МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

КЫРГЫЗСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. И. РАЗЗАКОВА

Кафедра «Прикладная математика»

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Методическое руководство для организации самостоятельной работы студентов второго курса всех специальностей

Бишкек – 2011

«Рассмотрено»
на заседании кафедры
"Прикладная математика"
Прот. № 9 от 17.05.2010

«Одобрено»
Методическим советом
ФИТ
Прот. № 5 от 18.06.2010

Составители: САПАРАЛИЕВА С.И., АБДЫЛДАЕВА А.Р., ОМУРАЛИЕВ С.Б.

Элементы теории графов. Методическое руководство для организации самостоятельной работы студентов второго курса всех специальностей / КГТУ им. И.Раззакова; сост.: С.И.Сапаралиева, А.Р.Абдылдаева, С.Б.Омуралиев. – Б.: ИЦ "Текник", 2011. – 24 с.

Цель данной работы - оказание помощи студентам в решении задач теории графов. В методическом руководстве даются основные теоретические сведения об элементах теории графов. Приводятся образцы решения задач, а также даны упражнения для самостоятельной работы студентов.

Методическое руководство предназначено для студентов второго курса обучения.

Рецензент к.ф.-м.н., доц. Аширбаев Б.Ы.

Элементы теории графов
Методическое руководство для организации самостоятельной работы
студентов второго курса всех специальностей

Составители: ***Сапаралиева С.И., Абдылдаева А.Р., Омуралиев С.Б.***

Тех. редактор ***Субанбердиева Н.Е.***

Подписано к печати 10.02.2011 г. Формат бумаги $60x84^{1}/_{16}$.
Бумага офс. Печать офс. Объем 1,5 п.л. Тираж 100 экз. Заказ 207. Цена 23,5 с.

Бишкек, ул. Сухомлинова, 20. ИЦ "Текник" КГТУ им. И.Раззакова, т.: 54-29-43

e-mail: beknur@mail.ru

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Представим на плоскости конечное множество точек V и некоторое множество линий X, соединяющих попарно какие-то точки из множества V. Примером может служить схема автодорог, соединяющих населенные пункты Чуйской области.

Множество точек (населенных пунктов) назовем **множеством вершин**, а соединяющие линии (автодороги) – **множеством ребер**.

Совокупность двух множеств (вершин и ребер) называется **графом**.

На некоторых участках допускается только одностороннее движение. Тогда соответствующее ребро называется **дугой** и изображается стрелкой, направленной от начальной вершины к конечной вершине. Граф, состоящий из дуг, называют **ориентированным** графом или просто **орграфом**, а образованный ребрами – **неориентированным** графом или **неографом**.

Если граф имеет как ребра, так и дуги, то такой граф называют **смешанным**.

Один и тот же граф можно изобразить по-разному. Вершины можно располагать по своему усмотрению и произвольно выбирать форму соединяющих линий. В этом проявляется **свойство изоморфизма** графов.

Ребро называется **петлей**, если оно начинается и заканчивается в одной и той же вершине. Ребра с одинаковыми концевыми вершинами называются **кратными**.

Между вершинами графа G и его ребрами имеет место **отношение инцидентности**. Говорят, что вершина v_i инцидентна ребру x_k, если v_i - одна из концевых вершин этого ребра. Обратно, всякое ребро инцидентно своим концевым вершинам.

Вершины $v_i, v_j \in X$ графа G называются **смежными** или **соседними**, если они инцидентны одному и тому же ребру (т.е. соединены хотя бы одним ребром или дугой).

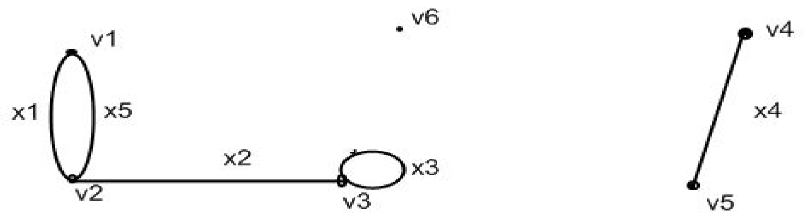
Если хотя бы одну пару вершин графа G соединяют несколько ребер, то такой граф называют **мультиграфом**.

Вершину графа G называют **изолированной**, если она не инцидентна ни одному ребру этого графа.

Пусть в графе G имеется дуга $x_k = (v_i, v_j) \in V$. Тогда говорят, что дуга x_k исходит из вершины v_i и заходит в вершину v_j. Вершину v_i называют также **начальной**, а вершину v_j - **конечной** для дуги x_k.

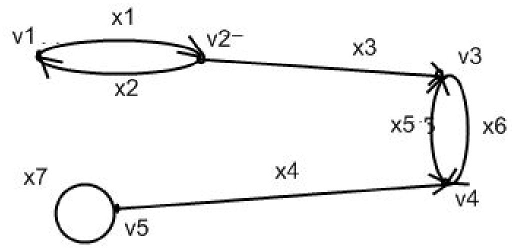
Пример 1. Задан граф G, состоящий из вершин $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ и ребер x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

v_6 - изолированная вершина, x_1 и x_5 - кратные ребра, x_3 - петля, v_1 и v_2 - концевые вершины ребра x_1.



Граф G является неориентированным графом.

Пример 2.Задан орграф G_1. У каждой дуги указать вершины, найти петли.



У дуги x_1 вершина v_1 - начальная, а вершина v_2 - конечная.

У дуги x_2 вершина v_2 - начальная, а вершина v_1 - конечная.

У дуги x_3 вершина v_2 - начальная, а вершина v_3 - конечная.

У дуги x_4 вершина v_5 - начальная, а вершина v_4 - конечная.

У дуги x_5 вершина v_4 - начальная, а вершина v_3 - конечная.

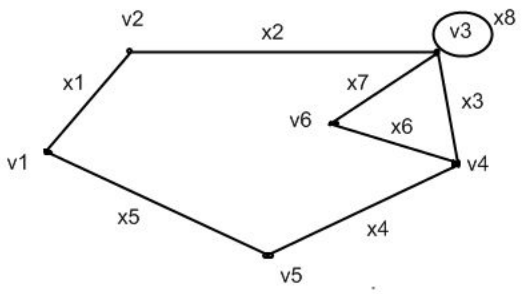
У дуги x_6 вершина v_3 - начальная, а вершина v_4 - конечная.

x_7 является петлей.

Часто на графе требуется выделить различные маршруты, обладающие определенными свойствами. **Маршрут** длины m – это последовательность m ребер графа $x_1,...,x_m$ (не обязательно различных) таких, что любые два соседних ребра x_i, x_{i+1} имеют общую концевую вершину.

Замкнутый маршрут приводит в ту же вершину, из которой он начался. **Цепь** – это маршрут, все ребра которого различны. **Простая цепь** – это цепь без повторяющихся вершин. Замкнутая цепь называется **циклом**. **Простой цикл** – это простая замкнутая цепь.

Пример 3. Дан граф *G*.



$x_1, x_2, x_3, x_6, x_7, x_2$ - это маршрут длины 6, соединяющий вершины v_1 и v_2.

$x_1, x_2, x_3, x_6, x_7, x_2, x_1$ - замкнутый маршрут длины 7. Он начинается и заканчивается в вершине v_1.

x_1, x_2, x_3, x_6, x_7 - цепь длины 5 (все ребра в ней различны).

Эта цепь не является простой, так как при обходе вершину v_3 мы посетили два раза.

x_1, x_2, x_3 - пример простой цепи (все вершины на нашем пути были различны).

x_6, x_7, x_8, x_3 - цикл.

x_6, x_7, x_3 - простой цикл.

Существуют различные виды графов.

Граф *G* называют **полным**, если каждая пара его вершин соединена ребром. Такой граф часто обозначают K_n.

