ABBYY PDF Transformer 2.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

КЫРГЫЗСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. И.РАЗЗАКОВА

Кафедра «Высшая математика»

МАТЕМАТИКА

Лекции по разделу
«Элементы векторной алгебры»
для студентов кредитной системы обучения

БИШКЕК 2011

Рекомендованы
на заседании кафедры
«Высшая математика»
им. Р. Усубакунова
протокол № 10
от.24 мая 2011г.

УДК: 514.122.(076)

Составитель: ПАХЫРОВ З.П.
Математика. Лекции по разделу «Элементы векторной алгебры» для студентов кредитной системы обучения.

Сост.: З.П. Пахыров -Б.: ИЦ «Текник», 2011.-   с.

Лекции написаны в соответствии с программой.

Предназначены для студентов кредитной системы обучения.
Илл.:   2 . Библиогр.:   наименов.

Рецензент: доцент Тагаева С.Б.

Оглавление

Элементы векторной алгебры
§1. Основные понятия

Если, спросив у собеседника, сколько ему лет, Вы получите ответ «20», то вероятно, будете вполне удовлетворены, найдя ответ исчерпывающим.

Если же Вы поинтересуетесь, как попасть в ближайшую деревню, и услышите в ответ, что нужно 5 км, Вам придется задать еще один вопрос:
«А в каком направлении? »

Одни величины вполне характеризуются только числом, другие же не только числом, но и направлением.

Величины, которые вполне определяются их числовым значением, называются *скалярными.* Скалярными величинами, например, являются длина, площадь, объем, масса, температура тела и др.

Величина, определяемая не только числовым значением, но и направлением называется *векторной*. Векторными величинами, например, являются сила, действующая на тело, скорость и ускорение тела при его движении, напряжение магнитного поля в данной точке.

Вектором называется направленный отрезок. На рисунке направление вектора обычно обозначают стрелкой (рис. 1). Если начало вектора находится в точке A, конец – в точке B, то вектор обозначается символом $\overrightarrow{AB}$, или одной какой-нибудь буквой, например $\vec{a}$.

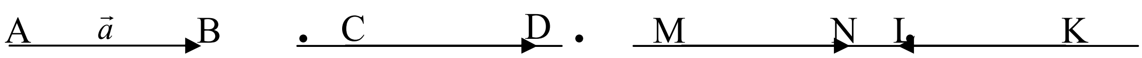


Рис. 1

Начало вектора называют также *точкой его приложения*.

Модулем вектора $\vec{a}$ называется его длина, он обозначается через $|\vec{a}|$. Модуль вектора – скалярная неотрицательная величина.

Нуль – вектором (или нулевым вектором) называется вектор, начало и конец которого совпадают, обозначается символом O. Модуль нуль-вектора равен нулю, а направление не определено.

Единичным вектором называется вектор, длина которого равна единице.

Векторы, лежащие на параллельных прямых (или на одной прямой), называются коллинеарными (на рис. 1 векторы $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{KL}$ и $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{KL}$).

Коллинеарные векторы, имеющие одинаковые направления и равные длины, называются *равными* (на рис. 2 а изображен параллелограмм $ABCD$, где векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$ равны). Так как векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ имеют противоположные направления, то $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$, хотя $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$.

Отметим, что $\overrightarrow{OM_1} \neq \overrightarrow{OM_2}$, где M_1 и M_2-две различные точки окружности радиуса R с центром в точке O (рис. 2, б), поскольку векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{OM}_2$ имеют разные направления.

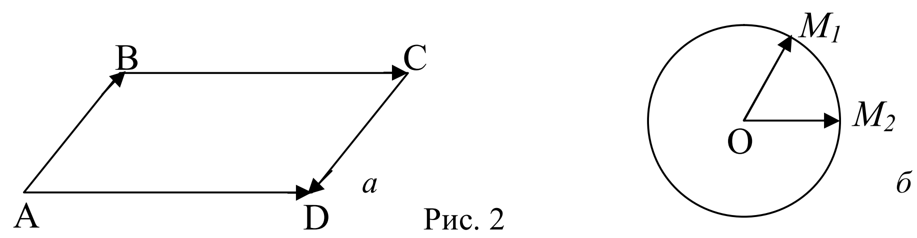


Рис. 2

Векторы, противоположно направленные и имеющие равные длины, называются *противоположными* (векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ на рис. 2 *а*). Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, обозначается через (- $\vec{a}$).

Векторы, лежащие в параллельных плоскостях (или в одной плоскости), называются *компланарными*. Вектор, точка приложения которого может быть выбрана произвольно, называется *свободным*. Если точка приложения вектора строго фиксирована, то вектор называется *связанным*. Если задана прямая, на которой должен быть расположен вектор, то он называется *скользящим*.

В дальнейшем, преимущественно будем рассматривать свободные векторы.

Введем обозначения:

1) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ - «векторы одинаково направлены»

2) $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ - «векторы противоположно направлены»

3) $\vec{a} \,//\, \vec{b}$ - «векторы параллельны»

4) $\vec{a} \not\parallel \vec{b}$ - «векторы непараллельны»

5) $\vec{a} \perp \vec{b}$ - «векторы перпендикулярны»

§2. Линейные операции над векторами. Угол между двумя векторами. Проекция вектора на ось.

Линейными операциями над векторами называются сложение, вычитание и умножение вектора на число.

Суммой двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется третий вектор $\vec{c}$, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, *а* конец – с концом вектора $\vec{b}$ при условии, что вектор $\vec{b}$ отложен из конца вектора $\vec{a}$ (рис. 3 а). Вектор $\vec{c}$ получается по правилу треугольника (рис. 3 а) или по правилу параллелограмма (рис. 3 б).

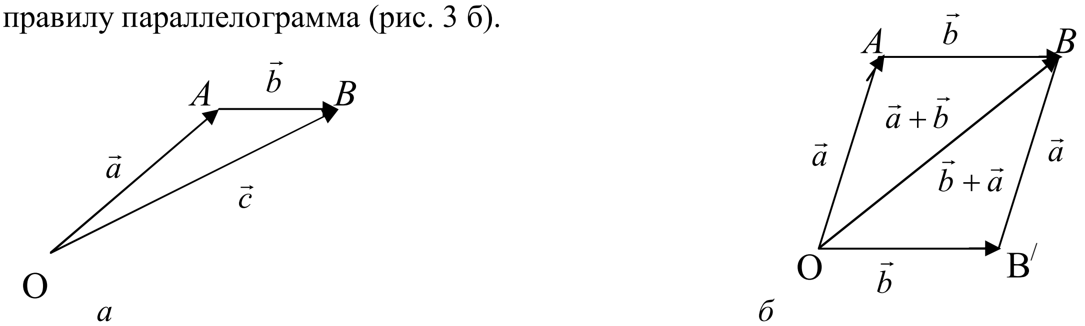


Рис. 3

Аналогично определяется сумма трех и более векторов. *Суммой n* векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ называется вектор, начало которого совпадает с началом первого вектора $\vec{a}_1$, конец – с концом последнего $\vec{a}_n$ при условии, что каждый последующий вектор $\vec{a}_{k+1}$ отложен из конца предыдущего $\vec{a}_k \, (k = 1,2,...,n)$. На рис. 4 изображена сумма трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

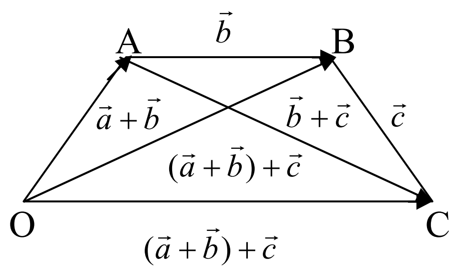


Рис. 4

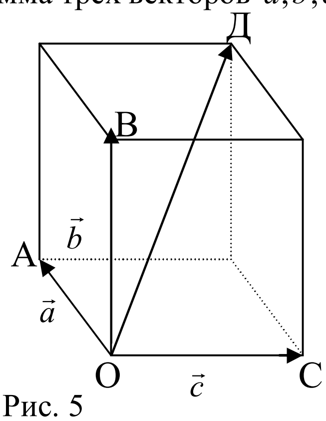


Рис. 5

Очевидно, сумма векторов обладает свойством переместительности (коммутативности)

$$1^0 \quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a},$$

и свойством сочетательности (ассоциативности)

$$2^0 \quad (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

При определении суммы не предполагалось, что векторы являются компланарными. Сумма трех некомпланарных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, наряду с правилом замыкающей получается и по

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

правилу параллелепипеда: сумма $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ равна вектору $\overrightarrow{OD}$, где OD - диагональ параллелипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$, отложенных из одной точки O (рис. 5).

Из определения суммы следует, что $\vec{a}+0=\vec{a}$ т.е. нуль-вектор при сложении векторов играет ту же роль, что и число 0 при сложении чисел, $\vec{a}+(-\vec{a})=0$, т.е. сумма противоположных векторов равна нулю.

