

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ЗАДАЧ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА

ДЖАМАНБАЕВ М.Дж.

Кыргызский государственный технический университет им.И.Раззакова

izvestiya@ktu.aknet.kg

В данной работе предлагается экономичный алгоритм решения процессов переноса с одновременным определением параметров математической модели, основанный на сочетании аналитического метода с приближенными методами.

Приближенное решение $u(x)$ - обычно ищется в виде

$$u_n(x) = \sum_k^n a_k^{(n)} \Psi_k(x) \quad , \quad (1) \quad .$$

Ψ_k – базисные функции, $a_k^{(n)}$ коэффициенты разложения находятся путем минимизации функционала

$$\left\| L u_n(x) - f(x) \right\|_{R_2(D)} + \gamma_n \left\| L u_n(y) - \Psi(y) \right\|_{R_3(\Gamma)} \quad , \quad (2)$$

где γ_n – весовой коэффициент, учитывающий размерность функционала.

В случае выбора базисных функций $\{\Psi_k\}$ так, чтобы они удовлетворяли основному уравнению модели, то функционал (2) сильно упрощается и принимает вид

$$\left\| L u_n(y) - \Psi(y) \right\|_{R_3(\Gamma)} \quad . \quad (3)$$

Как видно, размерность исходной задачи уменьшается на один порядок, и потребуются значительно меньше объема памяти и машинного времени. Кроме того, облегчается техническая часть работы, связанная с подготовкой исходных данных и программированием. Основная трудность в таком подходе заключается в нахождении линейно-независимых систем $\{\Psi_k\}$, удовлетворяющих уравнению модели. Использование аппарата группового анализа [1] значительно облегчает задачу построения системы $\{\Psi_k\}$. Основным достоинством группового анализа является то, что недоопределенность или переопределенность основного уравнения не имеет значения, так как все переменные уравнения модели считаются равноценными, относительно которых строится линейный инфинитизимальный оператор. Условие инвариантности основного уравнения модели относительно инфинитизимального оператора порождает замкнутую систему дифференциальных уравнений, решение которых дает возможность находить функциональную структуру параметров модели и им соответствующие инвариантные группы преобразований.

Результаты вычислительного эксперимента

Достоверность предложенного алгоритма проиллюстрирована на задаче фильтрации подземных вод, имеющей точное решение. В качестве области фильтрации D принята область, ограниченная кривыми:

$$x^2 + 2y^2 = 4, \quad (x, y) \in \Gamma_3; \frac{x}{y^2} = 1, \quad (x, y) \in \Gamma_2; \frac{x}{y^2} = 4, \quad (x, y) \in \Gamma_4; x^2 + y^2 = 1, \quad (x, y) \in \Gamma_1 \quad .$$

Фильтрационный процесс в этой области описывается уравнением

$$D_x(k D_x H) + D_y(k D_y H) = 0$$

и удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$H(x, y) = 1, \quad (x, y) \in \Gamma_1; H(x, y) = 4, \quad (x, y) \in \Gamma_3; k D_n H = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_2, \Gamma_4.$$

Точное решение этой краевой задачи и аналитический вид коэффициента фильтрации имеет вид

$$H(x, y) = x^2 + 2y^2 \quad , \quad k(x, y) = \frac{x}{y^2} \quad .$$

Для решения данной задачи рассмотрено одно из выражений коэффициентов фильтрации и соот-

ветствующие им базисные функции [2], а именно:

$$H_q(x, y) = (Ax + B)^{2q} F\left(-q; \frac{1-2q-r}{2}; \frac{1-s}{2}; -t\right), k(x, y) = \frac{(ay + b)^r}{(ax + b)^s},$$

где F – гипергеометрический ряд, $t = \frac{(Ay + B)^2}{(Ax + B)^2}$. В табл. 1 приведены результаты численного экс-

перимента для случая, когда число базисных функций $N=5$, а число узлов интегрирования на границах области равно $m=10$. Здесь и далее в таблицах вводятся следу-

ющие обозначения: H_T, H_{np} – точные и вычисленные значения функции напора; Γ_i – части границы области $D(i=1, \dots, 4)$; k_T, k_{np} – точное и вычисленное значение коэффициента фильтрации; $|k_T - k_{np}|$ – абсолютная погрешность. Как видно из табл. 1, абсолютная погрешность между точными и вычисленными значениями напорной функции и коэффициентами фильтрации не превышает 1%.