Если граф *G* не имеет ребер, то такой граф называют **нуль - графом** и обозначают K_0.

Если граф *G* не имеет ни вершин, ни ребер, то его называют **пустым**, обозначая $K_\emptyset$.

Граф $G=(V, X)$ называют **двудольным**, если множество его вершин *V* можно разбить на два подмножества $V_1, V_2 \subset V$ $(V_1 \cap V_2 = \emptyset)$ так, что каждое ребро графа имеет концевые вершины, принадлежащие подмножествам V_1 и V_2 (т.е. одна из вершин принадлежит V_1, а другая V_2). Полный двудольный граф обозначают $K_{m,n}$, где *m* – число вершин в V_1, а *n* – число вершин в V_2. В этом графе каждые две вершины v_1, v_2 такие, что $v_1 \in V_1$ и $v_2 \in V_2$ соединены ребром.

На рис.1а изображен полный граф, а на рис.1б – двудольный.

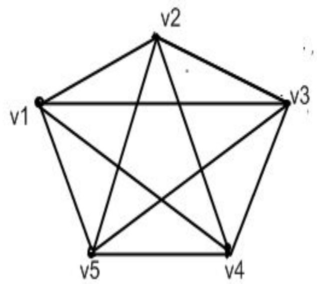


рис.1 а

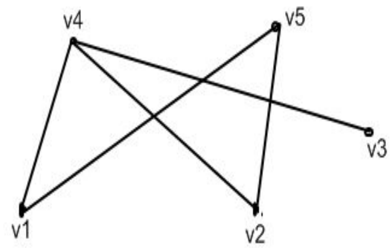


рис.1 б

Итак, для задания графа необходимо указать два множества: *V* (множество вершин) и *X* (множество ребер или дуг). Но при большом числе элементов рисунок графа становится громоздким. В этом случае используют матричный способ. Выбор матрицы определяется конкретной задачей.

Дан граф *G* с вершинами $v_1, v_2, \dots, v_n$ и ребрами $x_1, x_2, \dots, x_m$.

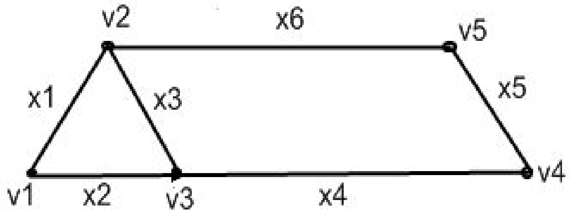
Матрица смежности графа *G* – это квадратная матрица *A(G)* размера $n \times n$ (*n* - число вершин) с элементами

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{ если в графе G вершины } v_i, v_j \textit{ соединены ребром,} \\ 0, \textit{ иначе.} \end{cases}$$

Матрица инцидентности графа *G* – это матрица *B(G)* размера $n \times m$ (*n* - число вершин, *m* – число ребер) с элементами

$$b_{ij}=\begin{cases}1, \textit{если вершина } v_i - \textit{концевая вершина ребра } x_j,\\ 0, \textit{иначе.}\end{cases}$$

Пример 4. Для графа *G* построить матрицу смежности *A(G)* и матрицу инцидентности *B(G)*.



Так как у графа 5 вершин и 6 ребер, то размер матрицы *A(G)* будет 5×5, а матрицы *B(G)* - 5×6.

$$A(G)=\begin{pmatrix}0&1&1&0&0\\1&0&1&0&1\\1&1&0&1&0\\0&0&1&0&1\\0&1&0&1&0\end{pmatrix}$$

$a_{12}=1\Leftrightarrow$ в графе *G* есть ребро, соединяющее вершины v_1 и v_2;

$a_{13}=1\Leftrightarrow$ в графе *G* есть ребро, соединяющее вершины v_1 и v_3;

$a_{14}=0\Leftrightarrow$ в графе *G* нет ребра, соединяющего вершины v_1 и v_4 и т.д.

$$B(G)=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0&0\\1&0&1&0&0&1\\0&1&1&1&0&0\\0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1&1\end{pmatrix}$$

$b_{11}=1\Leftrightarrow$ вершина v_1 - концевая вершина ребра x_1;

$b_{12}=1\Leftrightarrow$ вершина v_1 - концевая вершина ребра x_2;

$b_{13}=0\Leftrightarrow$ вершина v_1 не является концевой вершиной для ребра x_3 и т.д.

Дан орграф *D* с вершинами $v_1, v_2, \ldots, v_n$ и дугами $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

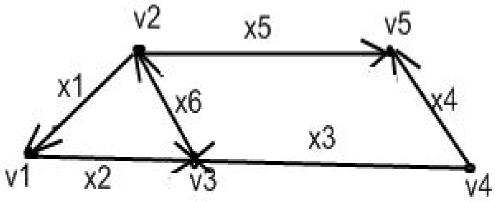
Матрица смежности орграфа *D* – это квадратная матрица *A(D)* размера $n\times n$ (*n* - число вершин) с элементами

$$a_{ij}=\begin{cases}1, \textit{если в орграфе D есть дуга из } i-\textit{й вершины в } j-\textit{ю вершину},\\ 0, \textit{иначе.}\end{cases}$$

Матрица инцидентности орграфа *D* – это матрица *B(D)* размера $n\times m$ (*n* - число вершин, *m* – число ребер) с элементами

$$b_{ij}=\begin{cases}1, \textit{если } j-\textit{я дуга заканчивается в } i-\textit{й вершине},\\ -1, \textit{если } j-\textit{я дуга начинается в } i-\textit{й вершине},\\ 0, \textit{иначе.}\end{cases}$$

Пример 5. Для орграфа *D* построить матрицу смежности *A(D)* и матрицу инцидентности *B(D)*.



Так как у орграфа 5 вершин и 6 дуг, то размер матрицы *A(D)* будет 5×5, а матрицы *B(D)* - 5×6.

$$A(D) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$a_{12} = 0 \Leftrightarrow$ орграф D не содержит дуги из v_1 в v_2;

$a_{13} = 1 \Leftrightarrow$ орграф D содержит дугу из v_1 в v_3 и т.д.

$$B(D) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$b_{11} = 1 \Leftrightarrow$ в вершине v_1 заканчивается дуга x_1;

$b_{12} = -1 \Leftrightarrow$ в вершине v_1 начинается дуга x_2;

$b_{13} = 0 \Leftrightarrow$ вершина v_1 не является концевой вершиной для дуги x_3 и т.д.

Операции на графах

На графах выполняются некоторые теоретико-множественные операции. Рассмотрим их.

Пусть имеются графы $G_1 = (V_1, X_1)$ и $G_2 = (V_2, X_2)$.

Объединением графов $G_1 = (V_1, X_1)$ и $G_2 = (V_2, X_2)$ называется граф $G = (V, X) = G_1 \cup G_2$, если $V = V_1 \cup V_2$ и $X = X_1 \cup X_2$. Иначе говоря, граф объединения графов G_1 и G_2 содержит вершины и ребра, которые принадлежат хотя бы одному из этих графов.

Пересечением графов $G_1 = (V_1, X_1)$ и $G_2 = (V_2, X_2)$ называется граф $G = (V, X) = G_1 \cap G_2$, если $V = V_1 \cap V_2$ и $X = X_1 \cap X_2$. Иначе говоря, граф пересечения графов G_1 и G_2 содержит вершины и ребра, которые являются общими для этих графов.