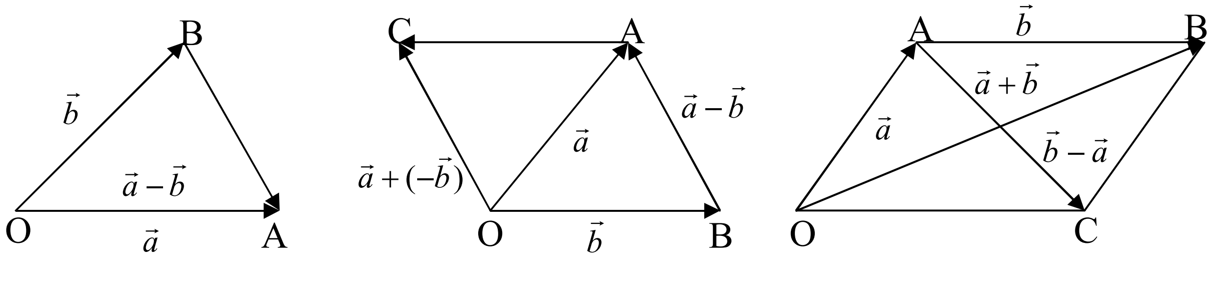
Разностью $\vec{a}-\vec{b}$ двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{d}$, который в сумме с вектором $\vec{b}$ дает вектор $\vec{a}$

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{d}\text{, если } \vec{b}+\vec{d}=\vec{a}.$$

Чтобы получить разность $\vec{a}-\vec{b}$ двух векторов необходимо отложить их из одной точки и соединить конец второго вектора с концом первого (рис. 6 *а*).

Отметим, что $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$, т.е. разность $\vec{a}-\vec{b}$ равна сумме двух векторов $\vec{a}$ и $(-\vec{b})$, где $(-\vec{b})$ - вектор, противиположный вектору $\vec{b}$ (рис. 6 *б*).

Векторы-диагонали параллелограмма $OABC$ (рис. 6 в), построенного на векторах $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, являются соответственно суммой и разностью этих векторов



а *б* *в*

Рис. 6

Произведением вектора $\vec{a}$ на число α называется новый вектор

$$\vec{b}=\alpha\vec{a}, \qquad (1)$$

удовлетворяющий условиям: 1) $|\vec{b}|=|\alpha||\vec{a}|$; 2) $\vec{b}$ и $\vec{a}$ одинаково направлены при $\alpha>0$; 3) $\vec{b}$ и $\vec{a}$ имеют противоположные направления при $\alpha<0$.

Произведение вектора на число обладает следующими свойствами:

3^0 $\alpha(\beta\vec{a})=(\alpha\beta)\vec{a}$

4^0 $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$

5^0 $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$

6^0 $0\cdot\vec{a}=\alpha\cdot 0=0$

Из определения умножения вектора на число следует, что необходимое и достаточное условие <u>коллинеарности двух векторов</u> $\vec{a}$ <u>и</u> $\vec{b}$ выражается равенством

$$\vec{b}=\alpha\,\vec{a} \qquad (2)$$

Пусть дан вектор $\vec{a}$. Рассмотрим вектор коллинеарный вектору $\vec{a}$, одинаково с ним направленный, но имеющий длину, равную единице. Обозначим этот вектор через $\vec{a}^{\,0}$, тогда $|\vec{a}^{\,0}|=1$.

Из определения умножения вектора на число следует, что

$$\vec{a}=|\vec{a}|\vec{a}^{\,0} \qquad (3)$$

т.е. каждый вектор равен произведению его модуля на единичный вектор того же направления.

Пусть в пространстве даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отложим из произвольной точки O векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. *Углом между векторами* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется наименьший угол φ $(0\le\varphi\le\pi)$, на который надо повернуть один из векторов до его совпадения со вторым.

В пространстве заданы вектор $\overrightarrow{AB}$ и ось l (рис. 7).

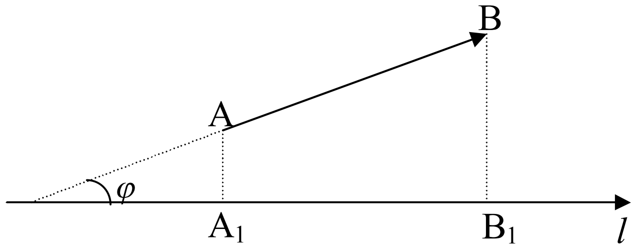


Рис. 7

Пусть A_1-проекция точки A на ось l, B_1-прекция точки B на ось l, т.е. основания перпендикуляров, опущенных из данных точек на эту ось.

Проекцией[1)] вектора на ось l называется величина[2)] направленного отрезка A_1B_1 оси l. Проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l обозначается через $Пр_l\,\overrightarrow{AB}$, т.е.

$$A_1B_1 = Пр_l\,\overrightarrow{AB} \qquad (4)$$

Очевидно,

$$Пр_l\,\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\varphi \qquad (5)$$

где φ -угол между вектором $\overrightarrow{AB}$ и осью l.

Проекция вектора на соь обладает следующими свойствами:

$$Пр_l(\vec{a}+\vec{b}) = Пр_l\vec{a} + Пр_l\vec{b}$$

$$Пр_l(\alpha\,\vec{a}) = \alpha Пр_l\vec{a}$$

Произведение проекции вектора $\vec{a}$ на ось l и единичного вектора $\vec{1}^{\,0}$ этой оси называется составляющей вектора $\vec{a}$ на оси l.

Обозначив эту составляющую символом $сост_l\vec{a}$, по определению получим

$$сост_l\vec{a} = Пр_l\vec{a}\cdot 1^0 \qquad (6)$$

Пример 1. Как должны быть расположены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \left|\vec{a}-\vec{b}\right|$?

Решение. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, то $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ и $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$ являются диагоналями параллелограмма построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Очевидно, для этого длина диагонали $\overrightarrow{OB}$ параллелограмма должна равняться длине диагонали $\overrightarrow{AC}$ (см. рис. 6.в). это может быть только в том случае, если параллелограмм $OABC$ является прямоугольником. Следовательно, $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \left|\vec{a}-\vec{b}\right|$, если $\vec{a}\perp\vec{b}$.

Пример 2. Какому условию должны удовлетворять векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы их сумма и разность были взаимно перпендикулярны?

Решение. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, то $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ и $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$ являются диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Так как, диагонали параллелограмма взаимно перпендикулярны тогда и только тогда, когда он-ромб.

---

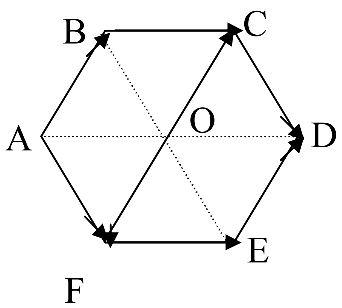
1) Эту проекцию называют алгебраической, в отличие от геометрической проекции – вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$. *В дальнейшем, если это не оговорено особо, будем рассматривать алгебраические проекции.*

2) Величина направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ *некоторой оси называется его длина, взятая со знаком «плюс», если направление отрезка совпадает с положительным направлением оси, и со заком «минус», если оно совпадает с отрицательным направлением оси.*

Пример 3. Какому условию должны удовлетворять ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы имело место соотношение: а) $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$; б) $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}| - |\vec{b}|$?

Решение. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{a}+\vec{b}$ образуют треугольник, поэтому $|\vec{a}+\vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|$ и $|\vec{a}+\vec{b}| > |\vec{a}| - |\vec{b}|$, и так как в треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других сторон и больше их разности. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и однинаково направлены, то $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$, но $|\vec{a}+\vec{b}| > |\vec{a}| - |\vec{b}|$. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и противоположно направлены, то $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}| - |\vec{b}|$, но $|\vec{a}+\vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|$. Таким образом, $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}| \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, а $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}| - |\vec{b}| \Leftrightarrow \vec{a} \downarrow\uparrow \vec{b}$.

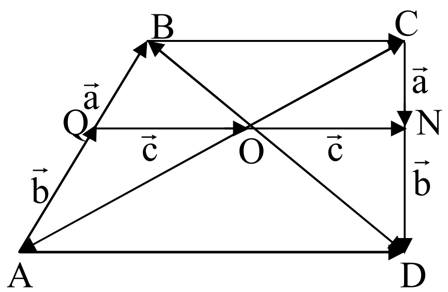
Пример 4. Пусть О-центр правильного шестиугольника $ABCDEF$ (см. рис.). Найдите сумму векторов $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}$.



Решение. Диагонали правильного шестиугольника, пересекающиеся в точке О, делятся этой точкой пополам. Лучи OA *и* OD противоположно направлены. Поэтому $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OD}$. Аналогично, $\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OF}$. Отсюда $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD} = 0$, $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OE} = 0$, $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OF} = 0$ и, значит, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}$.

Пример 5. Пусть A, B, C, D - некоторые точки плоскости, Q - середина AB, N - середина CD, O - середина QN. Найдите $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$.

Решение. Направленные отрезки $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{QB}$ изображают один и тот же вектор, который обозначим $\vec{a}$. Аналогично, положим $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{ND} = \vec{b}$, $\overrightarrow{QO} = \overrightarrow{ON} = \vec{c}$ (см. рис. 9). Тогда
$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QA} = (-\vec{c})+(-\vec{a})$, $\overrightarrow{OB} = \vec{a}-\vec{c}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}-\vec{b}$, $\overrightarrow{OD} = \vec{b}+\vec{c}$. Поэтому
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD} = (-\vec{c})+(-\vec{a})+\vec{a}-\vec{c}+\vec{c}-\vec{b}+\vec{b}+\vec{c} =$
$= (\vec{a}-\vec{a})+(\vec{c}-\vec{c})+(\vec{b}-\vec{b})+(\vec{c}-\vec{c}) = 0+0+0+0 = 0$.



