирование по частям:

$$-\int_{t_0}^{t} H_4(t,\tau)x^{(4)}(\tau)d\tau=-H_4(t,t)x'''(t)+H_4(t,t_0)x'''(t_0)+\int_{t_0}^{t} H'_{4\tau}(t,\tau)x'''(\tau)d\tau. \quad (4.24)$$

Тогда с учетом (4.23), (4.24) из ИДУ (4.22) переходим к следующему нагруженному ИДУ:

$$\begin{gathered}
x^{(5)}(t)+a_4(t)x^{(4)}(t)+\left[a_3(t)-H_4(t,t)\right]x'''(t)+ \\
+a_2(t)x''(t)+a_1(t)x'(t)+a_0(t)x(t)+ \\
+\int_{t_0}^{t}\{Q_0(t,\tau)x(\tau)+Q_1(t,\tau)x'(\tau)+Q_2(t,\tau)x''(\tau)+ \\
+\left[Q_3(t,\tau)+H'_{4\tau}(t,\tau)\right]x'''(\tau)+H_4(t,\tau)x^{(4)}(\tau)\}d\tau = f(t)-H_4(t,t_0)x'''(t_0).
\end{gathered} \quad (4.25)$$

К ИДУ (4.25) применим нестандартный метод сведения к системе, как и в разделе 4.1, а именно в ИДУ (4.25) сделаем следующую нестандартную замену (С. Искандаров, 2012 г.): $x'''(t)+px''(t)+qx'(t)+rx(t)=W(t)y(t)$. Затем первое уравнение, т.е. ДУ третьего порядка, полученной эквивалентной системы исследуем методом возведения уравнений в квадрат, а второе уравнение, т.е. ИДУ второго порядка - методом преобразования уравнений В. Вольтерра (умножаем на $y'(t)$) и методом срезывающих функций.

Раздел 4.4 посвящен решению задачи 4.4, т.е. установлены достаточные условия устойчивости решений ИДУ пятого порядка типа Вольтерра вида:

$$\begin{gathered}
x^{(5)}(t)+\sum_{k=0}^{4} a_k(t)x^{(k)}(t)+\int_{t_0}^{t}\sum_{j=0}^{3} Q_j(t,\tau)x^{(j)}(\tau)d\tau = \\
= f(t)+F(t,x(t),x'(t),\int_{t_0}^{t} h(t,\tau,x(\tau),x'(\tau))d\tau), \quad t\ge t_0
\end{gathered} \quad (4.36)$$

с немалыми ядрами $Q_j(t,\tau)$ $(j=0,1,2,3)$, т. е. при условии (Q_{k3}) и при слабой нелинейности: $\left|F(t,x,u,\vartheta)\right|\le F_0(t)+g_0(t)\left|x\right|+g_1(t)\left|u\right|+g_2(t)\left|\vartheta\right|$,

$$\left|h(t,\tau,x,u)\right|\le g_3(t,\tau)\left|x\right|+g_4(t,\tau)\left|u\right| \qquad (CH)$$

с неотрицательными $F_0(t),\ g_0(t),\ g_1(t), g_2(t),\ g_3(t,\tau), g_4(t,\tau)$.