Таблица 1
Сравнение значений коэффициентов фильтрации и функции напора

$n_i=5$	$ k_T - k_{np} $	$n_i=9$	$ k_T - k_{np} $	Γ	Γ	$ H_T - H_{np} $
1	0,0059	1	0,0054933	$x^2 + 2y^2 = 1$,	$H(x, y) = 1$	0.0179
2	0,00996	2	$0,30126 \cdot 10^{-2}$	$x^2 + 2y^2 = 4$	$H(x, y) = 4$	0.0416
3	0,001416	3	$0,677168 \cdot 10^{-3}$			
4	0,0255	4	$0,814014 \cdot 10^{-3}$			

Алгоритм решения задачи процесса переноса

Сущность метода решения заключается в том, что неоднородная среда разбивается на многочисленные подобласти или на фрагменты, в которых физико-механические характеристики процесса переноса почти постоянны. Тогда в каждом фрагменте процесс переноса будет моделироваться дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами. В результате вместо одного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами приходим к системе дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, количество которых совпадает с количеством фрагментов. Приближенное решение исходной задачи строится через базисные функции, являющиеся частными решени-

ями уравнения процесса переноса с постоянными коэффициентами. Переход от одной подобласти к другой и удовлетворение граничных условий осуществляется согласно идее метода конечных элементов. Изложим идею алгоритма на примере модели нестационарной фильтрации подземных вод

$$\mu D_t H = D_x(T \cdot D_x H) + D_y(T \cdot D_y H) + \gamma(H - H^0) + f(x, y, t) \quad (4)$$

с начально-краевыми условиями

$$H(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad T \cdot D_n H = \alpha(x, y, t) + \beta(x, y) \cdot h(x, y, t), \quad (5)$$

здесь $H(x, y, t)$ – искомая функция напора, $T(x, y)$ – коэффициент водопроводимости пласта, μ – коэффициент гравитационной (упругой) емкости пласта, $f(x, y, t)$ – функция, характеризующая водоотбор, испарение или инфильтрацию. В каждом фрагменте фильтрационный процесс моделируется уравнением

$$\mu_k \frac{\partial h}{\partial t} = T_k \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + T_k \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (6)$$

В этой подобласти приближенное решение исходной задачи (4) – (5) строится через базисные

функции

$$H_i(x, y, t) = \exp(-2i^2t) \cdot \cos(i(\tilde{x} + \tilde{y})/a); a = \sqrt{\frac{4\pi^2 T}{\mu L^2}}, \quad \tilde{x} = \frac{2\pi x}{L}, \quad \tilde{y} = \frac{2\pi y}{L}, \quad i=1,2,3,\dots$$

являющиеся частными решениями уравнения нестационарной фильтрации (6). Здесь L – характерная длина области. Для лучшей аппроксимации области фильтрации и удобства в программировании область разбивается на фрагменты в треугольной форме различной величины. В каждой подобласти приближенное решение ищется в виде

$$H^{(e)}(x, y, t) = \sum_i^3 N_i^{(e)}(x, y, T, t, \mu) H_i^{(e)}$$

здесь $H_i^{(e)}$ – узловые значения искомой напорной функции в подобласти (e),

$$N_i^{(e)} = \frac{1}{\Delta} [a_i^{(e)} + b_i^{(e)} H_1(x, y, T, t, \mu) + c_i^{(e)} H_2(x, y, T, t, \mu)]$$