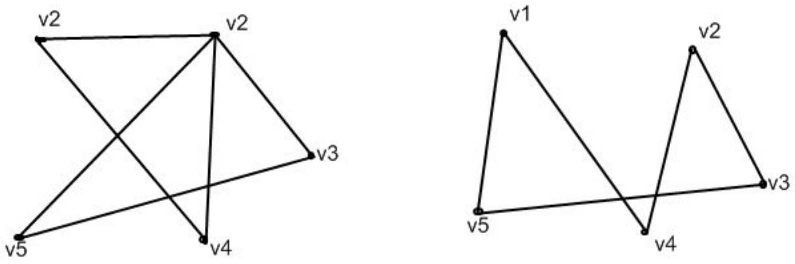
Дополнением графа $G = (V, X)$ называют граф $\overline{G} = (V, \overline{X})$, в котором $\overline{X} = (V \times V) \setminus (E \cup \Delta_V)$, где Δ_V есть диагональное отношение на множестве *V*. Иначе говоря, дополнительный граф $\overline{G}$ имеет тоже множество вершин, что и граф *G*, а ребра соединяют две его различные вершины только в том случае, если в исходном графе ребро между рассматриваемыми вершинами отсутствует. Очевидно, дополнительный граф есть дополнение данного графа до полного.

Композицией графов $G_1 = (V_1, X_1)$ и $G_2 = (V_2, X_2)$ называется граф $G = (V, X) = G_1 \circ G_2$, в котором имеется ребро $\{x_i, x_j\}$, если и только если имеются ребра $\{x_i, x_k\} \in X_1$, $\{x_k, x_j\} \in X_2$.

Пример 1. Пусть графы G_1 и G_2 заданы матрицами смежности A и B соответственно:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как матрицы смежности заданных графов симметричны, то мы имеем неориентированные графы. Геометрические изображения графов G_1 и G_2 представлены на рис. 2.



G_1 G_2

рис. 2

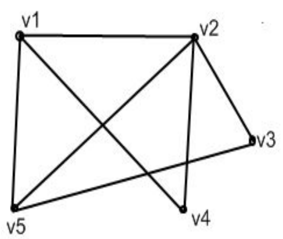
Матрица смежности графа $G_1(X) \cup G_2(X)$ будет иметь следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

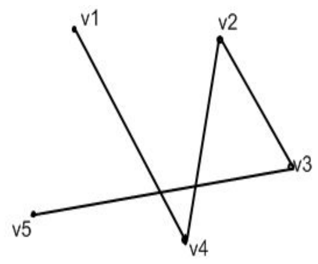
Матрица смежности графа $G_1(X) \cap G_2(X)$ будет иметь следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Геометрические изображения графов $G_1 \cup G_2$ и $G_1 \cap G_2$ представлены на рис.3.



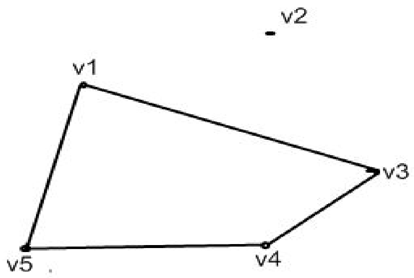
$G_1 \cup G_2$



$G_1 \cap G_2$

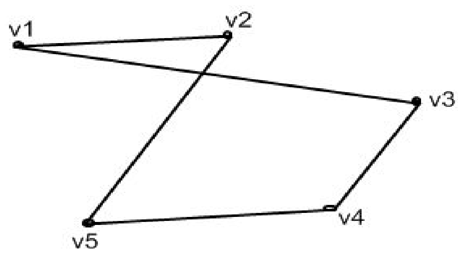
рис. 3

На рис. 4а представлен граф, дополнительный графу G_1, а на рис. 4б – граф, дополнительный графу G_2.



$\overline{G_1}$

рис. 4 а



$\overline{G_2}$

рис. 4 б

Композицию заданных графов получают в соответствии с вышеописанным. Ниже представлен подробный перечень упорядоченных пар вершин, определяемых заданными графами, и результат их композиции (пары, дающие уже имеющийся результат, не представлены).

$(1, 2), (2, 3) \to (1, 3)$, $(1, 2), (2, 4) \to (1, 4)$, $(1, 4), (4, 2) \to (1, 2)$,
$(1, 4), (4, 1) \to (1, 1)$, $(2, 1), (1, 5) \to (2, 5)$, $(2, 1), (1, 4) \to (2, 4)$,
$(2, 3), (3, 2) \to (2, 2)$, $(2, 4), (4, 1) \to (2, 1)$, $(2, 5), (5, 3) \to (2, 3)$,
$(3, 5), (5, 1) \to (3, 1)$, $(3, 5), (5, 3) \to (3, 3)$, $(4, 1), (1, 4) \to (4, 4)$,
$(4, 1), (1, 5) \to (4, 5)$, $(4, 2), (2, 3) \to (4, 3)$, $(5, 2), (2, 3) \to (5, 3)$,
$(5, 2), (2, 4) \to (5, 4)$, $(5, 3), (3, 2) \to (5, 2)$, $(5, 3), (3, 5) \to (5, 5)$.

Результат композиции – смешанный граф – изображен на рис.5.

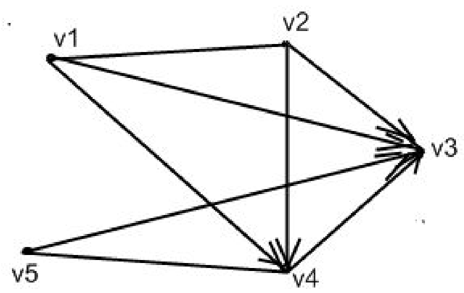


рис.5

На графах определяют также некоторые другие операции.

Так, **операция удаления вершины** *v* из графа *G* приводит к построению графа $G' = (V', X') = G \setminus \{v\}$, где $V' = V \setminus \{v\}$, а множество ребер X' содержит те и только те ребра графа *G*, которые не инцидентны вершине *v*.

Операция стягивания ребра состоит в удалении ребра между вершинами $x, y \in V$ и отождествлении этих вершин в одну, например в вершину *v*, множество ребер, инцидентных вершинам *x* и *y*, в новом графе полагают инцидентными вершине *v*. Остальные вершины и ребра результирующего графа остаются такими же, как в исходном графе. Иногда операция может состоять просто в удалении ребра или нескольких ребер из заданного графа.

Связность графов и деревья

Пусть имеется граф $G = (V, X)$.

Маршрутом *M* в графе *G* называют последовательность вершин и ребер из *G*

$$M = (v_{i1}, x_{i1}, v_{i2}, x_{i2}, v_{i3}, \ldots, x_{ip}, v_{ip+1})$$

такую, что соседние ребра x_{ik}, x_{ik+1} $(k = 1, 2, \ldots, p)$ последовательности *M* являются смежными, а вершины v_{il}, v_{il+1} являются концевыми для ребра x_{il}. Вершину v_{i1} называют **начальной**, а вершину v_{ip+1} - **конечной** вершиной маршрута *M*. Число *p* ребер маршрута называют его **длиной**.

Иногда маршрут *M* задают либо последовательностью составляющих его ребер:

$$M = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ip}),$$

либо последовательностью вершин, через которые он проходит:

$$M = (v_{i1}, v_{i2}, v_{i3}, \ldots, v_{ip+1}).$$

Граф *G* называют **связным**, если между любыми его двумя вершинами существует маршрут. Связный граф образует компоненту связности. В общем случае граф *G* может иметь несколько компонент связности.

Так, на рис. 6 представлен граф, имеющий две компоненты связности: одна из них порождается вершинами $v_1, v_2, v_3, v_5, v_6, v_7$ графа, а другая – вершиной v_4.

Неформально компоненту связности графа можно определить как такую часть графа *G*, которую можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и, возможно, проходя по одной и той же линии (ребру) несколько раз.

Маршрут *M* называют **цепью**, если в нем нет повторяющихся ребер. Цепь называют **простой**, если в ней нет повторяющихся вершин. В ориентированном графе цепь называют также **путем**.

