УДК: 511:511.4:33

Муканов Т.А., Ийзбекова Р.А.

Ж.А. Алышбаев атындагы

Ысык-Көл кооперация институту

ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН ЭКОНОМИКАДАГЫ КОЛДОНУЛУШТАРЫ

Бул макалада экономика илиминдеги дифференциалдык теңдемелердин колдонулуштары каралат.

II.1. Суроо-талап функциясын ийкемдүүлүгү боюнча куруу.
Ийкемдүүлүгү боюнча суроо-талап функциясын куруу маселесине токтолобуз.

1-Маселе. Мейли, баанын каалаган мааниси үчүн,
суроо-талап функциясынын ийкемдүүлүгү $\eta = \frac{-1}{3}$ барабар болсун. Суроо-талап функциясын табуу керек.

Чыгаруу. Ийкемдүлүктүн аныктамасына ылайык,

$\eta = \frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp}$ формуласы орун алат. Ошондуктан маселенин шартына ылайык,

$\frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp} = \frac{-1}{3}$ диф. теңдемесине ээ болобуз.

Диф. теңдемени өзгөрмөлөрүн бөлүштүрүп чыгарабыз:

$$\frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp} = \frac{-1}{3}, \quad 3 \cdot \frac{dx}{x} = -\frac{dp}{p}, \quad 3\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{dp}{p},$$

$$3\ln|x| = -\ln|p| + \ln C, \quad \ln|x|^3 + \ln|p| = \ln C, \ \ \ln\left|px^3\right| = \ln C,$$

$$px^3 = C,$$

Акыркы барабардыктан x ти таап, $x = \sqrt[3]{\frac{C}{p}}$ изделүүчү суроо-талап функциясына ээ болобуз.

II.2. Камсыздоонун же логистиканын теңдемеси.

$$\frac{dy}{dt} = py(m-y) \qquad (1)$$

түрүндөгү теңдеме *камсыздоонун же логистиканын* теңдемеси деп аталат. Мында p>0 жана m>0 теңдеменин турактуу параметрлери.

Теңдеменин өзгөрмөлөрүн бөлүштүрүп чыгарабыз:

$$\frac{dy}{y(m-y)} = pdt, \ -\frac{dy}{\left(y^2 - my\right)} = pdt$$

Бөлчөктүн бөлүмүндө толук квадратты бөлүп алып, теңдеменин эки жагынан интеграл алабыз:

$$-\frac{dy}{\left(y^2 - my\right)} = pdt, \quad -\int \frac{dy}{\left(y - \frac{m}{2}\right)^2 - \frac{m^2}{4}} = \int pdt,$$

$$\frac{1}{m}\ln\left|\frac{y-m}{y}\right| = -pt - C, \quad \frac{y-m}{y} = e^{-mpt}e^{-C}.$$

Акыркы барабардыктан y функциясын табабыз:

$$y = \frac{m}{1 + e^{-mpt} e^{-C}}$$

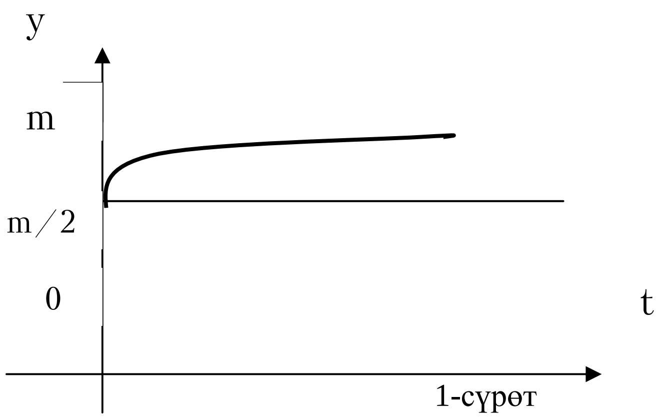
$k = mp,\ A = e^{-C}$ деп белгилеп алып,

$$y = \frac{m}{1 + Ae^{-kt}},\ t \in [0;+\infty) \qquad (*)$$ *камсыздоо (логистика)* функциясына ээ болобуз.