аналоги функции формы, $\Delta^{(e)}, a^{(e)}, b^{(e)}, c^{(e)}$ – постоянные параметры, определяемые в каждой подобласти (e). Явная зависимость решения фильтрационной задачи от искомых параметров T или μ дает возможность определять их как решение трансцендентного уравнения, если известно начальное условие задачи относительно напорной функции, т.е. эти параметры определяются через косвенные информации, которые более точно определяются и более доступны. Тогда в каждой подобласти решается трансцендентное уравнение

$$N_i^{(e)}(x, y, T, t, \mu) H_i^{(e)} + N_j^{(e)} H_j^{(e)} + N_k^{(e)} H_k^{(e)} = H_i^{(e)}$$

и определяются соответствующие им значения искомых параметров. При определении параметров не используется итерационная процедура, что повышает точность и экономит машинное время. Достоверность предложенного алгоритма и правильность программы проверялись на тестовом примере, имеющем точное решение. Нестационарный фильтрационный процесс в области (D) описывается уравнением

$$\mu D_t H = D_x (T D_x H) + D_y (T D_y H)$$

совместно с начальными

$$H(x, y, 0) = \exp(x^2 + y^2),$$

и краевыми условиями вида

$$H(x, h, t) = \exp(x^2 + h^2 - t), (x, y) \in \Gamma_2; H(0, y, t) = \exp(y^2 - t), (x, y) \in \Gamma_1;$$

$$T D_n H = \alpha(x, y, t) + \beta(x, y) H, \quad (x, y) \in \Gamma_3.$$

Здесь $T(x, y) = ax + by + c, \quad \alpha(x, y, t) = \frac{-x^2 T(x, y)}{\sqrt{1 + (0,5x)^2}} \exp(x^2 + y^2 - t),$

$\beta(x, y) = \frac{2yT(x, y)}{\sqrt{1 + (0,5x)^2}}.$ Уравнениями границ являются

$$\Gamma_1 : x = 0; \quad y \in [0, h]; \Gamma_2 : y = h; \quad x \in [0, L]; \Gamma_3 : y = \frac{x^2}{4}; x \in [0, l].$$

Данная начально-краевая задача фильтрации в неоднородной среде с коэффициентом водопроницаемости, гравитационной (упругой) емкости пласта, а также правой частью уравнения модели вида

$$T(x, y) = 0,5x + y + 2, \quad f(x, y, t) = -2(0,5x + y) \exp(x^2 + y^2 - t),$$

$$T(x, y) = 0,5x + y + 2, \quad \mu(x, y) = -4T(x, y)(1 + x^2 + y^2),$$

имеет точное решение вида $H(x, y, t) = \exp(x^2 + y^2 - t).$

Область фильтрации для тестовой задачи была разбита на 19 фрагментов. В табл. 2 приведены значения функции, соответствующие границе Γ_3 , на которой выполняется краевое условие третьего рода, выраженное дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка.

Как видно из таблицы, полученные результаты удовлетворительно согласуются с точными данными.