Так, на рис. 6 маршрут $M = (v_6, v_7, v_3, v_5, v_7, v_3, v_1)$ связывает вершины v_6 и v_1.

Цепь $C = (v_6, v_7, v_5, v_3, v_7, v_1)$ связывает вершины v_6 и v_1.

Наконец, простая цепь $P = (v_6, v_7, v_3, v_1)$ также связывает вершины v_6 и v_1.

Если в некоторой цепи начальная и конечная вершины совпадают, то такая цепь называется **циклом**. В ориентированном графе цикл называют также **контуром**. Так, на рис. 6, имеется трехвершинный цикл (v_1, v_2, v_3).

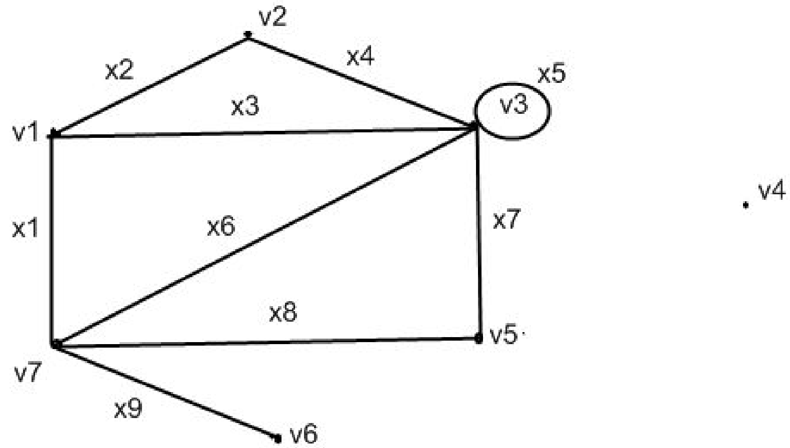


рис.6

Связный граф G, не имеющий циклов, называется **деревом**. Если граф G имеет несколько компонент связности и не имеет циклов, то такой граф называют **лесом**.

Ориентированное дерево – иногда его называют **корневым деревом** – это ориентированный граф без циклов, удовлетворяющий следующим условиям:

- имеется в точности одна вершина, называемая корнем, в которую не входит ни одно ребро;
- в каждую вершину, кроме корня, входит ровно одно ребро;
- из корня в каждую вершину идет только один путь.

Пусть $\vec{G} = (V, \vec{X})$ - граф, являющийся деревом. Если имеется путь из вершины v в вершину ω, то v называется **предком** (predecessor) вершины ω, а ω - **потомком** (successor) вершины v. Более того, если $(v, \omega) \in \vec{X}$, то v называется **подлинным предком (отцом)** вершины ω, а ω - **подлинным потомком (сыном)** вершины v.

Вершина без подлинных потомков называется **листом** (leaf или pendant vertex). Вершина v и ее потомок вместе образуют **поддерево** $\overline{G}$, и вершина v называется **корнем** этого поддерева.

Глубина вершины v в дереве – это длина пути из корня в v.

Высота вершины v в дереве – это длина самого длинного пути из v в какой-нибудь лист. **Высотой дерева** называется высота его корня. **Уровень вершины** v в дереве равен разности высоты дерева и глубины вершины v.

Упорядоченным деревом называют дерево, в котором множество сыновей каждой вершины упорядочено в некотором порядке. При изображении упорядоченного дерева полагают, что множество сыновей каждой вершины упорядочено слева направо.

Двоичным (бинарным) деревом называется такое упорядоченное дерево, в котором:

- каждый сын произвольной вершины рассматривается либо как левый, либо как правый сын;

- каждая вершина имеет не более одного левого сына и не более одного правого сына.

На рис. 7 изображено двоичное дерево.

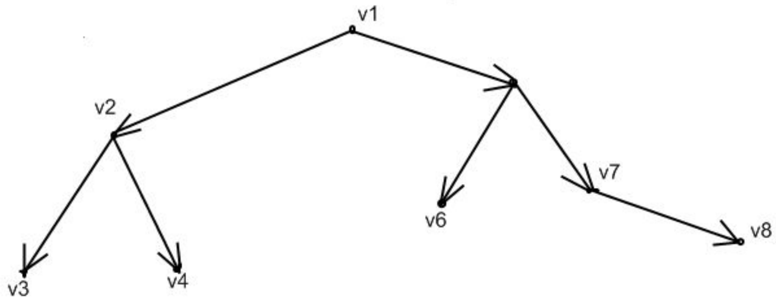


рис. 7

Числа графов

Более полно граф $G=(V,X)$ можно охарактеризовать так называемыми числами графа. Определим некоторые из них.

Число ребер, инцидентных вершине $v \in V$ графа $G=(V,X)$, называется **локальной степенью вершины** v и обозначается $\deg(v)$. Граф, у которого локальные степени всех вершин равны между собой, называют **однородным**.

Петля дает вклад в степень, равной 2, т.к. оба конца приходят в эту вершину.

Вершина графа, имеющая степень равную 0, называется **изолированной**. Граф, состоящий из изолированных вершин, называется **0-графом**. Вершина графа, имеющая степень равную 1, называется **висячей**.

Так, на рис. 8 вершина v_5 - изолированная, а вершины v_6 и v_7 - висячие.

$\deg(v_1)=4,\quad \deg(v_2)=3,\quad \deg(v_3)=3,\quad \deg(v_4)=4,$

$\deg(v_5)=0,\quad \deg(v_6)=1,\quad \deg(v_7)=1.$

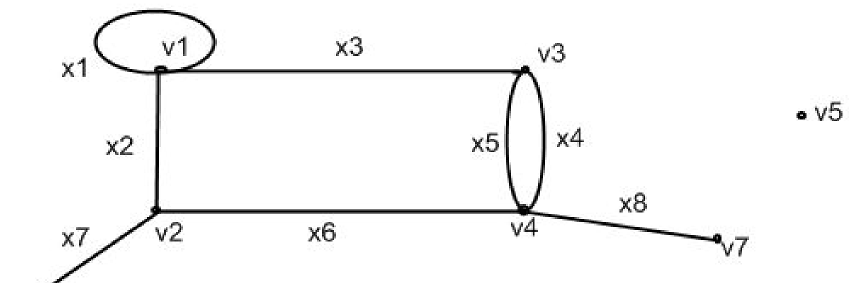


рис. 8

Сумма степеней всех вершин графа $G=(V,X)$ есть число четное, равное удвоенному числу ребер графа

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) = 2m, \qquad n=|v| \text{ - число вершин}$$

$$m=|x| \text{ - число ребер.}$$

Вершина называется **четной (нечетной)**, если ее степень четное (нечетное) число.

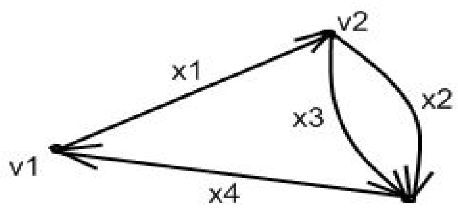
Число нечетных вершин любого графа четно.

У полного графа, имеющего n вершин, степень любой вершины v_i равно:

$$\deg(v_i) = n - 1,$$

а число ребер $\quad x = \frac{1}{2} n \cdot \deg(v_i) = \frac{n \cdot (n-1)}{2} = C_n^2.$

Степенью входа (выхода) вершины ориентированного графа $G = (V, X)$, называется число дуг, для которых эта вершина является концом (началом). Степень входа вершины v обозначается $\deg_+(v)$, а степень выхода обозначается $\deg_-(v)$.



$$\deg_+(v_1) = 1, \quad \deg_+(v_2) = 1, \quad \deg_+(v_3) = 2,$$
$$\deg_-(v_1) = 1, \quad \deg_-(v_2) = 2, \quad \deg_-(v_3) = 1.$$

Цикломатическим числом графа G называют число

$$\gamma(G) = m - n + p,$$

где m – число ребер, n – число вершин, p – число компонент связности.