Методика исследования задачи 4.4 аналогична методикам исследования задач 3.4, 4.2. В этом случае также, как в разделе 4.3, вводится некоторое вспомогательное ядро $H_4(t,\tau)$ с $x^{(4)}(\tau)$ по правилу (4.23), делается интегрирование по частям (4.24), и в полученном нагруженном ИДУ пятого порядка следуя С. Искандарову (2007 г.) делаются нестандартные замены: $x''(t)+\lambda^2 x(t)=W_1(t)y(t),\quad y''(t)+\mu^2 y(t)=W_2(t)z(t)$, что приводит нагруженное ИДУ пятого порядка к эквивалентной системе из трех уравнений: из двух ДУ второго порядка для $x(t), y(t)$ и одного ИДУ для $z(t)$. Далее эту систему исследуем методом преобразования уравнений В. Вольтерра (1976 г.), при этом первое уравнение этой системы умножаем на $x'(t)$, второе - на $y'(t)$, а третье - на $z(t)$, развиваем метод срезывающих функций и метод интегральных неравенств, как в разделе 3.1.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной диссертационной работе нам удалось решить задачи по установлению достаточных условий асимптотической устойчивости решений линейного ИДУ второго порядка типа Вольтерра с полными ядрами в случае, когда решения соответствующего линейного ДУ второго порядка могут быть асимптотически неустойчивыми на полуоси; устойчивости решений слабо нелинейных ИДУ второго и третьего порядков типа Вольтерра с немалым ядром при неизвестной функции; асимптотической устойчивости решений ИДУ третьего, четвертого и пятого порядков типа Вольтерра с неполными и немалыми ядрами; устойчивости решений слабо нелинейных ИДУ четвертого и пятого порядков типа Вольтерра с неполными и немалыми ядрами.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. **Абдирайимова, Н. А.** Об асимптотической устойчивости решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения третьего порядка с неполными ядрами [Текст] / С. Искандаров, Н. А. Абдирайимова // Международный журнал гуманитарных и естественных наук. – Новосибирск, 2020. – № 2-1 (41). – С.179-184. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=42542802
2. **Абдирайимова, Н. А.** О влиянии интегральных возмущений на асимптотическую устойчивость решений линейнего дифференциального уравнения второго порядка [Текст] / С. Искандаров, Н. А. Абдирайимова // Український математичний вісник. – 2020. – Т.17, №2. – С. 188-195. https://drive.google.com/file/d/1SpBkl_xBjtcQ2RLvGmPJx1LE1zcXZGbz
3. **Abdiraiimova, N. A**. On the influence of integral perturbations to the asymptotic stability of solutions of a second-order linear differential equation [Текст] / S. Iskandarov, N. A Abdiraiimova // Journal of Mathematical Sciences. – 2020. – Vol. 249, N 5. – P. 733-738. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=45347608
4. **Абдирайимова, Н. А.** Об асимптотической устойчивости решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения четвертого порядка с неполными ядрами [Текст] / С. Искандаров, Н. А. Абдирайимова // Вестник КРСУ. – 2020. – Т.20, №12. – С.23-29. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=44744331
5. **Абдирайимова, Н. А.** Достаточные признаки устойчивости решений слабо нелинейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения второго

порядка с неполными ядрами на полуоси [Текст] / Н. А. Абдирайимова // Вестник ОшГУ. Мат., физ., техн. – 2021. – №1 – С. 12-18. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=46561743
6. **Абдирайимова, Н. А.** Метод вспомогательных ядер и устойчивость решений слабо нелинейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения четвертого порядка с неполными ядрами [Текст] / С. Искандаров, Н. А. Абдирайимова // Вестник ОшГУ. Мат., физ., техн. – 2021. – №1 – С. 46-54. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=46561747
7. **Абдирайимова, Н. А.** Метод вспомогательных ядер и устойчивость решений слабо нелинейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения третьего порядка с неполными ядрами [Текст] / С. Искандаров, Н. А. Абдирайимова // Вестник КРСУ. – 2021. – Т.21, №4. – С.3-9. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=45932543
8. **Абдирайимова, Н. А.** Метод вспомогательных ядер и устойчивость решений слабо нелинейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения пятого порядка с неполными ядрами[Текст] / Н. А. Абдирайимова // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. – 2021. – № 4. – С.3-9. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=47128665
9. **Abdiraiimova, N. A.** Sufficient conditions for the asymptotic stability of solutions of the linear Volterra integro-differential equation of the fifth order with incomplete kernels [Текст] / N. A. Abdiraiimova // Herald of Institute of Mathematics of NAS of KR. – Bishkek, 2021. – N 1. – P. 59-69. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=49330036
10. **Abdiraiimova, N. A.** Auxiliary kernels method and asymptotic properties of solutions of Volterra type integro-differential equations with incomplete kernels [Текст] / S. Iskandarov, N. A. Abdiraiimova // Theses of intern. sci. conf. “Problems of modern mathematics and its appl.” dedicated to the 70th anniversary acad. A.A. Borubaev, Kyrgyzstan, Bishkek – Issyk-Kul, 16-19 June, 2021. – Bishkek: Kyrgyz Math. Soc., 2021. –P. 72.

Абдирайимова Назигай Абдинабиевнанын “Кошумча ядролор методу жана Вольтерра тибиндеги жарым октогу интегро-дифференциалдык теңдемелердин чыгарылыштарынын асимптотикалык касиеттери” деген темада 01.01.02 - дифференциялык тендемелер, динамикалык системалар жана оптималдык башкаруу адистиги боюнча физика-математика илимдеринин кандидаты окумуштуулук даражасын изденип алуу үчүн жазылган диссертациясынын

РЕЗЮМЕСИ

Урунттуу сөздөр: Вольтерра тибиндеги интегро-дифференциалдык теңдеме (ИДТ), турумдуулук, асимптотикалык турумдуулук, интегралдык козголуулардын таасири, кошумча функциялар методу.