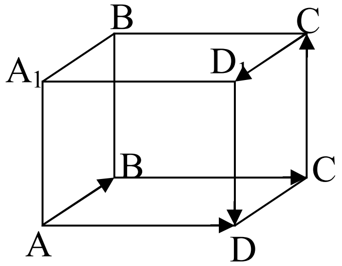
Пример 6. Дан треугольник ABC. Укажите такую точку D, что $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}-3\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$.

Решение. Так как $\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$, то
$(-\overrightarrow{AD})+(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})-3(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB}$, или $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AC}$, т.е. точка D лежит на продолжении стороны AC за точку, причем $\left|\overrightarrow{AD} = 3\left|\overrightarrow{AC}\right|\right|$.

Пример. 7. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найти сумму векторов

$\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{B_1A_1}$, $\overrightarrow{B_1B}$.

Решение. Применяя правило многоугольника, получим (см. рис.)

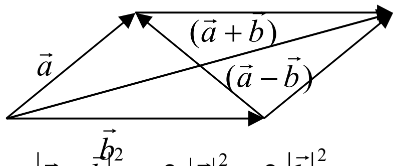


$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1B}=$$
$$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{C_1D_1}+\overrightarrow{D_1D}=\overrightarrow{AD}$$

Пример 8. Даны: $|\vec{a}|=13$, $|\vec{b}|=19$ и $|\vec{a}+\vec{b}|=24$. Вычислить $|\vec{a}-\vec{b}|$.

Решение.

Сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин всех его сторон



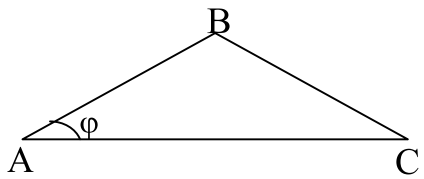
$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}-\vec{b}|^2 = 2\,|\vec{a}|^2+2\,|\vec{b}|^2 \qquad (*)$$

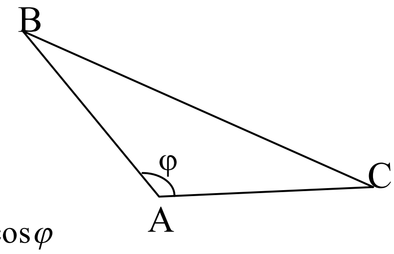
$$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = 2\,|\vec{a}|^2+2\,|\vec{b}|^2-|\vec{a}+\vec{b}|^2 = 2(13)^2+2(19)^2-(24)^2 = 2\cdot169+2\cdot361-576=$$
$$=338+722-576=1060-576=484,\quad |\vec{a}-\vec{b}|=22.$$

Пример 9. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi=60^0$, причем $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$. Определить $|\vec{a}+\vec{b}|$ и $|\vec{a}-\vec{b}|$.

Решение. При решении используем теорему косинусов. Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

$|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=12$. Определить $|\vec{a}+\vec{b}|$ и $|\vec{a}-\vec{b}|$.





$$BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AB\cdot AC\cdot\cos\varphi$$

Знак $\cos\varphi$ зависит от угла A: «+», если угол A острый «-», если угол A тупой (см. рис.).

Пример 10. Пусть, $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ - единичные векторы, составляющие с данной осью ℓ, соответственно углы $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi$. Найти проекцию на ось ℓ вектора $3\vec{a}+3\vec{b}+\vec{c}$.

Решение. Согласно свойствам проекций см. §2.

$Пр_\ell\,(3\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}) = 3Пр_\ell\vec{a}+2\;Пр_\ell\vec{b}+Пр_\ell\vec{c}$, но по формулу (5)

$$Пр_\ell\vec{a}=|\vec{a}|\cos\frac{\pi}{3}=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2},$$

Так как $\vec{a}$ - единичный вектор, т.е. $|\vec{a}|=1$.

Аналогично,

$Пр_\ell\vec{b}=-\frac{1}{2}$, $\quad Пр_\ell\vec{c}=1$, поэтому

$$Пр_\ell\,(3\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}) = 3\cdot\frac{1}{2}+2\left(-\frac{1}{2}\right)-1=-\frac{1}{2}.$$

ABBYY PDF Transformer 2.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

§3. Линейная зависимость векторов на плоскости и в пространстве. Базис на плоскости и впространстве. Аффинные координаты.

Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ называются *линейно зависимыми*, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, не все равные нулю, для которых имеет место равенство

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + ... \lambda_n \vec{a}_n = 0 \qquad (7)$$

Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ называются *линейно независимыми*, если равенство (7) имеет место только при $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$.

Из равенства (6), предполагая, например, что $\lambda_1 \neq 0$, получим

$$\vec{a}_1 = \mu_2 \vec{a}_2 + \mu_3 \vec{a}_3 + ... + \mu_n \vec{a}_n \qquad (8)$$

где $\mu_2 = -\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}$, $\mu_3 = -\dfrac{\lambda_3}{\lambda_1}, ..., \mu_n = -\dfrac{\lambda_n}{\lambda_1}$

Выражение $\mu_2 \vec{a}_2 + \mu_3 \vec{a}_3 + ... + \mu_n \vec{a}_n$ называется *линейной комбинацией векторов* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$.

Таким образом, *если несколько векторов линейно зависимы, то хотя бы один из них всегда можно представить в виде линейной комбинации остальных.*

Справедливо и обратное утверждение: *если один из векторов представлен в виде линейной комбинации других векторов, то все эти векторы линейно зависимы.*

Рассмотрим теперь вопрос о линейной зависимости и линейной независимости векторов на плоскости.

Теорема 1. Всякие три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ на плоскости линейно зависимы, т.е. один из векторов можно представить в виде линейной комбинации остальных.

Доказательство. Достаточно убедиться в том, что один из векторов является линейной комбинацией остальных. Возможны два случая.

1. Среди данных векторов имеется пара коллинеарных, например, a и b. Тогда вследстие равенства (2) имеем $a = \lambda b$, или $a = \lambda b + 0 \cdot c$, т.е. вектор a есть линейная комбинация векторов b и c.

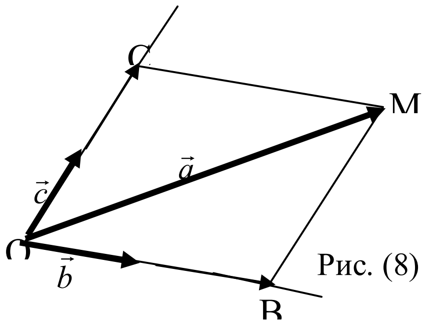


Рис. (8)

2. Среди данных векторов нет ни одной пары коллинеарных. Допустим, что три вектора имеют общее начало O (рис. (8)). Покажемчто вектор a можно представить в виде суммы двух векторов, один их которых коллинеарен вектору b,
А другой – вектору c.

Для этого через конец M вектора a проведем прямые, параллельные векторам b и c, до их пересечения в точках B и C с прямыми, на которых соответсвенно расположены векторы b и c (рис. (8)). Имеем очевидное равенство $\overline{OM} = \overline{OB} + \overline{OC}$. Так как векторы $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$ коллинеарны
соответсвенно векторам b и c, то $\overline{OB} = \lambda_1 b$ и $\overline{OC} = \lambda_2 c$. Поэтому

$$a = \lambda_1 b + \lambda_2 c, \qquad (9)$$

т.е. вектор a является линейной комбинацией векторов b и c.

Следствие 1. Если число данных векторов на плоскости больше трех, то они линейно зависимы.

В самом деле, пусть даны k векторов $a_1, a_2, a_3, ..., a_k$ $(k > 3)$. Так как три вектора на плоскости всегда линейно зависимы, то для векторов a_1, a_2 и a_3 имеем $a_1 = \mu_2 a_2 + \mu_3 a_3$. В таком случае для всех k векторов можно написать

$$a_1 = \mu_2 a_2 + \mu_3 a_3 + +0 \cdot a_4 + ... + 0 \cdot a_k,$$

т.е. вектор a_1 есть линейная комбинация остальных векторов.

Что касается двух векторов a и $в$, то, как известно, они коллинеарны тогда и только тогда, когда имеет место равенство $a = \lambda b$ (см. формулу (2)), т.е. когда векторы a и $в$ линейно зависимы. Отсюда непосредственно вытекает следующая теорема.

Теорема 2. Для того чтобы два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ были линейно независимы, необходимо и достаточно, чтобы они были некомпланарны.

Из теоремы 1 и 2 следует, что максимальное *число линейно независимых векторов на плоскости равно двум.*

Перейдем теперь к векторам в пространстве.

Векторы называются *комплпнарными,* если они лежат в одной плоскости или параллельны одной плоскости.

Заметим, что если компланарные векторы имеют общее начало, то они, очевидно, лежат в одной плоскости.