Камсыздоо функциясынын (*) берилишинен $y(0) = {}^{m}\!/_{2}$ шарты орун алат. Ошондой эле, y -функциясынын графиги y=m түз сызыгына төмөн жагынан асимптотикалык жакындайт, себеби -k<0 жана t нын каалаган терс эмес маанилери үчүн y<m болот жана

$y \to m,$ *эгерде* $t \to +\infty$.

Жогорку айтылгандарга ылайык, камсыздоо (логистика) функциясынын графиги төмөндөгүчө болот (1-сүрөт):



1-сүрөт

П.3 Экономикалык динамиканын модели.

y(t) - кандайдыр бир чарбанын убакыттын t моментинде сатылган продукциянын көлөмү дейли. Чарбада өндүрүлгөн бардык продукциялар кандайдыр бир туруктуу p баа менен сатылат дейли. Анда t моментиндеги киреше Y(t)=p.y(t) болору ачык.

I(t) - чарбаны кеңейтүү үчүн кетирилген инвестициянын чоңдугу дейли. Табигый өсүү моделинде продукциянын чыгаруу ылдамдыгы (акселерация) ага кетирилген инвестициянын чоңдугуна пропорциялуу деп эсептешет:

$$y' = q \cdot I(t) \ . \qquad (1)$$

Инвестициялардын I(t) чоңдугу кирешенин туруктуу бөлүгүн түзөт деп эсептейли, анда $I(t) = mY(t) = mpy(t)$, (2)
барабардыгы орун алат. Мында m - пропорциялуулуктун коэффициенти (*инвестициянын нормасы* деп аталган), к - туруктуу чоңдук жана 0<m<1 шартын канагаттандырат.

(2)-барабардык менен аныкталган инвестициянын маанисин (1)ге коюп, y ти табыш үчүн $y' = qmpy$ (3)
диф. теңдемеге ээ болобуз. $k = qmp$ деп алып, (3)-теңдемени

$$\frac{dy}{dt} = ky \qquad (4)$$

биринчи тартиптеги өзгөрмөлөрүн бөлүштүрүүчү диф. теңдемеге келебиз. Белгилүү болгондой, (4)-диф. теңдеменин *жалпы чыгарылышы* $y = Ce^{kt}$ көрсөткүчтүү функциясы болот.

Эгерде $y(t_0)=y_0$ *баштапкы шарт* берилсе,

анда $y=y_0e^{k(t-t_0)}$ функциясы баштапкы шартты канагаттандырган диф.теңдеменин *жекече чыгарылышы* болот.

(4)-диф. теңдеме популяциянын өсүшүн, радиоактивдик ажыроо процессин ж.б. процесстерди чагылдырып сүрөттөөрүн айта кетели.

Дифференциалдык теңдемелер чыныгы дүйнөнүн математикалык чагылдырышы болгондуктан, чыныгы дүйнө канчалык ар түрдүү болсо, теңдемелердин дүйнөсү да ошончолук бай болот.

П.4. Дифференциалдык теңдемелердин суроо-талап жана сунуш функцияларын табууда колдонушу.

Эң жөнөкөй учурда суроо-талаптын жана сунуштун көлөмдөрү базар баасынан көз каранды болушат.

Ал эми татаал моделдерде суроо-талаптын жана сунуштун көлөмдөрү баанын өзгөрүү ылдамдыгынан көз каранды деп кароо керек, б.а., dp/dt баадан убакыт боюнча алган туундудан көз каранды деп кароо керек. Мындай моделдерде суроо-талап жана сунуш функцияларын табыш үчүн дифференциалдык теңдемелерге келебиз.

Төмөнкү экономикалык маселени карайбыз.