Изилдөөнүн объектиси: Вольтерра тибиндеги толук эмес жана кичине эмес ядролуу жарым октогу экинчи, үчүнчү, төртүнчү жана бешинчи тартиптеги сызыктуу жана сызыктуу сымал ИДТлар.

Изилдөөнүн предмети: асимптотикалык турумдуулук жана чыгарылыштардын турумдуулугу, интегралдык козголуулардын таасири.

Изилдөөнүн максаты: Вольтерра тибиндеги толук эмес жана кичине эмес ядролуу экинчи, үчүнчү, төртүнчү жана бешинчи тартиптеги сызыктуу жана сызыктуу сымал ИДТлардын чыгарылыштарынын жарым октогу асимптотикалык турумдуулугунун жана турумдуулугунун жетиштүү шарттарын алуу.

Изилдөө методдору: кошумча ядролор методу өнүктүрүлөт жана төмөнкүлөр колдонулат: системага келтирүүчү стандарттык эмес методунун түрдүү варианттары; В. Вольтерранын теңдемелерди өзгөртүп түзүү методу; кесүүчү функциялар методу; жекече кесүү методу; теңдемелерди квадратка көтөрүү методу; интегралдык барабарсыздыктар методу, ошондой эле Люстерник-Соболевдин леммасы.

Изилдөөнүн илимий жаңылыгы: Вольтерра тибиндеги экинчи тартиптеги сызыктуу ИДТнын чыгарылыштарынын ага тиешелүү болгон экинчи тартиптеги ДТнин чыгарылыштары асимптотикалык турумдуу болбой калуу учурунда асимптотикалык турумдуулугунун; Вольтерра тибиндеги толук эмес жана кичине эмес ядролуу үчүнчү, төртүнчү жана бешинчи тартиптеги сызыктуу ИДТлардын чыгарылыштарынын асимптотикалык турумдуулугунун; Вольтерра тибиндеги толук эмес ядролуу экинчи, үчүнчү, төртүнчү жана бешинчи тартиптеги сызыктуу сымал ИДТлардын чыгарылыштарынын турумдуулугунун жетиштүү шарттары табылды.

Алынган жыйынтыктардын теориялык жана практикалык маанилүүлүгү: Алынган жыйынтыктар Вольтерра тибиндеги толук эмес жана кичине эмес ядролуу жаңы класстардагы жогорку тартиптеги ИДТлардын чыгарылыштарынын турумдуулугун жана асимптотикалык турумдуулугун жана кээ бир эс тутуму бар чөйрөдөгү процесстердин турумдуулугун изилдөөдө колдонулат.

РЕЗЮМЕ

диссертации Абдирайимовой Назигай Абдинабиевны на тему: “Метод вспомогательных ядер и асимптотические свойства решений вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений на полуоси” на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Ключевые слова: Интегро-дифференциальное уравнение (ИДУ) типа Вольтерра, устойчивость, асимптотическая устойчивость, влияние интегральных возмущений, метод вспомогательных функций.

Объект исследования: Линейные и слабо нелинейные ИДУ второго, третьего, четвертого и пятого порядков типа Вольтерра с неполными и немалыми ядрами на полуоси.

Предмет исследования: Асимптотическая устойчивость и устойчивость решений, влияние интегральных возмущений.

Цель исследования: Получить достаточные условия асимптотической устойчивости и устойчивости решений линейных и слабо нелинейных ИДУ второго, третьего, четвертого и пятого порядков типа Вольтерра с неполными и немалыми ядрами на полуоси.

Методы исследования: Развивается метод вспомогательных ядер и используются: различные варианты нестандартного метода сведения к системе; метод преобразования уравнений В. Вольтерра; метод срезывающих функций; метод частичного срезывание; метод возведения уравнений в квадрат; метод интегрирования по частям; метод интегральных неравенств, а также лемма Люстерника-Соболева.

Научная новизна исследования: Установлены достаточные условия асимптотической устойчивости решений линейного ИДУ второго порядка типа Вольтерра в случае, когда решения соответствующего линейного дифференциального уравнения второго порядка могут быть асимптотически неустойчивыми; устойчивости решений слабо нелинейного ИДУ второго порядка типа Вольтерра с немалым ядром при неизвестной функции; асимптотической устойчивости решений линейных ИДУ третьего, четвертого и пятого порядков типа Вольтерра с неполными и немалыми ядрами; устойчивости решений слабо нелинейного ИДУ третьего порядка типа Вольтерра с немалым ядром при неизвестной функции; устойчивости решений слабо нелинейных ИДУ четвертого и пятого порядков типа Вольтерра с неполными и немалыми ядрами.