Теорема 3. Всякие четыре вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ в пространстве линейно зависимы, т.е. один из векторов можно представить в виде линейной комбинации остальных: $\vec{a} = \lambda_1\vec{b} + \lambda_2\vec{c} + \lambda_3\vec{d}$.

Доказательство. Допустим, что рассматриваемые векторы имеют общее начало. Для того чтобы показать их линейную зависимость, достаточно убедиться в том, что один из векторов является линейной комбинацией остальных. Возможны два случая.

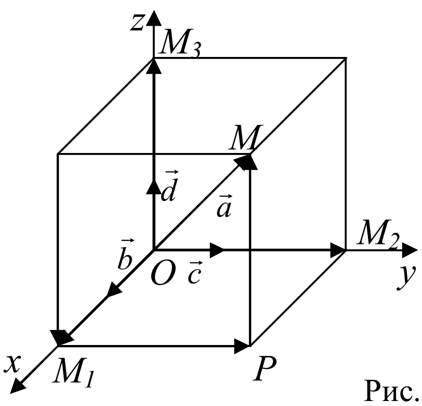


Рис. 9

1. Среди данных векторов существует тройка компланарных, например, векторы a, b и c.

Так как эти векторы лежат в одной плоскости, то по теореме 1 один из них, например вектор a, можно представить в виде линейной комбинации остальных: $a = \mu_1 b + \mu_2 c$.

В таком случае для всех четырех векторов можно написать равенство $a = \mu_1 b + \mu_2 c + 0 \cdot d$, а это означает, что вектор a есть линейная комбинация векторов b, c и d.

2. Среди данных векторов нет ни одной тройки компланарных векторов. в этом случае вектор а может быть представлен в виде суммы трех векторов, коллинеарных соответственно векторам b, c и d. Для этого проведя через точку M – конец вектора a – плоскости, соответственно параллельные трем плоскостям, определяемым парами векторов b и c, c и d, d и b, получим

параллелепипед, диагональю которого является вектор $a = \overline{OM}$ (рис. 9). Очевидно, что $a = \overline{OM} = \overline{OM_1} + \overline{M_1P} + \overline{PM}$. Но $\overline{OM_1} = \lambda_1 b$, $\overline{M_1P} = \overline{OM_2} = \lambda_2 c$, $\overline{PM} = \overline{OM_3} = \lambda_3 d$. Следовательно,

$$a = \lambda_1 b + \lambda_2 c + \lambda_3 d , \qquad (10)$$

т.е. векторы a, b, c и d линейно зависимы.

Аналогично тому, что это было сделано в случае плоскости, в пространстве

1) *если число данных векторов в пространстве больше четырех, то они также линейно зависимы*; 2) *для того, чтобы три вектора в пространстве были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы они были линейно зависимы;* 3) *для того, чтобы три вектора были линейно независимы, необходимо и достаточно, чтобы они были некомпланарны.*

Из сказанного следует, что максимальное число линейно независимых векторов в пространстве равно трем.

Одним из авжнейших понятий линейной и векторной алгебры является понятие базиса.

Базисом на плоскости называется два любых линейно независимых вектора.

Из теоремы 2 следует, что два любых неколлинеарных вектора образуют базис. Пусть $\vec{a}$ - любой вектор на плоскости, а векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис. Так как на плоскости всякие три кторы линейно зависимы, то вектор $\vec{a}$ линейно выражается через векторы базиса, т.е. выполняется соотношение:

$$\vec{a} = \lambda_1\vec{b} + \lambda_2\vec{c} \qquad (9)$$

Если вектор $\vec{a}$ представлен в виде (9), то говорят, что он *разложен по базису*, образованному векторами $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Числа λ_1 и λ_2 называют *аффинными координатами* вектора $\vec{a}$ на плоскости и пишут $\vec{a} = \{\lambda_1; \lambda_2\}$.

Теорема 4. Разложение вектора *a* по базису *b* и *c* является единственным.

Базисом в пространстве называются три любых линейно независимых вектора.

Всякие три некомпланарных вектора образуют базис. Как и в случае плоскости, любой вектор $\vec{a}$ однозначно разлагается по векторам $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ базиса, т.е. выполняется соотношение:

$$\vec{a} = \lambda_1\vec{b} + \lambda_2\vec{c} + \lambda_3\vec{d} \qquad (10)$$

Числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ называют *аффиными координатами вектора в пространстве* и пишут $\vec{a} = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$.

Замечание. Пусть векторы *b,c* и *d*, образующие базис в пространстве, имеют общее начало *O* (начало координат). рассмотрим произвольную точку *M* пространства и ее радиус-вектор $\overline{OM}$, т.е. вектор, соединящий начало координат с этой точкой.

По формуле (10) получим

$$\overline{OM} = \lambda_1 b + \lambda_2 c + \lambda_3 d$$

Аффинные координаты вектора $\overline{OM}$, т.е. числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ называют также *аффинными координатами точки M* и записывают $M(\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3)$.

Пример 1. На плоскости даны два вектора $\vec{p} = \{2;-3\}$, $\vec{q} = \{1;2\}$. Найти разложение вектора $\vec{a} = \{9;4\}$ по базису $\vec{p}, \vec{q}$.

Решение. Разложить вектор $\vec{a}$ по векторам $\vec{p}$ *и* $\vec{q}$ - значит, представить его в виде: $\vec{a} = \alpha\vec{p} + \beta\vec{q}$, где α и β - некоторые числа.

Для их определения запишем

$$\{9;4\} = \alpha\{2;-3\} + \beta\{1;2\},$$

или

$$\begin{cases} 9 = 2\alpha + \beta \\ 4 = -3\alpha + 2\beta \end{cases}.$$

Решив полученную систему, найдем $\alpha = 2$, $\beta = 5$, т.е. $\vec{a} = 2\vec{p} + 5\vec{q}$.

Пример 2. Даны четыре вектора $\vec{a} = \{2;1;0\}$, $\vec{b} = \{1;-1;2\}$, $\vec{c} = \{2;2;-1\}$, $\vec{d} = \{3;7;-7\}$. Разложить вектор $\vec{d}$ по базису $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Решение. По условию $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$, где α, β, γ - некоторые числа. Следовательно,

$$\{3,7,-7\} = \alpha\{2;1;0\} + \beta\{1;-1;2\} + \gamma\{2;2;-1\},$$

или

$$\begin{cases} 3 = 2\alpha + \beta + 2\gamma \\ 7 = \alpha - \beta + 2\gamma \\ -7 = 2\beta - \gamma \end{cases}.$$

Решением которой $\alpha = 2$, $\beta = -3$, $\gamma = 1$, т.е. $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$.

ABBYY PDF Transformer 2.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

§4. Прямоугольный декартов базис. Разложение вектора на составляющие по осям координат. Переход от векторных соотношений к координатным.

Рассмотрим прямоугольную систему координат в пространстве $Oxyz$ (рис. 10) на каждой из осей выберем единичный вектор, направление которого совпадает с положительным направлением оси.

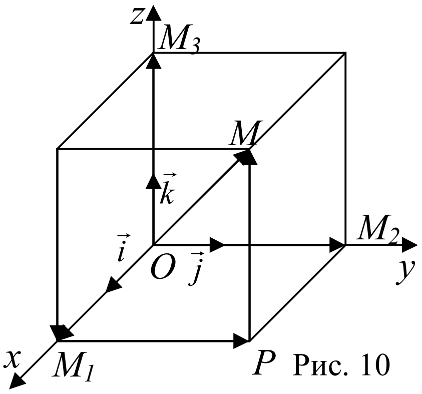


Рис. 10

Так, на оси ox вектор $\vec{i}$, на оси oy - вектор $\vec{j}$, а на оси вектор $\vec{k}$; $|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$. Эти три единичных взаимно перпендикулярных вектора называют *ортами.* Так как орты $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ не компланарны, то они образуют базис, который называется *декартовым ортогональным базисом.*

Рассмотрим вектор $\vec{a}$ в пространстве, его начало совпало с началом координат O. Проведя через конец вектора $\overrightarrow{OM}=\vec{a}$ плоскости, параллельные координатным плоскостям, получим параллелепипед, одной из диагоналей которого является вектор $\vec{a}=\overrightarrow{OM}$.

Из рис. 10 из определения суммы нескольких векторов находим $\vec{a}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{M_1P}+\overrightarrow{PM}$.

Так как $\overrightarrow{M_1P}=\overrightarrow{OM_2}$ и $\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{OM_3}$, то

$$\vec{a}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}+\overrightarrow{OM_3} \tag{11}$$

Векторы $\overrightarrow{OM_1},\overrightarrow{OM_2},\overrightarrow{OM_3}$ являются составляющими вектора $\vec{a}=\overrightarrow{OM}$ по осям ox, oy, oz.