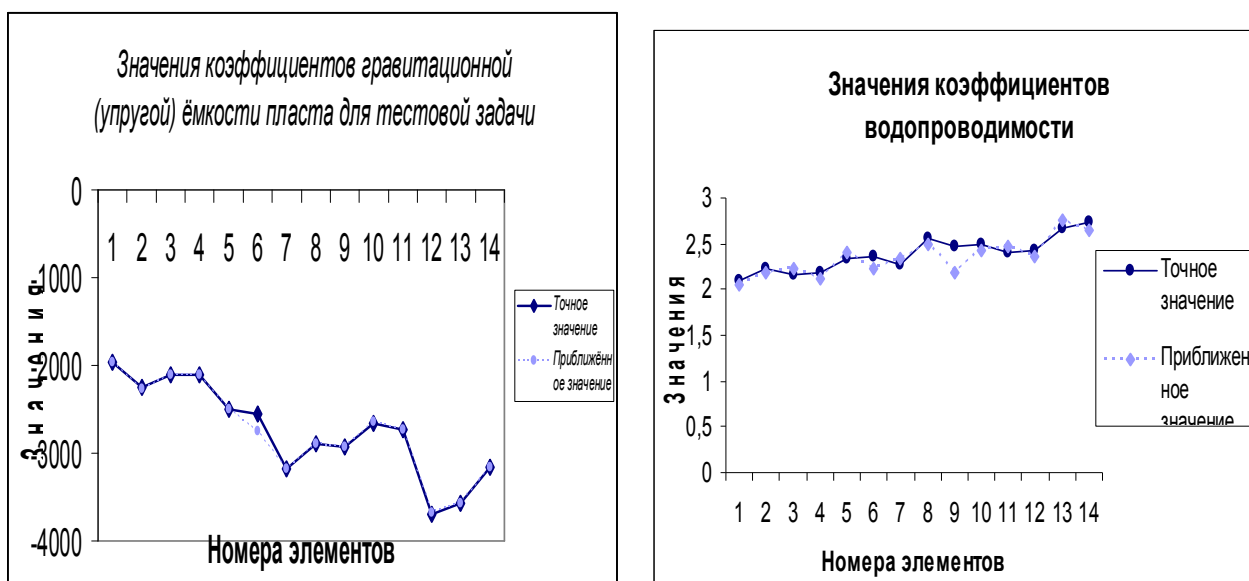


Рис.1. Значения коэффициентов гравитационной ёмкости и водопроницаемостей.

Таблица 2
Результаты, полученные с учетом схемы Кранка-Николсона

Шаг по $\Delta\tau$	Значен. $H(x, y, t)$	Номера узлов						
		1	2	4	5	7	8	10
1	точн.	0,8192	0,8511	0,8949	0,8649	0,9725	0,9102	1,097
	прибл.	0,8192	0,9664	1,0128	1,0341	1,2387	1,1636	1,323
2	точн.	0,6729	0,6970	0,7372	0,7081	0,7962	0,7451	0,898
	прибл.	0,6729	0,8285	0,8606	0,8626	0,9685	0,9130	1,107
3	точн.	0,5509	0,5706	0,5999	0,5798	0,6519	0,6101	0,733
	прибл.	0,5509	0,5507	0,5836	0,5785	0,6503	0,6115	0,730

Определение коэффициента теплопроводности и глубины таяния месторасположения хвостохранилища, расположенного в условиях вечной мерзлоты

Для определения коэффициента теплопроводности грунта рассмотрена математическая модель одномерного процесса переноса тепла.

$$kD_t T = D_x (\tilde{n} \delta D_x T), \quad (7)$$

$$T(x, 0) = g(x), \quad x \in [0, L].$$

$$T(0, t) = f(t), \quad t \in [0, t^*]$$

$$T(L, t) = T^0. \quad (8)$$

Глубина L в зависимости от характера изменения температуры разбивается на конечные элементы и в каждом элементе предполагается постоянство коэффициента теплопроводности данного грунта. Тогда в каждом элементе вместо уравнения теплопроводности (7) с переменными коэффициентами рассматривается система уравнений теплопроводности с постоянными коэффициентами

$$D_i T = a^2_i D_{xx} T, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (9)$$

где $a^2_i = \frac{k_i}{c_i p_i} = \text{const}$ – коэффициент температуропроводности, k_i – коэффициент теплопроводности, $c_i p_i$ – теплоёмкость и плотность грунта, n – количество элементов. Дальнейшая идея идентификации коэффициента математической модели производится аналогично, по предложенной методике

$$T(x, t, a) = \alpha_0 + \alpha_1 H_1(x, t, a) + \alpha_2 H_2(x, t, a),$$

где T – температура грунта, H_i – частные решения одномерного уравнения теплопроводности (9), являющиеся базисными функциями вида

$H_1(x, y, t, a) = \exp(-x/a) \cdot \cos(x/a - 2t)$; $H_2(x, y, t, a) = \exp(-x/a) \cdot \sin(x/a - 2t)$, α_i – коэффициенты разложения, определяемые через узловые значения температуры.