1-Маселе. Суроо-талаптын жана сунуштун көлөмдөрү **p –**баадан жана dp/dt туундудан көз карандылыгы

$$\begin{cases} x=19+p+4\,{dp}/{dt}, \\ x=28-2p+3\,{dp}/{dt} \end{cases}$$

диф. теңдемелердин системасы менен берилсин. Эгерде убакыттын башкы моментинде баа p=20 болсо, анда тең салмактуу баанын убакыттан болгон көз карандылыгын аныктайлы.

Чыгаруу. Берилген системаны чыгарабыз:

$$\begin{cases} x=19+p+4\,{dp}/{dt}, \\ x=28-2p+3\,{dp}/{dt} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$19+p+4\,{dp}/{dt}=28-2p+3\,{dp}/{dt},$$

$$\frac{dp}{dt}=9-3p,\ \ \frac{dp}{9-3p}=dt,\ \ \int\frac{dp}{9-3p}=\int dt,$$

$$-\frac{1}{3}\int\frac{dp}{p-3}=\int dt, -\frac{1}{3}\ln|p-3|=t+C,$$

$$\ln|p-3|=-3t-3C,\ p-3=e^{-3t-3C},\ p=3+e^{-3t-3C}\ \ .$$

p=20, эгерде t=0; баштапкы шартты эске алып, акыркы барабардыктан С турактуулуктун маанисин табабыз:

$$3+e^{0-3C}=20,\ e^{-3C}=20-3,\ e^{-3C}=17,\ -3C=\ln 17,\ C=\frac{-1}{3}\ln 17.$$

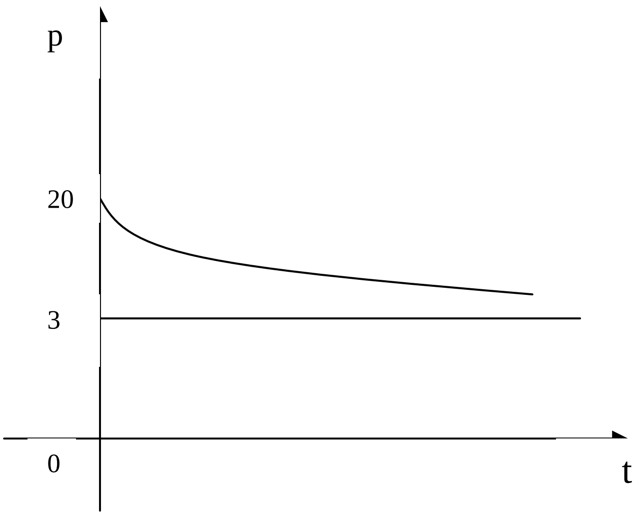
Табылган С нын маанисин $p=3+e^{-3C}e^{-3t}$ диф. теңдеменин жалпы чыгарылышына коюп, $p=3+17e^{-3t}$ диф. теңдеменин жекече чыгарылышына ээ болобуз.

Демек, тең салмактуу баанын убакыттан болгон көз карандылыгы $p=3+17e^{-3t}$ функциясы менен аныкталат.

Бул функцияны изилдейбиз. Убакыт $t\to+\infty$ умтулганда, б.а., чексиз өскөндө, баа $p\to 3$ туруктуу мааниге кемип умтулат. Себеби

$$\lim_{t\to+\infty}p=\lim_{t\to+\infty}(3+17e^{-3t})=3+\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{e^{3t}}=3+0=3.$$

p функциянын графиги төмөнкү чиймеде.



Адабияттар:

1. Рыскулов А.Р., Муканова С.Т. Жогорку математика боюнча мисалдар жана маселелер (Экономика адистиги үчүн). – Каракол, 2006.
2. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. – Москва: Издательство «ДИС», 1998.
3. Сборник задач по высшей математике для экономистов. Учебное пособие / Под ред. проф. Ерманова В.И. – М.: Инфра-М, 2008.