С содержательной точки зрения цикломатическое число определяет число ребер, которые необходимо удалить из графа G, чтобы он не имел циклов.

Эйлеровы и гамильтоновы графы

Цикл графа G, в котором содержатся все ребра графа и каждое ребро встречается в нем только один раз, называется **эйлеровым**. Граф G, в котором имеется эйлеров цикл, называется **эйлеровым**.

Неформально эйлеров граф можно определить как такой, который можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и не проходя дважды по одному и тому же ребру.

Цикл графа G, проходящий через каждую его вершину по одному разу, называют **гамильтоновым**. Граф, в котором имеется гамильтонов цикл, называют **гамильтоновым**.

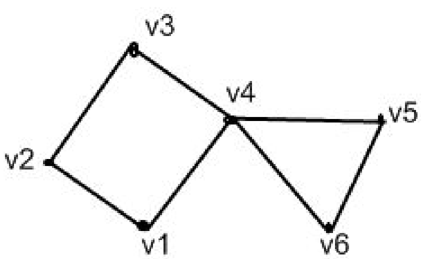


рис. 9 а

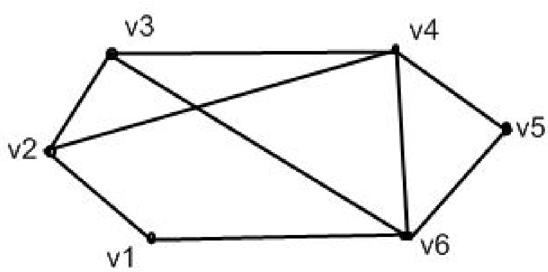


рис. 9 б

На рис. 9а, б представлены соответственно эйлеров и гамильтонов графы. Очевидно, что полный граф является как эйлеровым, так и гамильтоновым.

Имеется простой критерий (признак) существования в графе эйлерова цикла.

Теорема. Связный неориентированный граф G содержит эйлеров цикл тогда и только тогда, когда все его вершины имеют четную степень.

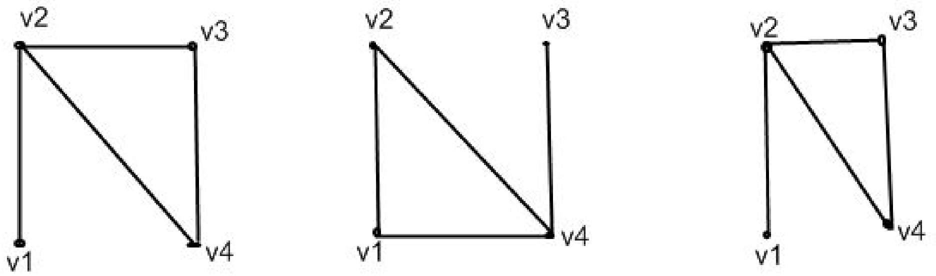
К сожалению, неизвестен такой же общий простой критерий существования гамильтонова цикла в графе. Известны лишь некоторые критерии для частных случаев.

Так, например, известно, что если для любой пары вершин $v_i, v_j \in V$ графа G сумма локальных степеней больше или равна числу вершин графа, т.е. $\deg(v_i) + \deg(v_j) \geq n$, то в таком графе существует гамильтонов цикл.

Изоморфные графы

Графы $G = (V, X)$ и $G' = (V', X')$ называют **изоморфными** в случае возможности установления между их вершинами и ребрами взаимно однозначного соответствия $V \leftrightarrow V', X \leftrightarrow X'$ такого, что, если v_i, v_j из V соответствуют $v'_i, v'_j \in V'$, то ребро $\{v_i, v_j\} \in X$ соответствует ребру $\{v'_i, v'_j\} \in X'$.

Иначе говоря, графы G и G' изоморфны, если между их вершинами можно установить взаимно однозначное соответствие такое, что вершины $v'_i, v'_j \in V'$ графа G' соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие им вершины $v_i, v_j \in V$ графа G соединены ребром.



а б в

рис. 10

На рис.10 представлен пример изоморфных графов.

Ясно, что если графы G и G' изоморфны, то один из графов может быть получен из другого некоторой подстановкой вершин, переводящих один граф в другой.

Таким образом, изоморфные преобразования графов, заданных матрицами смежности или инцидентности, состоят в перестановке строк или столбцов. Поэтому указанные преобразования матриц являются допустимыми, так как не выводят из класса изоморфных графов. Это **тождественные преобразования**.

Понятие изоморфизма используется в практических приложениях. Покажем одно из них.

Граф G называют **плоским**, если он может быть изображен на плоскости так, чтобы его ребра пересекались только в вершинах. Понятие плоского графа важно, например, при проектировании печатных плат в приборостроении.

Граф называют **планарным**, если он изоморфен плоскому графу.

Покрывающие деревья

Большое значение в теории графов имеет понятие **покрывающего дерева** (spanning tree).

Пусть имеется граф $G = (V, X)$. Связный суграф $T = (V, X_1)$ графа G называется **покрывающим деревом (остовом, каркасом)** графа G, если он не содержит циклов. Любое покрывающее дерево, когда он существует, содержит n-1 ребер, где n – число вершин графа.

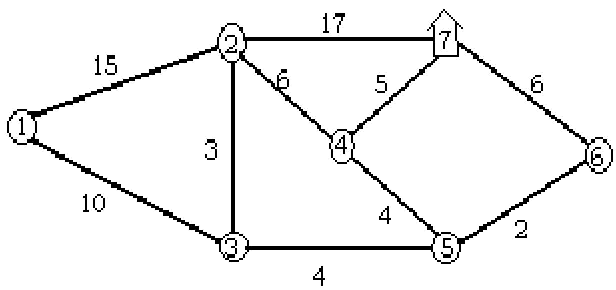
Задача определения кратчайшего пути

1. Метод присвоения меток

Задача состоит в том, чтобы найти кратчайший путь на графе от какой-то выделенной вершины до любой другой вершины.

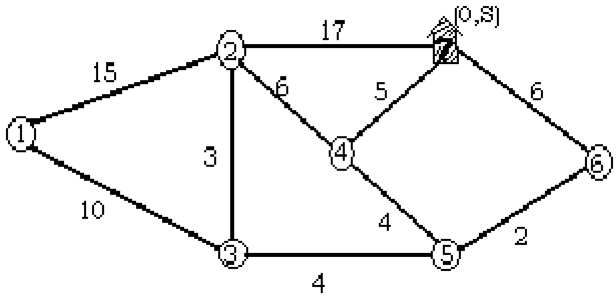
Пример. Узел 7 – склад, остальные узлы – строительные площадки компании. Показатели на дугах – расстояния в километрах.

Надо найти кратчайшие расстояния от склада до каждой строительной площадки. Какова длина кратчайшего пути от склада до строительной площадки 1? Проходит ли кратчайший путь от склада до строительной площадки 1 через строительную площадку 2? Какова длина кратчайшего пути от склада до строительной площадки 2? Проходит ли кратчайший путь от склада до строительной площадки 2 через строительную площадку 4?



Решим эту задачу методом присвоения меток. Каждому узлу присваиванием метку из двух чисел. Первое число – это минимальное расстояние от узла 7 до данного узла, второе – номер предыдущего узла на пути от узла 7 до данного узла. Узел, для которого мы определили путь от узла 7, назовем **помеченным.** Узел, для которого такой путь еще не определен, назовем **непомеченным.** Если мы определили кратчайшее расстояние от узла 7 до данного узла, то соответствующую метку назовем **постоянной** и будем обозначать в круглых скобках. Все остальные метки назовем **временными** и будем обозначать в квадратных скобках. Узлы с постоянными метками будем закрашивать.