На основании равенства (6) имеем $\overrightarrow{OM_1}=Пр_{ox}\overrightarrow{OM}\cdot\vec{i}$, $\overrightarrow{OM_2}=Пр_{oy}\overrightarrow{OM}\cdot\vec{j}$, $\overrightarrow{OM_3}=Пр_{oz}\overrightarrow{OM}\cdot\vec{k}$. Обозначая $Пр_{ox}\overrightarrow{OM}=X$, $Пр_{oy}\overrightarrow{OM}=Y$, $Пр_{oz}\overrightarrow{OM}=Z$ из (11) получаем

$$\vec{a}=X\vec{i}+Y\vec{j}+Z\vec{k} \tag{12}$$

Формула (12) дает разложение вектора $\vec{a}$ по ортогональному декартову базису или, как говорят, *разложение вектора на составляющие по координатным осям.* Числа X,Y,Z называются прямоугольными декартовыми координатами вектора $\vec{a}$ в пространстве и пишут $\vec{a}=\{X,Y,Z\}$.

Радиус-вектором точки M называется вектор $\vec{a}=\overrightarrow{OM}$, точка приложения которого совпадает с началом координат, а конец находится в точке M (рис. 10).
Если x,y,z - декартовы прямоугольные координаты точки *M,* то

$$X=x,\quad Y=y,\quad Z=z \tag{13}$$

т.е. координаты радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ равны координатам точки.

На основании теоремы о квадрате диагонали прямоугольного параллепипеда получаем формулу, выражающую длину вектора

$$|\vec{a}|=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2} \tag{14}$$

Если даны векторы (т.е. известны их координаты) то, линейные операции над векторами можно заменить арифметическими действиями над их координатами. Так, если даны два вектора $\vec{a}=\{X_1,Y_1,Z_1\}$, $\vec{b}=\{X_2,Y_2,Z_2\}$, то

1) $\vec{a}=\vec{b}$, *если* $X_1=X_2$, $Y_1=Y_2$, $Z_1=Z_2$ (15)

2) $\vec{a}\pm\vec{b}=\{X_1\pm X_2, Y_1\pm Y_2, Z_1\pm Z_2\}$ (16)

3) $\lambda\vec{a} = \{\lambda X_1, \lambda Y_1, \lambda Z_1\}$ (17)

4) *Условие коллинеарности двух векторов* $\vec{a} = \lambda\vec{b}$ *, в этом случае имеет вид*

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{Z_1}{Z_2} \qquad (18)$$

Пример 1. Даны два вектора $\vec{a} = \{3;-2;6\}$ и $\vec{b} = \{-2;1;0\}$. Определить следующие вектора: 1) $\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{a}-\vec{b}$; 3) $2\vec{a}$; 4) $2\vec{a}+3\vec{b}$; 5) определить модуль вектора $\vec{a}$; 6) найти орт вектора $\vec{a}$.

Решение. 1) по формуле (16) найдем

$\vec{a}+\vec{b} = \{3-2;-2+1;6+0\} = \{1;-1;6\}$

2) $\vec{a}-\vec{b} = \{3-(-2);-2-1;6-0\} = \{5;-3;6\}$

3) По формуле (17) $2\vec{a} = 2\{3;-2;6\} = \{6;-4;12\}$

4) $3\vec{b} = 3\{-2;1;0\} = \{-6;3;0\}$

$2\vec{a}+3\vec{b} = \{6;-4;12\} + \{-6;3;0\} = \{6-6;-4+3;12+0\} = \{0;-1;12\}$

5) По формуле (14) находим $|\vec{a}| = \sqrt{3^2+(-2)^2+6^2} = \sqrt{9+4=36} = 7$

6) Ортом вектора $\vec{a}$ называется единичный вектор $\vec{a}^0$ того же направления, что и $\vec{a}$. Из формулы (3) найдем

$$\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{X\vec{i}+Y\vec{j}+Z\vec{k}}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} = \frac{3\vec{i}-2\vec{j}+6\vec{k}}{7} = \frac{3}{7}\vec{i} - \frac{2}{7}\vec{j} + \frac{6}{7}\vec{k}.$$

Пример 2. Определить, при каких значениях α и β векторы

$\vec{a} = 2\vec{i} + \alpha\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} - 6\vec{j} + \beta\vec{k}$ коллинеарны.

Решение. Координаты данных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ должны быть пропорциональны $\frac{3}{2} = \frac{-6}{\alpha} = \frac{\beta}{1}$. Отсюда находим, что $\alpha=-4$, $\beta = \frac{3}{2}$. При этих значениях α и β векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

§5. Координаты вектора, заданного двумя точками. Расстояние между двумя точками. Деление отрезка в данном отношении. Направляющие косинусы вектора.

Начало вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ находится в точке $M_1(x_1, y_1, z_1)$, конец - в точке $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Найдем выражения для его координат через координаты точек M_1 и M_2.

Введем в рассмотрение радиусы векторы точек M_1 и M_2, т.е. $r_1 = \overrightarrow{OM_1}$, $r_2 = \overrightarrow{OM_2}$ (рис. 10). Очевидно, $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. В силу равенства (13) $\vec{r}_1 = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{r}_2 = \{x_2, y_2, z_2\}$. С помощью формулы (16) получаем координаты X, Y, Z вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$

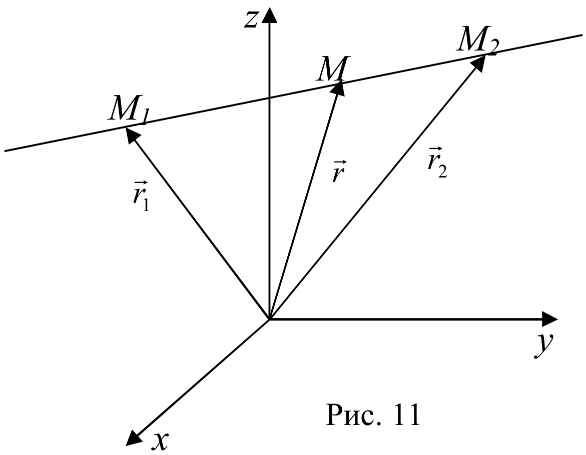


Рис. 11

$$X = x_2 - x_1,\ Y = y_2 - y_1,\ Z = z_2 - z_1 \qquad (19)$$

Следовательно, $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$

По формуле (14) находим расстояние между двумя точками M_1 и M_2.

$$\left|\overline{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \qquad (20)$$

Разделить отрезок $M_1\,M_2$ в данном отношении $\lambda\,(\lambda>0)$ - это значит найти на данном отрезке такую точку $M(x,y,z)$, что имеет место равенство (рис. 10).

$$\frac{M_1M}{MM_2}=\lambda\text{, или } M_1M=\lambda MM_2\text{, или с помощью}$$

Найдем координаты x,y,z искомой точки M. Очевидно, что $\overrightarrow{M_1M_2}=\lambda\overrightarrow{MM_2}$, или с помощью формулы (19) получаем

$$\{x-x_1, y-y_1, z-z_1\}=\lambda\ \{x_2-x\ , y_2-y,\ z_2-z\}$$

Из последнего равенства в силу равенства (13) имеем

$$x-x_1=\lambda(x_2-x_1),\quad y-y_1=\lambda(y_2-y_1),\quad z-z_1=\lambda(z_2-z_1).$$

Отсюда

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda} \qquad (21)$$

Если точка M является серединой отрезка M_1M_2, то $M_1M=\lambda MM_2$ и, следовательно, $\lambda=1$. В этом случае равенство (21) примет следующий вид:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2} \qquad (22)$$

Направление вектора в пространстве определяется углами α, β, γ, которые вектор составляет с осями координат (рис. 12). Косинусы этих углов $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются *направляющими косинусами вектора.*

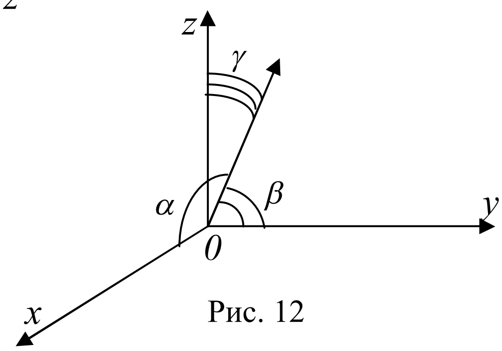


Рис. 12

Пусть дан вектор $\vec{a}=X\vec{i}+Y\vec{j}+Z\vec{k}$.

Принимая во внимание формулу (5), получаем

$$X=\Pi p_{ox}\vec{a}=|\vec{a}|\cos\alpha,$$

$$Y=\Pi p_{oy}\vec{a}=|\vec{a}|\cos\beta,$$

$$Z=\Pi p_{oz}\vec{a}=|\vec{a}|\cos\gamma$$

Отсюда находим выражения для направляющих косинусов:

$$\cos\alpha=\frac{X}{|\vec{a}|},\ \cos\beta=\frac{Y}{|\vec{a}|},\ \cos\gamma=\frac{Z}{|\vec{a}|}$$

В силу равенства (14), получаем

$$\cos\alpha=\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},\ \cos\beta=\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},\ \cos\gamma=\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} \qquad (23)$$

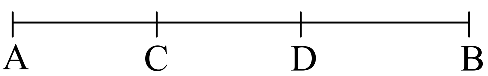
Возводя каждое из равенство (23) в квадрат и складывая их, найдем зависисмость между направляющими косинусами вектора

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \qquad (24)$$

т.е. сумма квадратов направляющих косинусов любого вектора равна единице.

Пример 1. Отрезок, ограниченный точками $A(3;-2)$ и $B(6;4)$ разделен на три части. Определить координаты точек деления.