Теоретическая и практическая значимость полученных результатов: Полученные результаты могут быть использованы при исследовании устойчивости и асимптотической устойчивости решений новых классов ИДУ типа Вольтерра высоких порядков с неполными и немалыми ядрами на полуоси и некоторых процессов в средах с памятью.

SUMMARY

dissertation "The method of auxiliary kernels and asymptotic properties of solutions of Volterra integro-differential equations on the semi-axis " of Abdiraiimova Nazigai Abdinabievna is submitted for the scientific degree of candidate of physical-mathematical sciences by the specialty 01.01.02 – differential equations, dynamical systems and optimal control

Key words: Volterra type integro-differential equation, stability, asymptotic stability, influence of integral perturbations, auxiliary function method.

Object of research: Linear and weakly nonlinear Volterra type IDEs of the second, third, fourth and fifth orders with incomplete and no small kernels on the semi-axis.

Subject of research: Asymptotic stability and stability of solutions influence of integral perturbations.

Purpose of the study: Obtain sufficient conditions for the asymptotic stability and stability of solutions of linear and weakly nonlinear IDEs of the second, third, fourth and fifth orders of the Volterra type with incomplete and non-small kernels on the semi-axis.

Research methods: The method of auxiliary kernels is being developed and the following are used: various variants of the non-standard method of reduction to a system; method of transformation of equations by V. Volterra; method of cutting functions; partial cutting method; method of squaring equations; method of integration by parts; the method of integral inequalities, as well as the Lyusternik-Sobolev's lemma.

Scientific novelty of the research: Sufficient conditions are established for the asymptotic stability of solutions to a second-order linear IDE of the Volterra type in the case when solutions to the corresponding second-order linear DE can be asymptotically unstable; stability of solutions of a weakly nonlinear second-order IDE of the Volterra type with a non-small kernel for an unknown function; asymptotic stability of solutions of linear IDEs of the third, fourth and fifth orders of the Volterra type with incomplete and non-small kernels; stability of solutions of a weakly nonlinear third-order IDE of the Volterra type with a non-small kernel for an unknown function; stability of solutions to weakly nonlinear IDEs of the fourth and fifth orders of the Volterra type with incomplete and non-small kernels.

Theoretical and practical significance of the results obtained: The results obtained can be used in studying the stability and asymptotic stability of solutions of new classes of high-order Volterra-type IDEs with incomplete and non-small kernels on the half-line and of some processes in environment with memory.

Перечень обозначений и сокращений:

- $I = [t_0, \infty)$, $t_0 \in R$; $t \geq t_0$ означает $t \in I$ т. е полуось.
- $L^1(I, R_+)$ - пространство неотрицательных функций, интегрируемых на полуинтервале I, т. е. $x(t) \in L^1(I, R_+) \Leftrightarrow x(t) \geq 0, \ \int_{t_0}^{\infty} x(t)\,dt < \infty$.
- $x(t) = O(1), t \in I \Leftrightarrow \exists\ const\, M > 0$ такая, что $|x(t)| \leq M$. В этом случае говорят, что функция $x(t)$ ограничена на бесконечном полуинтервале I.
- ИДУ - интегро-дифференциальное уравнение.
- ДУ - дифференциальное уравнение.
- Функция $g(t) \in C(I, R)$ называется малой, если $g(t) \in L^1(I, R)$, т. е. $\int_{t_0}^{\infty} |g(t)|\,dt < \infty$. Если $\int_{t_0}^{\infty} |g(t)|\,dt = \infty$, то функция $g(t) \in C(I, R)$ называется немалой.

В этом случае пишут $g(t) \Subset L^1(I,R) \Leftrightarrow g(t) \notin L^1(I,R)$. Функция $G(t,\tau)$, непрерывная при $t \ge \tau \ge t_0$, называется немалой, если $\int\limits_{t_0}^{\infty}\int\limits_{t_0}^{t} |G(t,\tau)| d\tau dt = \infty$.

- Под устойчивостью решений линейного однородного ИДУ k-го порядка понимается ограниченность на полуинтервале I всех его решений и их производных до ($k-1$)-го порядка включительно.
- Под асимптотической устойчивостью (кратко: АУ) решений линейного однородного ИДУ k-го порядка понимается стремление к нулю при $t \to \infty$ всех его решений и их производных до ($k-1$)-го порядка включительно.