Итак, узлу 7 присваиваем метку (0,S), где 0 – это расстояние от узла 7, S – обозначение стартового узла.



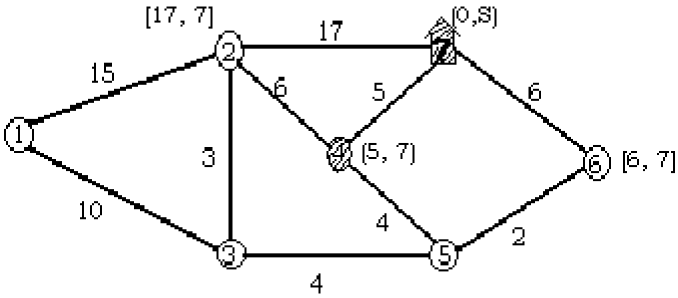
Узел 7 связан с узлами 2, 4, 6. Длины соответствующих ребер 17, 5, 6. Поэтому узлам 2, 4, 6 присваиваем временные метки [17, 7], [5, 7], [6, 7] соответственно (первое число – длина пути от узла 7 до данного узла, второе – это предшествующий узел).

После выполнения этой операции можно сделать два следующих шага:

- найти участок (участки) минимальной длины и соответствующую временную метку сделать постоянной;

- узел (узлы), которому соответствует появившаяся постоянная метка, становится новым стартом.

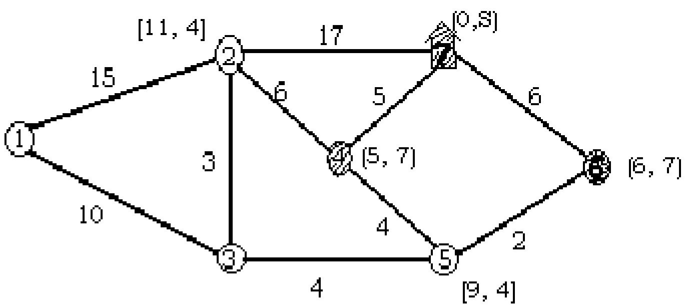
После выполнения этой операции временная метка с наименьшим расстоянием до узла 7 становится постоянной. Это метка (5, 7) узла 4. Поэтому следующий шаг мы начнем с узла 4.



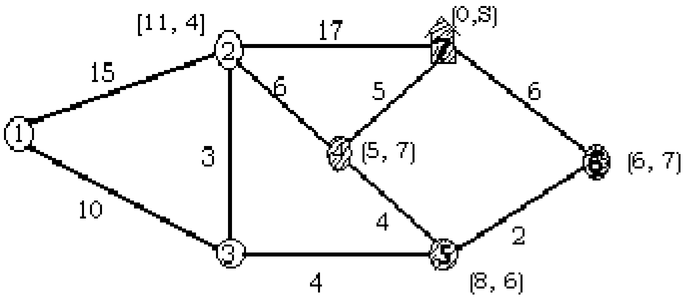
Узел 4 непосредственно связан с узлами 2 и 5 без постоянных меток. Длина ребра 4 – 5 равна 4, метка узла 4 – (5, 7) $\Rightarrow$ временная метка узла 5 равна [5 + 4, 4] = [9, 4]. Длина ребра 4 – 2 равна 6, метка узла 4 – (5, 7) $\Rightarrow$ временная метка узла 2 равна [5 + 6, 4] = [11, 4]. Таким образом, мы нашли путь от узла 7 до узла 2 длины 11.

Узел 2 помечен меткой [17, 7], но 11 < 17 $\Rightarrow$ старую метку [17, 7] узла 2 мы меняем на новую временную метку [11, 4], где 11 – длина пути от узла 7 до узла 2, а 4 – номер предшествующего узла.

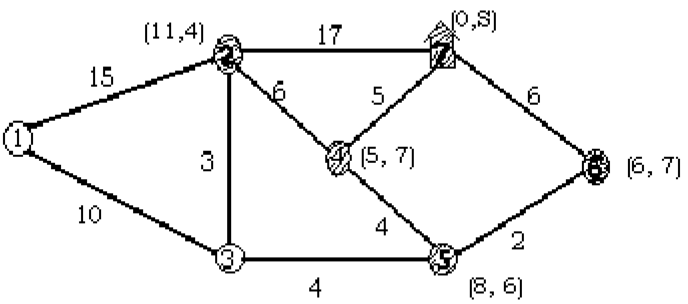
После этого из всех временных меток [11, 4], [9, 4], [6, 7] выбираем метку с наименьшим первым числом. Это [6, 7]. Эта метка становится постоянной, а очередной шаг мы начнем с узла, соответствующего этой метке, узла 6.



Этот узел связан с узлом 5 без постоянной метки. Длина ребра 6 – 5 равна 2, метка узла 6 – (6, 7) ⇒ временная метка узла 5 равна [6 + 2, 6] = [8, 6]. Но узел 5 уже помечен меткой [9, 4]. Так как 8 < 9, то узлу 5 припишем новую метку [8, 6]. После этого из всех временных меток [11, 4] и [8, 6] метку с наименьшим первым числом (8, 6) объявляем постоянной, а следующий шаг начнем с соответствующего ей узла 5.

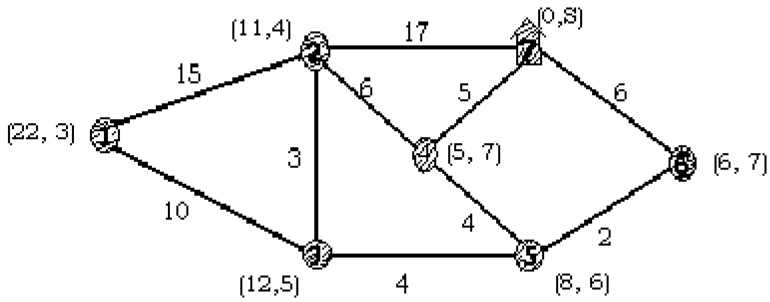


Узел 5 связан только с одним узлом без постоянной метки – узлом 3. Длина ребра 5 – 3 равна 4, метка узла 5 – (8, 6) ⇒ временная метка узла 3 равна [8 + 4, 5] = [12, 5]. Теперь из временных меток [11, 4] и [12, 5] метку с наименьшим первым числом (11, 4) объявляем постоянной, а следующий шаг начнем с соответствующего ей узла 2.



Узел 2 связан с узлами 1 и 3 без постоянных меток. Длина ребра 2 – 1 равна 15, метка узла 2 – (11, 4) ⇒ узлу 1 припишем временную метку [11 + 15, 2] = [26, 2]. Длина ребра 2 – 3 равна 3, метка узла 2 – (11, 4) ⇒ мы могли бы пометить узел 3 временной меткой [11 + 3, 2] = [14, 2], но узел 3 уже помечен меткой [12, 5] с меньшим первым числом. Так что метку узла 3 не меняем. Теперь

из временных меток [26, 2] и [12, 5] метка с наименьшим первым числом становится постоянной (12, 5), а соответствующего ей узла 3 начнем следующий шаг. Метку узла 1 меняем на (12 + 10, 3) = (22, 3). Всем узлам приписаны постоянные метки. Действия алгоритма прекращается.



Первое число метки у каждой вершины – это длина кратчайшего пути от узла 7 до данной вершины. Чтобы восстановить кратчайший путь от узла 7 до какой-то вершины, мы должны из этой вершины перейти в соседнюю (ее номер – это второе число метки). И так до вершины 7.