Решение. Пусть C и D - искомые точки деления см. рис.



Точка D делит отрезок AB в отношении $\lambda = \dfrac{AD}{BD} = 2$, координаты её x и y находя
формулам (21), куда вместо x_1, y_1 подставим координаты точки A и в место x_2, y_2 - координаты точки B:

$$x = \frac{3+2\cdot 6}{1+2} = 5, \qquad y = \frac{-2+2\cdot 4}{1+2} = 2, \qquad D(5;2).$$

Координаты точки $C(x, y)$ можно найти по формулам (22), если рассматривать эту точку как середину отрезка AD:

$$x = \frac{3+5}{2} = 4, \qquad y = \frac{-2+2}{2} = 0, \quad C(4;0).$$

Пример 2. Определить координаты вершин треугольника, зная середины его сторон: $P(2;3)$, $Q(5;4)$, $R(6;-3)$.

Решение. Пусть $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ - искомые вершины треугольника ABC, а P, Q и R, соответственно: середины сторон AB, BC и CA; тогда по формулам (22) имеем

$$\frac{x_1+x_2}{2} = 2, \qquad \frac{x_2+x_3}{2} = 5, \qquad \frac{y_2+y_3}{2} = 4$$

$$\frac{y_1+y_2}{2} = 3, \qquad \frac{x_1+x_3}{2} = 5, \qquad \frac{y_1+y_3}{2} = -3.$$

Решая системы уравнений, найдем координаты вершин: $A(3;-4)$, $B(1;10)$, $C(9;-2)$.

Пример 3. Найти длину вектора $\overrightarrow{AB}$ и его направляющие косинусы, где $A(1;3;2)$ и $B(5;8;-1)$.

Решение. Находим координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ по формуле (19):

$$\vec{a} = \{5-1; 8-3; -1-2\} = \{4;5;-3\}.$$

По формуле (14) находим длину вектора $\vec{a}$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{4^2+5^2+(-3)^2} = \sqrt{16+25+9} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

Направляющие косинусы находим по формуле (23):

$$\cos\alpha = \frac{4}{5\sqrt{2}}, \quad \cos\beta = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos\gamma = -\frac{3}{5\sqrt{2}}.$$

Пример 4. Вектор $\vec{a}$ составляет с осями координат острые углы α, β, γ, причем $\alpha = 45^0$, $\beta = 60^0$. Какой угол он составляет с осями oz.

Решение. Из соотношения (24) найдем угол γ

$$\cos^2 45^0 + \cos^2 60^0 + \cos^2\gamma = 1; \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cos^2\gamma = 1, \qquad \cos^2\gamma = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Так как по условию угол γ острый, то $\cos\gamma = \dfrac{1}{2}$ и $\gamma = 60^0$.

§6. Скалярное произведение двух векторов

Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению их длин на косинус угла между ними.

Скалярное произведение обозначается $\vec{a}\cdot\vec{b}$. Таким образом, по определению

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi \qquad (25)$$

Так как $Пр_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi$ и $Пр_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\cos\varphi$, то равенство (25) можно предоставить в виде

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|Пр_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|Пр_{\vec{b}}\vec{a} \qquad (26)$$

Из соотношения (25) находим выражение для проекции одного вектора на направление другого:

$$Пр_{\vec a}\vec b = \frac{\vec a \cdot \vec b}{|\vec a|}, \qquad Пр_{\vec b}\vec a = \frac{\vec a \cdot \vec b}{|\vec b|} \tag{27}$$

Скалярное произведение обладает свойствами.

1^0. *Скалярное произведение двух векторов обладает переместительным свойством:*

$$\vec a\vec b = \vec b\vec a$$

2^0. $\vec a \cdot \vec a \geq 0$, *причем* $\vec a \cdot \vec a = 0$ *лишь при* $\vec a = 0$

3^0. *Скалярное произведение двух векторов обладает сочетательным свойством относительно скалярного множителя, т.е.*

$$\lambda(\vec a\vec b) = (\lambda\vec a)\vec b = \vec a(\lambda\vec b)$$

4^0. *Скалярное произведение двух векторов обладает распределительным свойством:*

$$(\vec a + \vec b)\vec c = \vec a\vec c + \vec b\vec c$$

5^0. *Если скалярное произведение двух векторов равно нулю, то равен нулю либо один из векторов, либо векторы перпендикулярны.*

Обратно, если $\vec a \perp \vec b$, то $\cos\varphi = 0$ и, следовательно, скалярное произведение векторов равно нулю.

Таким образом, *для того чтобы два вектора были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы их скалярное произведение было равно нулю, т.е.*

$$\vec a\vec b = 0 \tag{28}$$

Рассмотрим $\vec a \cdot \vec a = |\vec a||\vec a|\cos\varphi = |\vec a||\vec a| = |\vec a|^2$

$$\vec a^{\,2} = |\vec a|^2, \qquad |\vec a| = \sqrt{\vec a^{\,2}}, \tag{29}$$

т.е. *скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля.*

Пусть даны два вектора

$$\vec a = X_1\vec i + Y_1\vec j + Z_1\vec k, \quad \vec b = X_2\vec i + Y_2\vec j + Z_2\vec k$$

В таком случае

$$\vec a\vec b = (X_1\vec i + Y_1\vec j + Z_1\vec k)(X_2\vec i + Y_2\vec j + Z_2\vec k) = X_1X_2\vec i^{\,2} + X_1Y_2\vec i\vec j + X_1Z_2\vec i\vec k + Y_1Y_2\vec j^{\,2} +$$
$$+ Y_1Z_2\vec j\vec k + Z_1X_2\vec k\vec i + Z_1Y_2\vec k\vec j + Z_1Z_2\vec k^{\,2} \tag{30}$$

с помощью формул (28) и (29) получаем таблицу скалярного умножения базисных векторов.

$$\vec i^{\,2} = \vec j^{\,2} = \vec k^{\,2} = 1, \quad \vec i\vec j = \vec i\vec k = \vec j\vec k = 0 \tag{31}$$

Используя формулу (31), из (30), получаем

$$\vec a\vec b = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 \tag{32}$$

На основании формулы (32) условие $\vec a \cdot \vec b = 0$ перпендикулярности двух векторов $\vec a$ и $\vec b$ принимает вид

$$X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = 0 \tag{33}$$

Косинус угла между векторами определяется формулой

$$\cos\varphi = \frac{\vec a \cdot \vec b}{|\vec a| \cdot |\vec b|} = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}\sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}} \tag{34}$$

Формула (33) следует из формул (32) и (14).

Пример 1. Векторы $\vec a$ и $\vec b$ образуют угол $\frac{\pi}{3}$. Зная, что $|\vec a| = 3$, $|\vec b| = 4$, найти длину вектора $\vec c = 3\vec a + 2\vec b$.

Решение. Длину вектора $\vec c$ можно найти по формуле (29), если будет известен его скалярный квадрат

$$\vec c^{\,2} = (3\vec a + 2\vec b)^2 = 9\vec a^{\,2} + 12\vec a\vec b + 4\vec b^{\,2}.$$

По определению скалярного произведения $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = 9$, $\vec{b}^2 = |\vec{b}|^2 = 16$,

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3} = 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 6.$$

Следовательно,

$$\vec{c}^2 = 9 \cdot 9 + 12 \cdot 6 + 4 \cdot 16 = 217,$$

и по формуле (29) $|\vec{c}| = \sqrt{217} = 14{,}7$.

Пример 2. Даны два единичных вектора $\vec{m}$ и $\vec{n}$, угол между которыми 120^0. Найти: 1) острый угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = -4\vec{m} + 2\vec{n}$ и $\vec{b} = \vec{m} + 3\vec{n}$; 2) проекцию вектора $\vec{a}$ на направление вектора $\vec{b}$.

Решение. 1) Искомый угол φ определим (см. рис. 6 в). по формуле (25)

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b})}{|\vec{a} + \vec{b}||\vec{a} - \vec{b}|}.$$

По формулам (25) и (14) найдем скалярное произведение векторов $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ и их длины:

$$(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = 15|\vec{m}|^2 - 22|\vec{m}||\vec{n}|\cos 120^0 - 5|\vec{n}|^2 = 15 \cdot 1^2 - 22 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 5 \cdot 1^2 = 21,$$

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = (-3\vec{m} + 5\vec{n})^2 = 9|\vec{m}|^2 - 30|\vec{m}||\vec{n}|\cos 120^0 + 25|\vec{n}|^2 = 9 \cdot 1^2 - 30 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 25 = 49,$$

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = (-5\vec{m} - \vec{n})^2 = 25|\vec{m}|^2 + 10|\vec{m}||\vec{n}|\cos 120^0 + |\vec{n}|^2 = 21,$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{|\vec{a} + \vec{b}|^2} = \sqrt{49} = 7,$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{|\vec{a} - \vec{b}|^2} = \sqrt{21}.$$

Теперь $\cos\varphi = \dfrac{21}{7\sqrt{21}} = \sqrt{\dfrac{3}{7}}$ и $\varphi = \arccos\sqrt{\dfrac{3}{7}} \approx 49^0$.