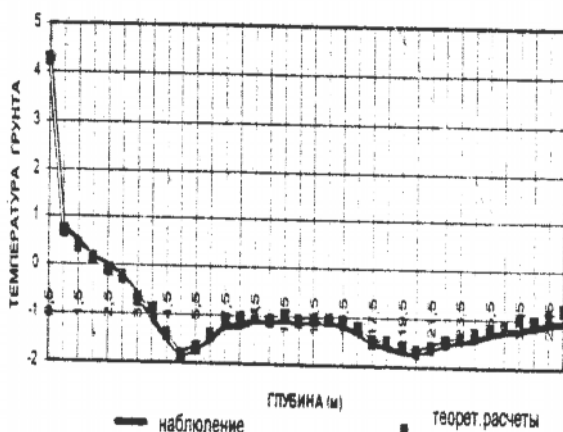
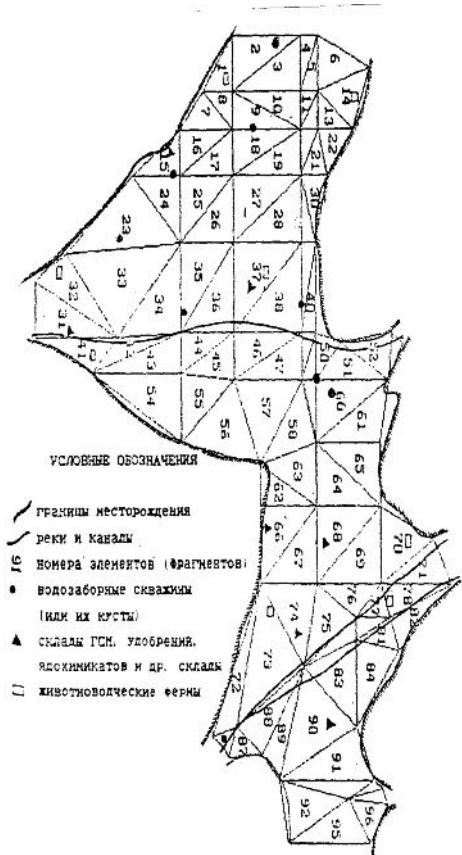


Рис. 2. Температура грунта и глубина таяния вечной мерзлоты.