Теперь мы можем ответить на вопросы задачи. Метка узла 1 – (22, 3) $\Rightarrow$ длина кратчайшего пути от узла 7 до узла 1 равна 22. Из узла 1 мы идем в узел 3. Метка узла 3 – (12, 5) $\Rightarrow$ идем в узел5. Метка узла 5 – (8, 6) $\Rightarrow$ идем в узел 6. Метка узла 6 – (6, 7) $\Rightarrow$ идем в узел 7, т.е. кратчайший путь 1 – 3 – 5 – 6 – 7. Он не проходит через узел 2.

2. Задача о кратчайшем пути между двумя пунктами

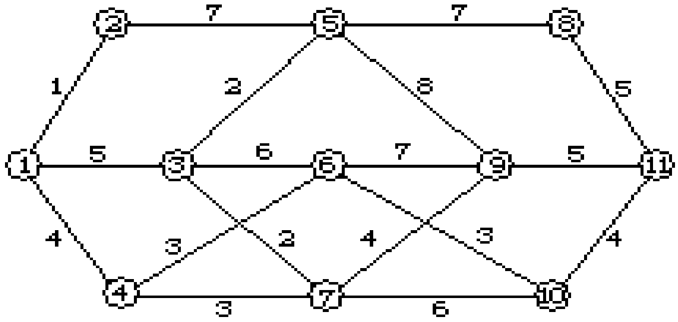
Известна схема дорог. Требуется перевести груз из одного пункта в другой по маршруту минимальной длины.

Двигаясь от конечного пункта к начальному пункту, каждой вершине припишем число по определенным правилам. Конечной вершине присвоим число 0. Если i-я вершина в направлении от начального пункта к конечному пункту непосредственно соединена с вершинами $j_1,...,j_k$, которым приписаны числа $r(j_1),...,r(j_k)$, то вершине i приписывается число $r(i)=\min\limits_s(r(j_s)+t(i,j_s))$, где $t(i,j_s)$ – длина ребра (i,j_s).

Пусть этот минимум достигается до вершины j_m. Тогда ребро (i,j_m) покажем двумя чертами со стрелкой от i к j_m. Если таких вершин j_m несколько, то на этом шаге будет несколько двойных ребер. Число, приписанное начальному пункту, равно минимальной длине искомого маршрута. Двигаться от начального пункта к конечному пункту нужно по двойным ребрам со стрелками.

Пример. Найдем маршрут минимальной длины от пункта 1 к пункту 11.

Припишем вершинам числа вместо номеров. Для 11-й вершины это 0.



11-я вершина соединена с 8-й, 9-й и 10-й вершинами, которым припишем числа 0 + 5 = 5, 0 + 5 = 5, 0 + 4 = 4 соответственно. Все эти ребра покажем двумя чертами со стрелками.

По числам 8-й и 9-й вершин найдем число 5-й вершины: min(5 + 7, 5 + 8) = 12. Ребро (5, 8) изобразим двумя чертами со стрелкой.

По числам 8-й и 9-й вершин найдем число 6-й вершины: min(5 + 7, 4 + 3) = 7. Ребро (6, 10) изобразим двумя чертами со стрелкой.

По числам 8-й и 9-й вершин найдем число 7-й вершины: min(5 + 4, 4 + 6) = 9. Ребро (7, 9) изобразим двумя чертами со стрелкой.

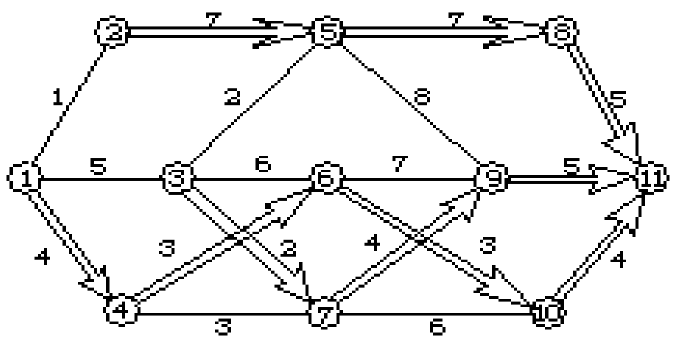
По числу 5-й вершины определим число 2-й вершины: 12 + 7 = 19. Ребро (2, 5) изобразим двумя чертами со стрелкой.

По числам 5-й, 6-й и 7-й вершин определим число 3-й вершины: min(12 + 2, 9 + 2, 7 + 6) = 11. Ребро (3, 7) изобразим двумя чертами со стрелкой.

По числам 6-й и 7-й вершин найдем число 4-й вершины: min(7 + 3, 9 + 8) = 10. Ребро (4, 6) изобразим двумя чертами со стрелкой.

По числам 2-й, 3-й и 7-й вершин определим число 1-й вершины: min(19 + 1, 11 + 5, 10 + 4) = 14. Ребро (1, 4) изобразим двумя чертами со стрелкой. Длина кратчайшего пути равна 14.

Двигаемся из начальной вершины 1 в конечную вершину 11 по ребрам со стрелкой. Получаем кратчайший путь 1 – 4 – 6 – 10 – 11. Его длина равна 14.



Паросочетания в графе

Пусть имеется граф $G=(V,X)$. **Паросочетанием** в графе G является множество несмежных (независимых) ребер. Пусть, далее, M есть паросочетание в G. **Размером паросочетания** M называется число его ребер.

Паросочетание *M* максимально, если его размер нельзя увеличением присоединением некоторого ребра графа G. Очевидно, что наибольшее паросочетание всегда максимально. На рис. 11 оба паросочетания, представленные утолщенными ребрами, являются максимальными. Но только паросочетание на рис. 11б является наибольшим (и совершенным).

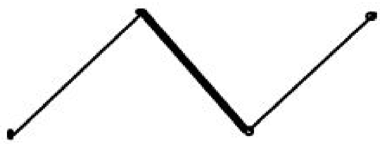


рис. 11 а

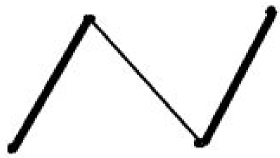


рис.11 б

Вершина графа G, инцидентная некоторому ребру из *M*, называется **насыщенной**. В противном случае вершина графа называется **ненасыщенной**. Паросочетание, в котором все вершины графа G насыщены, называется **совершенным**. Ясно, что совершенное паросочетание всегда является наибольшим. Однако обратное в общем случае неверно.

M–чередующаяся цепь в графе G - это простая цепь, в которой ребра, принадлежащие паросочетанию *M*, чередуются с ребрами, не принадлежащими *M*. *M*–чередующаяся цепь называется увеличивающей, если она начинается и заканчивается ненасыщенными вершинами.

Имеет место **теорема Бержа**.

Теорема. Паросочетание *M* в графе G является наибольшим тогда и только тогда, когда в G нет увеличивающей *M*-чередующейся цепи.

Граф на рис. 11а представляет собой увеличивающую *M*-чередующуюся цепь. Заменив в этой цепи толстые ребра на тонкие, а тонкие – на толстые, получим наибольшее паросочетание, изображенное на рис. 11б.

Потоки в сетях

Сетью называют ориентированный граф $\vec{G} = (V, \vec{X})$, в каждой дуге которого поставлено в соответствие некоторое число, называемое пропускной способностью дуги. Поток в сети определяет способ пересылки некоторых объектов из одной вершины графа в другую. Пересылка объектов происходит вдоль каждой дуги (по ее направлению). Число объектов, пересылаемых вдоль дуги (x, y), не может превышать пропускной способности $c(x, y)$ этой дуги.

В сети выделяют особые вершины s и t, которые соответственно называются **истоком** и **стоком** сети. На сети формулируют задачу о наибольшем потоке, в результате решения которой находят наибольший поток $F_{\max}$ из источника s в сток t. Этот поток обеспечивается назначением в каждой дуге (x, y) величины $f(x, y)$ передаваемого ею потока.