2) По формуле (27):

$$Пр_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

Найдем $\vec{a}\vec{b} = (-4\vec{m} + 2\vec{n})(\vec{m} + 3\vec{n}) = -4|\vec{m}|^2 - 10|\vec{m}||\vec{n}|\cos 120^0 + 6|\vec{n}|^2 = 7$,

$$|b| = \sqrt{\vec{b}^2} = \sqrt{(\vec{m} + 3\vec{n})^2} = \sqrt{|\vec{m}|^2 + 6|\vec{m}||\vec{n}|\cos 120^0 + 9|\vec{n}|^2} = \sqrt{7}.$$

Теперь $Пр_{\vec{b}}\vec{a} = \dfrac{7}{\sqrt{7}} = \sqrt{7}$.

Пример 3. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = \{3;-1;2\}$ и $\vec{b} = \{2;4;5\}$.

Решение. Находим по формуле (32)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 = 6 - 4 + 10 = 12.$$

Пример 4. Даны векторы $\vec{a} = \{\alpha;3;4\}$ и $\vec{b} = \{4;\alpha;-7\}$. При каком значении α эти векторы перпендикулярны?

Решение. Находим скалярное произведение этих векторов: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4\alpha + 3\alpha - 28$; так как $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Отсюда $7\alpha - 28 = 0$, т.е. $\alpha = 4$.

§7. Векторное произведение двух векторов

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ *называется такой вектор и через* $\vec{a}\times\vec{b}$ *обозначается* $\vec{c}$ (рис. 13), *который*

1) *модуль вектора* $\vec{c}$ *численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$, *т.е.*

$$|\vec{c}| = |\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi \qquad (35)$$

2) *вектор* $\vec{c}\perp\vec{a}$ *и* $\vec{c}\perp\vec{b}$

3) *направление вектора* $\vec{c}$ *таково, что кратчайший поворот от* $\vec{a}$ *к* $\vec{b}$, *если смотреть с конца вектора* $\vec{c}$, *происходит против часовой стрелки (при этом векторы* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *и* $\vec{c}$ *должны быть приведены к общему началу). (рис. 13)*

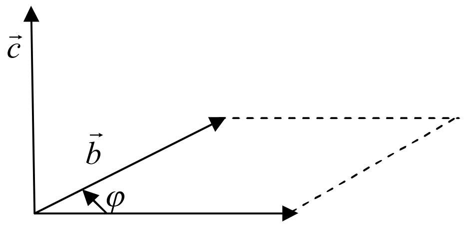


Рис. 13 $\vec{a}$

Для векторного произведения имеет место свойства:

1^0 $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$ - *при перестановке* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *векторное произведение меняет направление на противоположное.*

2^0 $(\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \lambda(\vec{a}\times\vec{b})$ - *свойство сочетательности относительно скалярного множителя.*

3^0 $\left.\begin{aligned}\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) &= (\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{a}\times\vec{c})\\ (\vec{b}+\vec{c})\times\vec{a} &= (\vec{b}\times\vec{a})+(\vec{c}\times\vec{a})\end{aligned}\right\}$ *-распределительные свойтва относительно суммы векторов.*

4^0 *Если векторное произведение двух векторов равно нулю, то либо равен нулю один из векторов, либо равен нулю синус угла между ними, т.е. векторы коллинеарны.*

Чтобы два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ были коллинеарны, необходимо и достаточно,

$$\vec{a}\times\vec{b} = 0 \qquad (36)$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$\vec{a}\times\vec{a} = 0 \qquad (37)$$

Из определения векторного произведения и равенства (35) следует, что

$$\left.\begin{aligned}&\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = 0,\quad \vec{i}\times\vec{j} = \vec{k},\quad \vec{j}\times\vec{k} = \vec{i},\quad \vec{k}\times\vec{i} = \vec{j},\\ &\vec{i}\times\vec{k} = -\vec{j},\quad \vec{j}\times\vec{i} = -\vec{k},\quad \vec{k}\times\vec{j} = -\vec{i}\end{aligned}\right\} \qquad (38)$$

Пусть даны два вектора: $\vec{a} = X_1\vec{i} + Y_1\vec{j} + Z_1\vec{k}$, $\quad \vec{b} = X_2\vec{i} + Y_2\vec{j} + Z_2\vec{k}$

Используя свойства 1^0 и 2^0 векторного произведения и равенства (38), получим

$$\begin{aligned}&\vec{a}\times\vec{b} = (X_1\vec{i} + Y_1\vec{j} + Z_1\vec{k})\times(X_2\vec{i} + Y_2\vec{j} + Z_2\vec{k}) = (X_1Y_2 - Y_1X_2)(\vec{i}\times\vec{j}) +\\ &+(X_1Z_2 - Z_1X_2)(\vec{i}\times\vec{k}) + (Y_1Z_2 - Z_1Y_2)(\vec{j}\times\vec{k}) = (Y_1Z_2 - Z_1Y_2)\vec{i} -\\ &+(X_1Z_2 - Z_1X_2)\vec{j} + (X_1Y_2 - Y_1X_2)\vec{k}\end{aligned}$$

Разности, стоящие в скобках, представляют собой определители второго порядка. Поэтому

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\end{vmatrix} \qquad (39)$$

Площадь треугольника ABC определяется формулой

$$S=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|, \qquad (40)$$

которая следует из формулы (35), так как площадь треугольника ABC составляет половину площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

Пример 1. Найти $(2\vec{a}+3\vec{b})\times(\vec{a}-2\vec{b})$.

Решение. $(2\vec{a}+3\vec{b})\times(\vec{a}-2\vec{b})=2\vec{a}\times\vec{a}+3\vec{b}\times\vec{a}-4\vec{a}\times\vec{b}-6\vec{b}\times\vec{b}=7\vec{b}\times\vec{a}$, так как $\vec{a}\times\vec{a}=0$, $\vec{b}\times\vec{b}=0$ и $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$.

Пример 2. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi=\frac{\pi}{6}$. Зная, что $|\vec{a}|=6$, $|\vec{b}|=5$, вычислить $|\vec{a}\times\vec{b}|$.

Решение. Находим по формуле (35)

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi=5\cdot6\cdot\sin30^0=30\cdot\frac{1}{2}=15.$$

Пример 3. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, вычислить $|(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})|$.

Решение. Находим

$$(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\times\vec{a}+\vec{b}\times\vec{a}-\vec{a}\times\vec{b}-\vec{b}\times\vec{b}=2\vec{b}\times\vec{a},$$

так как $\vec{a}\times\vec{a}=0$, $\vec{b}\times\vec{b}=0$ и $-\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{a}$.

Таким образом по формуле (35)

$$2|\vec{b}\times\vec{a}|=2|\vec{a}|\sin\varphi=2\cdot3\cdot4\cdot\sin90^0=24\cdot1=24.$$

Пример 4. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi=\frac{2\pi}{3}$. Зная, что $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, вычислить $[(2\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b})]^2$.

Решение. $[(2\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b})]^2=[2\vec{a}\times\vec{a}+\vec{b}\times\vec{a}+4\vec{a}\times\vec{b}+2\vec{b}\times\vec{b}]^2=9(\vec{a}\times\vec{b})^2$, так как $\vec{a}\times\vec{a}=0$, $\vec{b}\times\vec{b}=0$ и $\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$.

Следовательно,

$$9(\vec{a}\times\vec{b})^2=9(\vec{a}\times\vec{b})(\vec{a}\times\vec{b})=9|\vec{a}\times\vec{b}|^2.$$

По формуле (35) находим

$$9|\vec{a}\times\vec{b}|^2=9\left(|\vec{a}||\vec{b}|\sin\frac{2\pi}{3}\right)^2=9\cdot\left(1\cdot2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=27.$$

Пример 5. Даны векторы $\vec{a}=\{3;-1;-2\}$ и $\vec{b}=\{1;2;-1\}$. Найти векторное произведение векторов $(2\vec{a}+\vec{b})\times\vec{b}$.

Решение. Находим

$$2\vec{a}=2\{3;-1;-2\}=\{6;-2;-4\},\quad (2\vec{a}+\vec{b})=\{6;-2;-4\}+\{1;2;-1\}=\{6+1;-2+2;-4-1\}=\{7;0-5\}.$$

По формуле (39)

$$(2\vec{a}+\vec{b})\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 7 & 0 & -5\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=10\vec{i}+2\vec{j}+14\vec{k}.$$

Пример 6. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(1;2;0)$, $B(3;0;-3)$ и $C(5;2;6)$.