НИТРАТНОЕ ЗАГРЯЗНЕНИЕ ОРТО-АЛЫШСКОГО МЕСТОРОЖДЕНИЯ ПОДЗЕМНЫХ ВОД

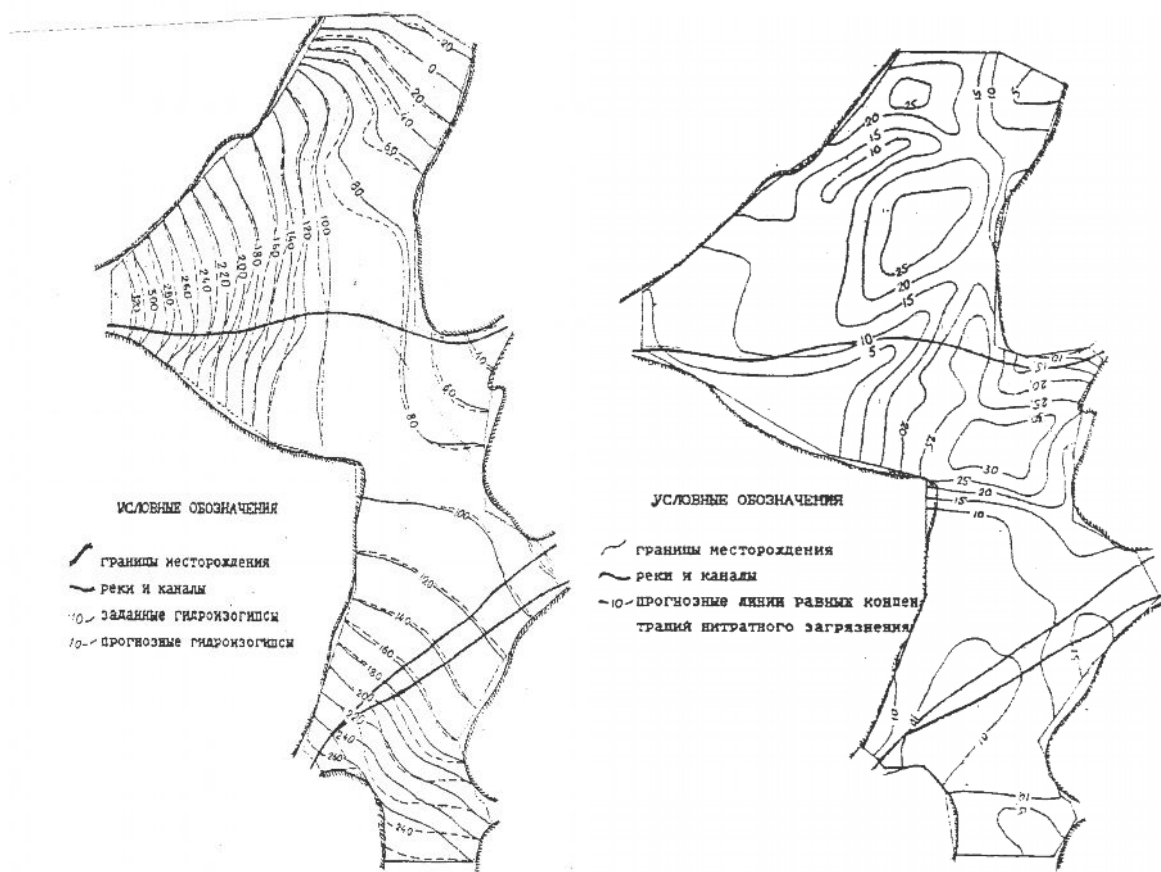
Месторождение подземных вод, которое снабжает г. Бишкек питьевой водой, длиной 20 км и шириной 8 км, подразделено на 96 фрагментов. Учтены все фактические и потенциальные источники нитратного загрязнения. Сначала, согласно алгоритму, определяются коэффициенты водопроводимости пласта и решается фильтрационная задача. Затем, используя начальные условия концентраций нитрата в подземных водах, определяются обобщенные коэффициенты диффузии и решается прогнозная задача нитратного загрязнения подземной воды. Результаты сравнены с данными наблюдений, которые дают хорошие согласования. Они показаны на следующих рисунках.



Значения обобщенного коэффициента диффузии

n_i	D	n_i	D	n_i	D	n_i	D
1	0,0001	2	0,001	3	0,040	4	0,84
5	0,144	6	0,194	7	0,250	8	0,013
9	0,020	10	0,049	11	0,088	12	0,147
13	0,197	14	0,254	15	0,053	16	0,057
17	0,080	18	0,118	19	0,170	20	0,213
21	0,267	22	0,109	23	0,103	24	0,122
25	0,146	26	0,196	27	0,238	28	0,287
29	0,185	30	0,175	31	0,181	32	0,198
33	0,231	34	0,270	35	0,318	36	0,266
37	0,246	38	0,247	39	0,249	40	0,272
41	0,311	42	0,354	43	0,360	44	0,336
45	0,352	46	0,322	47	0,328	48	0,358

На рисунке представлены карты гидроизогипсов, построенные гидрогеологами и данными расчета, а также прогнозная карта нитратного загрязнения Орто-Альшского месторождения подземных вод.



На рисунке показаны изменения концентраций нитратов в зависимости от динамики подземных вод и от интенсивности работы водозаборных скважин. Результаты расчета позволили построить образование зоны, превышающие предельно допустимые концентрации и ее движение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л.В. Овсянников. Групповой анализ дифференциальных уравнений в частных производных. —М.: Наука, 1968. — 260 с.
2. Ч. Джаныбеков, М.Дж. Джаманбаев. Применение группового анализа для приближенного решения прямых и обратных задач безнапорной стационарной фильтрации// Динамика многофазных сред.- Новосибирск, 1983.- С. 132 – 136.
3. М.Дж. Джаманбаев. Методы решения и идентификации параметров математической модели процессов переноса. Бишкек: Илим, 1996. — 121с.