Задача о наибольшем потоке имеет различные применения. Примерами сети может служить транспортная сеть, в которой определяется наибольший поток грузов, который может быть перевезен из одного города (источника) в другой (сток). Другими примерами могут служить система нефтепроводов, водопроводная сеть, сеть почтовой службы, компьютерная сеть и т.д.

Задача о наибольшем потоке в сети должна удовлетворять следующим условиям.

Для каждой дуги (x, y) сети должно выполняться соотношение

$$0 \le f(x,y) \le c(x,y).$$

Для любой вершины $x\ (x \ne s, x \ne t)$ количество единиц потока, входящего в вершину, должно быть равно количеству единиц потока, выходящего из нее, то есть

$$\sum_{для\ всех\ y \in V} f(x, y) = \sum_{для\ всех\ y \in V} f(y, x).$$

Здесь $\sum\limits_{для\ всех\ y \in V} f(x, y)$ - суммарная величина потока из вершины x в вершину y.

Потоки для источника и стока должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$\sum_{для\ всех\ y \in V} f(s, y) - \sum_{для\ всех\ y \in V} f(y, s) = F,$$

$$\sum_{для\ всех\ y \in V} f(y, t) - \sum_{для\ всех\ y \in V} f(t, y) = F.$$

Здесь подразумевается, что некоторые дуги могут доставлять поток в источник s:

$$\sum_{для\ всех\ y \in V} f(y, s)$$

или забирать поток из стока t

$$\sum_{для\ всех\ y \in V} f(t, y).$$

Таким образом, задача состоит в нахождении наибольшего потока $F_{\max}$, который может быть передан из s в t.

При решении задачи о наибольшем потоке важным этапом является проблема построения увеличивающей цепи, соединяющей источник s со стоком t. В эту цепь могут входить как прямые, так и обратные дуги.

Для построения такой цепи и последующего решения задачи для каждой дуги (x, y) сети находят две величины:

$i(x, y) = c(x, y) - f(x, y), r(x, y) = f(x, y)$.

Здесь $i(x, y)$ - величина, на которую может быть увеличен поток в дуге (x, y), а $r(x, y)$ - величина, на которую может быть уменьшен поток в этой дуге.

В процессе решения задачи дуги сети делятся на следующие виды:

- **стационарные**, в которых поток не может быть ни увеличен, ни уменьшен; множество таких дуг обозначают через N;
- **увеличивающие** – такие, для которых $i(x, y) > 0$, то есть поток в них может быть увеличен; множество таких дуг обозначают через I;
- **уменьшающие** – такие, для которых $r(x, y) > 0$, то есть поток в них может

быть уменьшен; множество таких дуг обозначают через R.

В общем случае $I \cap R = \emptyset$. Дуги, принадлежащие множествам I и R, называют промежуточными.

Если построена некоторая увеличивающая цепь, то величина, на которую может быть увеличен поток в сети вдоль данной цепи, равна наименьшему из чисел $i(x,y)$ для всех прямых дуг цепи, и $r(x,y)$ для всех обратных дуг цепи.

Чтобы увеличить поток в сети вдоль найденной увеличивающей цепи, необходимо увеличить на величину ΔF поток, проходящий через каждую прямую дугу цепи, и на эту же величину уменьшить поток, проходящий через каждую обратную дугу цепи.

Задания для самостоятельной работы

В задачах 1-5 графы $G_1 = (V_1, X_1)$ и $G_2 = (V_2, X_2)$ заданы своими матрицами смежности A и B соответственно. Необходимо:

- построить их геометрические изображения;
- построить матрицы смежности объединения и пересечения графов G_1 и G_2;
- граф $G_1 \cup G_2$ задать матрицей инцидентности;
- определить степени вершин графов $G_1 \cup G_2$ и $G_1 \cap G_2$

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5. $A=\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\0&0&1&1&0\\0&1&0&0&0\\0&1&0&0&1\\1&0&0&1&0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&1&1&1\\1&1&0&1&0\\0&1&1&0&0\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}$

В задачах 6-10 орграф задан матрицей смежности. Постройте его рисунок, определите степени вершин графа и найдите маршрут длины 5.

6. $G=\begin{pmatrix}0&1&1&0&0&1\\0&0&0&1&1&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\1&1&0&0&0&1\\1&1&0&0&1&0\end{pmatrix}$

7. $G=\begin{pmatrix}0&1&1&0&0&1\\1&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&1\\1&0&0&0&0&1\\0&0&1&1&0&0\\0&1&1&0&0&0\end{pmatrix}$

8. $G=\begin{pmatrix}0&1&1&0&0&0\\0&0&1&1&0&0\\1&0&0&0&0&1\\1&1&1&0&0&1\\0&0&0&0&0&1\\1&0&1&1&0&0\end{pmatrix}$

9. $G=\begin{pmatrix}0&1&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\\1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0&1\\1&1&0&0&0&0\end{pmatrix}$

10. $G=\begin{pmatrix}0&0&1&1&0&0\\0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0&1\\1&0&1&0&0&0\\0&0&1&1&0&0\\0&1&1&0&0&0\end{pmatrix}$

В задачах 11-15 ориентированный граф $G=(V,X)$ с множеством вершин $V=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ задан списком дуг X.

а) Постройте реализацию графа G.
б) Постройте матрицу инцидентности графа G.
в) Постройте матрицу смежности графа G.
г) Задайте соответствующий неориентированный граф матрицей смежности.
д) Укажите степени вершин графов.

11. $X=\{(1,2),(2,3),(4,3),(4,5),(6,5),(7,6),(7,1),(7,7),(7,2),(6,4),(4,4),(2,7),(5,3)\}$
12. $X=\{(1,4),(2,1),(4,3),(4,5),(2,6),(7,1),(7,6),(3,2),(5,4),(3,4),(2,2),(6,2),(5,5)\}$
13. $X=\{(1,5),(2,3),(4,5),(4,6),(5,6),(5,1),(6,6),(3,2),(5,4),(6,4),(7,2),(6,7),(7,5)\}$
14. $X=\{(1,1),(2,2),(2,3),(3,5),(4,6),(5,1),(5,6),(5,2),(6,4),(7,4),(7,2),(2,7),(7,5)\}$
15. $X=\{(1,1),(1,3),(2,5),(2,6),(3,6),(3,1),(3,7),(4,4),(4,6),(5,2),(6,3),(6,5),(7,3)\}$

Литература

1. Андерсон Дж.А. Дискретная математика и комбинаторика. – М.: Вильямс, 2003.
2. Вернер М. Основы кодирования. – М.: Техносфера, 2004.
3. Лихтарников Л.М., Сукачева Т.Г. Математическая логика. – СПб.: Лань, 1998.
4. Набебин А.А. Логика и пролог в дискретной математике. – М.: Издательство МЭИ, 1996.
5. Нефедов В. Н., Осипова В. А. Курс дискретной математики. – М.: Издательство МАИ, 1992.
6. Просветов Г. И. Бизнес-планирование: Задачи и решения. 2-е изд. – М.: Альфа-Пресс, 2008.
7. Просветов Г. И. Математические методы в логистике: Задачи и решения. 2-е изд. – М.: Альфа-Пресс, 2008.
8. Просветов Г. И. Математические методы в экономике. 3-е изд. – М.: изд-во РДЛ, 2007.
9. Просветов Г. И. Математические модели в экономике. 2-е изд. – М.: изд-во РДЛ, 2006.
10. Просветов Г. И. Дискретная математика: задачи и решения: учебное пособие – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008.
11. Пухначев Ю. В., Попов Ю. П. Математика без формул. – М.: Столетие, 1995.
12. Плотников А.Д. Дискретная математика. – М.: ООО «Новое знание», 2006.