Решение. Площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, поэтому находим векторное произведение этих векторов:

$$\overrightarrow{AB} = \{3-1;0-2;-3-0\} = \{2;-2;-3\},$$

$$\overrightarrow{AC} = \{5-1;2-2;6-0\} = \{4;0;6\},$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 4(-3\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}).$$

Следовательно,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = 2\sqrt{9+36+4} = 14 \text{ кв. ед.}$$

§8. Смешанное произведение трех векторов

Пусть даны три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Вектор $\vec{a}$ умножим векторно на $\vec{b}$. Полученное векторное произведение $\vec{a}\times\vec{b}$ умножим скалярно на $\vec{c}$, в результате получаем число, которое называют *векторно-скалярным* произведением, или *смешанным произведением* $(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}$ трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$

Для краткости смешанное произведение $(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}$ будем обозначать $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *компланарны* тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю, т.е.

$$(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c} = 0 \tag{41}$$

Справедливо равенство $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}$

Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ неколлинеарны, то $\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|$ равен объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Пусть даны три вектора:

$$\vec{a} = X_1\vec{i} + Y_1\vec{j} + Z_1\vec{k}, \quad \vec{b} = X_2\vec{i} + Y_2\vec{j} + Z_2\vec{k}, \quad \vec{c} = X_3\vec{i} + Y_3\vec{j} + Z_3\vec{k}$$

Определим сначала $\vec{a}\times\vec{b}$:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

Так как $\vec{c} = X_3\vec{i} + Y_3\vec{j} + Z_3\vec{k}$, то используя формулу (31), получим

$$(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c} = \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}X_3 - \begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix}Y_3 + \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}Z_3 = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} \tag{42}$$

Необходимое и достаточное условие компланарности трех векторов (41) выражается равенством

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{43}$$

ABBYY PDF Transformer 2.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

§9. Геометрический смысл смешанного произведения

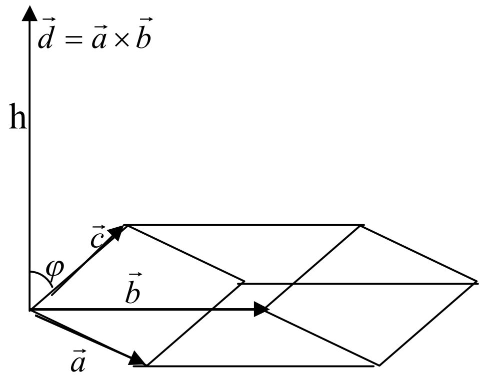


Рис. 14

Отложим данные векторы *a, b* и *c* от общего начала и построим на этих векторах, как на ребрах, параллелепипед (предполагая, что векторы не лежат в одной плоскости). Построим также вектор $d = a \times b$, модуль которого равен площади S параллелограмма, построенного на векторах *a* и *b* как на сторонах (рис. 14). На основании определения смешанного произведения $(abc) = (a \times b) \cdot c$. По определению скалярного произведения

$(a \times b) \cdot c = |a \times b| \cdot |c| \cdot \cos\varphi = S \cdot |c| \cos\varphi$, где φ - угол между векторами *d* и *c*. предполагая, что $\varphi < \dfrac{\pi}{2}$, и обозначая через h высоту параллелепипеда, находим $h = |c| \cos\varphi$. Таким образом,

$$(abc) = Sh.$$

Но произведение Sh равно объему V рассматриваемого параллелепипеда. Следовательно, $(abc) = V$.

Если же $\varphi > \dfrac{\pi}{2}$, то $\cos\varphi < 0$ и $|c|\cos\varphi = -h$. Следовательно, в этом случае $(abc) = -V$.

Итак, окончательно получаем $(abc) = \pm V$, или

$$V = |(abc)|. \tag{87}$$

Смешанное произведение трех векторов с точностью до знака равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, как на ребрах.

Пример 1. Определить компланарны ли векторы $\vec{a} = \{1;3;-2\}$, $\vec{b} = \{2;0;-1\}$, $\vec{c} = \{1;0;-3\}$?

Решение. Так как

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

то векторы не компланарны.

Пример 2. Определить, лежат ли точки $A(1;2;1)$, $B(2;3;0)$, $C(2;-1;-2)$, $D(5;0;-6)$ в одной плоскости.

Решение. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB} = \{1;1;-1\}$, $\overrightarrow{AC} = \{1;-3;-3\}$, $\overrightarrow{AD} = \{4;-2;-7\}$. Проверим, выполняется ли для этих векторов условие (40),

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -3 \\ 4 & -2 & -7 \end{vmatrix} = 0$$

Таким образом, точки A, B, C и D лежат в одной плоскости, так как смешанное произведение векторов $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ равно 0.

Пример 3. Вычислить объем пирамиды с вершинами $O(0;0;0)$, $A(5;2;0)$, $B(2;5;0)$, $C(1;2;4)$.

Решение. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{OA} = \{5;2;0\}$, $\overrightarrow{OB} = \{2;5;0\}$, $\overrightarrow{OC} = \{1;2;4\}$. Из элементарной геометрии известно, что объем пирамиды, построенной на ребрах $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, равен $\dfrac{1}{6}$ объема параллелепипеда построенного на тех же ребрах. Поэтому

$$V_{пир} = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}\right|,$$

т.е.

$$V_{пир} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 14 \text{ куб. ед.}$$

§9. n-мерные векторы и операции над ними. Понятие о линейных пространствах.

Вектором называется упорядоченный набор из n действительных чисел, записываемый в виде $\vec{x} = (x_1; x_2; ...; x_n)$, где x_i - i-й элемент (или i-я координата) вектора $\vec{x}$.

Размерность вектора определяется числом его координат и является его отличительной характеристикой. Например, (2;5) – двумерный вектор, (2;-3;0) – трехмерный, (1;3;-2;-4;7) – пятимерный $(x_1; x_2; ... x_n)$ - n-мерный вектор.

Векторы равны только в том случае, если они имеют одну и ту же размерность и равные соответствующие координаты. Отсюда следует, что координаты вектора нельзя менять местами: (0;5;-3)≠(-3;0;5).

Нулевым вектором называется вектор, все координаты которого равны нулю: 0=(0;0;…;0).

Над векторами по определенным правилам можно выполнять линейные операции: складывать их, умножать на число, вычитать. Поэтому векторная алгебра широко используется в приложениях, в частности в экономических исследованиях; она позволяет обозначать одним символом множества чисел и выполнять над ними операции подобно тому, как они выполняются над отдельными числами. Введем линейные операции над векторами.

Произведением вектора $\vec{x} = (x_1; x_2; ...; x_n)$ на действительное число λ называется вектор

$$\lambda\vec{x} = (\lambda x_1; \lambda x_2; ...; \lambda x_n) \tag{44}$$

т.е. при умножении вектора на число каждая его координата умножаются на это число.

Зная вектор $\vec{x} = (x_1; x_2; ...; x_n)$, можно получить противоположный вектор $-\vec{x} = -1 \cdot \vec{x} = (-x_1; -x_2; ...; -x_n)$.

Суммой векторов $\vec{x} = (x_1; x_2; ...; x_n)$ и $\vec{y} = (y_1; y_2; ...; y_n)$ называется вектор

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1; x_2 + y_2; ...; x_n + y_n) \tag{45}$$

т.е. при сложении векторов одной и той же размерности их соответствующие координаты почленно складываются.

Очевидно, что

$$\vec{x} + (-\vec{x}) = (x_1; x_2; ...; x_n) + (-x_1; -x_2; ...; -x_n) = (0; 0; ...; 0)$$

т.е. *сумма противоположных векторов дает нулевой вектор*.

Используя понятие противоположного вектора, можно определить операцию вычитания векторов:

$$\vec{x} - \vec{y} = \vec{x} + (-\vec{y}) = (x_1; x_2; ...; x_n) + (-y_1; -y_2; ...; -y_n) = (x_1 - y_1; x_2 - y_2; x_n - y_n)$$

т.е. при вычитании двух векторов одной и той же размерности их соответствующие координаты почленно вычитаются.

Нетрудно проверить, что линейные операции над векторами удовлетворяют свойствами: 1^0 - 6^0 в §2.

Скалярным произведением двух векторов $\vec{x} = (x_1; x_2; ...; x_n)$ и $\vec{y} = (y_1; y_2; ...; y_n)$ называется число

$$\vec{x}\vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n \tag{46}$$

равное сумме произведений соответствующих координат векторов.

Нетрудно проверить, что скалярное произведение векторов обладает свойствами: 1 в §6.

Некоторые множество U образует линейное пространство, если для любых двух его элементов $x \in U$ и $y \in U$ определена операция сложения $x + y = U$ и для каждого элемента $x \in U$ и любого действительного числа $\lambda \in R$ определено произведение $\lambda x \in U$, причем эти операции удовлетворяют свойствам 1^0 - 6^0 в §2.

Таким образом, множество n-мерных векторов с действительными координатами образует линейное векторное пространство.

Так как единственными операциями, которые введены в векторном пространстве, являются операции сложения векторов и умножения вектора на число, то из алгебраической структуры векторного пространства следует, что для всех векторов одного и того же пространства число координат n должно оставаться постоянным. Векторы с различным числом координат являются элементами различных векторных пространств. Поэтому n-мерное векторное пространство можно рассматривать как пространство всевозможных строк (столбцов) из n действительных чисел и обозначать R^n. В частности, пространство трехмерных векторов обозначается R^3, двумерных - R^2.

Линейное пространство называют *евклидовым*, если в нем определено скалярное произведение, удовлетворяющее свойствам 1^0 - 5^0 в §6. Так как для n-мерных векторов скалярное произведение определено, то все множество n-мерных векторов образует евклидово векторное пространство.

Литература

1 Шнейдер В.Е., Слуцкий А.И., Шумов А.С. Краткий курс высшей математики. Т.1. М.: Высшая школа, 1978.

2 Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М.: Наука, 1988.

3 Высшая математика для экономистов/ Под. ред. Н.Ш. Кремера. М., 2001.