КЫРГЫЗСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. И. РАЗЗАКОВА

ДЖАМАНБАЕВ М. Дж.

Лабораторные работы по

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ

БИШКЕК - 2011

Вычислительная математика

Особенности математических вычислений, реализуемых на ЭВМ: теоретические основы численных методов: погрешности вычислений; устойчивость и сложность алгоритма (по памяти, по времени); численные методы линейной алгебры; решение нелинейных уравнений и систем; интерполяция функций; численное интегрирование и дифференцирование; решение обыкновенных дифференциальных уравнений; методы приближения и аппроксимации функций; преобразование Фурье; равномерное приближение функций; математические программные системы.

Цели и задачи изучения дисциплины.

Дисциплина «Вычислительная математика» ставит своей целью ознакомление студентов с важнейшими разделами вычислительной математики, такими как численные методы линейной алгебры; решение нелинейных уравнений и систем; интерполяция функций; численное интегрирование и дифференцирование; решение обыкновенных дифференциальных уравнений; и ее применением в компьютерных науках.

Программа имеет теоретический, алгоритмический, прикладной и вычислительный аспекты.

Ее преподавание предусматривает:

- построение алгоритмов для решения задач вычислительной математики;
- выработку умения самостоятельно расширять математические знания и приобрести устойчивые навыки решения прикладных задач;
- использование математических методов в решении прикладных задач из своей будущей профессиональной деятельности, производить анализ, расчет и исследование;
- использование набора инструментов для реализации графических, аналитических и численных методов решения задач на компьютере.

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

Вычислительная математика

Темы лекций и содержание практических занятий Вычислительная математика		**Лк**	**Лб**	**Всего**
1 модуль				
Теоретические основы численных методов. Погрешности вычислений, устойчивость и сложность алгоритма. Законы арифметики приближенных вычислений.		2	2	4
Прямая и обратная задачи теории погрешности. Табулирование функций, заданных аналитически.		2	2	4
Решение нелинейных уравнений. Отделение корней. Метод деления отрезка пополам.		2	2	4
Метод простой итерации. Преобразование уравнения к итерационному виду. Метод касательных Ньютона. Метод хорд.		2	2	4
Численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Метод Гаусса с выбором главного элемента. Обусловленность матриц.		2	2	4
Итерационные методы СЛАУ. Вычисление определителей.		2	2	4
Алгоритмы численного интегрирования. Формулы трапеций и Симпсона.		2	2	4
Построение первообразной с помощью численного интегрирования.		3	3	6
Итого часов по 1 модулю		**17**	**17**	**34**
Баллы за 1 модуль	**всего** **max** **min**	**25** **25** **15**	**25** **25** **15**	**50** **50** **30**
2 модуль				
Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод Эйлера. Метод Рунге-Кутты.		2	2	4
Интерполирование. Системы функций Чебышева. Алгебраическое интерполирование.		2	2	4
Интерполирование сплайнами. Интерполирование функции кубическими сплайнами.		2	2	4
Математическая обработка результатов измерений по методу наименьших квадратов. Построение полиномов Чебышева.		2	2	4
Линейная и параболическая регрессия. Нелинейная регрессия, преобразуемая в линейную.		2	2	4
Решение систем нелинейных уравнений. Метод простой итерации. Метод Ньютона.		2	2	4
Метод Монте-Карло. Вычисление интегралов методом Монте-Карло.		2	2	4
Вычисление собственных значений и собственных векторов матриц.		3	3	6
Итого часов по 2 модулю		**17**	**17**	**34**
Баллы за 2 модуль	**Всего** **max** **min**	**25** **25** **15**	**25** **25** **15**	**50** **50** **30**
Итого часов за семестр **Баллы за семестр**	**Всего** **Всего** **max** **min**	**34** **50** **50** **30**	**34** **50** **50** **30**	**68** **100** **100** **60**

Вычислительная математика

Перечень разделов и тем для индивидуальной работы
под руководством преподавателя.

МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ РАСЧЕТОВ

Темы лабораторных работ

- Табулирование функций, заданных аналитически.
- Вычисление изолированного корня функции методом половинного деления.
- Вычисление определенного интеграла по формуле трапеций.
- Построение первообразной с помощью численного интегрирования по формуле трапеций.
- Численное интегрирование обыкновенного дифференциального уравнения методом Эйлера.
- Численное интегрирование обыкновенного дифференциального уравнения методом Рунге-Кутты.
- Численное интегрирование обыкновенного дифференциального уравнения методом Рунге-Кутты с уточнением и оценкой погрешности.
- Решение системы m линейных алгебраических уравнений с m неизвестными методом Гаусса.
- Обращение матрицы методом Гаусса.
- Построение характеристического полинома матрицы.
- Вычисление спектрального радиуса матрицы.
- Вычисление максимального по модулю собственного числа матрицы.
- Степенной метод отыскания собственного вектора.
- Обработка результатов измерений по методу наименьших квадратов. Построение полиномов Чебышева. Линейная и параболическая регрессии.
- Обработка результатов измерений по методу наименьших квадратов. Нелинейная регрессия, преобразуемая в линейную.
- Интерполирование функций кубическими сплайнами.
- Метод Монте-Карло.

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

Вычислительная математика

Образцы вариантов контрольных вопросов и заданий.

1. Написать программы вычисления и печати таблицы значений функции: $y = \dfrac{x}{(1+x)^2}$; $x_1 = 4$; $x_{i+1} = x_i + 0.5$, где $i = 1,2,\ldots,10$.
2. Используя схему Горнера, написать программу вычисления значения полинома: $P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 5x + 7$ при $x = 3$.
3. Даны значения $n : x_1, x_2, \ldots, x_n$. Написать программу вычисления и печати значений $\bar{x}$ и S, где $\bar{x} = \dfrac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$; $S = (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2$, предполагая, что $n \le 10$.
4. Написать программу вычисления $\sqrt[p]{a}$ с помощью рекуррентного соотношения Ньютона: $x_0 = a$, $x_{n+1} = \dfrac{1}{p}\left[(p-1)x_n + \dfrac{a}{x_n^{p-1}}\right]$. Точность вычисления: $|x_{n+1} - x_n| < 10^{-6}$. Исходные данные : а) $p = 2$; $a = 3$; б) $p = 3$; $a = 8$.
5. Написать программу решения уравнения методом касательных. Использовать итерационное уравнение $x_{k+1} = x_k - \dfrac{F(x_k)}{F'(x_k)}$. Закончить процесс построения $x_1, x_2, \ldots$, когда для заданного $\varepsilon > 0$ будет выполнено $|f(x_i)| < \varepsilon$ или когда $|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon$.
6. Пусть при экспериментальном исследовании зависимости величины y от величины x установлено, что для x=1, 2, 3, 4, 5 значения y соответственно равны 4, 5, 7, 9, 12, 13. Найти линейный закон $y=kx+b$, с помощью алгоритма наименьших квадратов.
7. Методом Рунге-Кутта найти решение уравнения $y' = \dfrac{2}{x}y + x$ с начальным условием $y(1)=0$ на отрезке [1; 1,5], приняв шаг h=0,1.
8. Найти с точностью 0,00001 наименьший корень уравнения: $x^3 - 6x^2 + 19{,}8 = 0$.
9. Решить $y' = 2xy$; ($x_0 = 0$, $y_0 = 1$, [0; 1], h=0,025).
10. Вычислить $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{1+x}$ с точностью до $\dfrac{1}{2}\cdot 10^{-4}$.
11. Дано натуральное число n=4. Получить действительную матрицу (a_{ij}) i,j=1,…,4 для которой $a_{ij} = \dfrac{1}{i+j}$.

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

Вычислительная математика

Самостоятельная работа

1) Приближенные числа. Теория погрешностей;
2) Вычисление значений функций. Численные методы решения систем алгебраических уравнений. Решение уравнений с одной переменной.
3) Приближенное решение алгебраических и трансцендентных уравнений: метод секущих и метод парабол.
4) Алгебра матриц. Вычисление определителей. Обращение матрицы методом Гаусса.
5) Методы решения систем линейных алгебраических уравнений.
6) Нахождение собственных значений и собственных векторов матрицы. Метод Данилевского.
7) Методы решения систем нелинейных уравнений: метод наискорейшего спуска.
8) Интерполирование функций. Конечные разности и разностные отношения. Интерполяционный многочлен Ньютона. Интерполирование по равноотстоящим значениям аргумента.
9) Приближенное дифференцирование функций.
10) Приближенное интегрирование функций. Построение первообразной с помощью численного интегрирования по формуле трапеций. Квадратурные формулы типа Гаусса.
11) Метод Монте-Карло.
12) Методы обработки экспериментальных данных.
13) Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.
14) Численные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных.
15) Методы приближения и аппроксимации функций.
16) Быстрое преобразование Фурье. Равномерное приближение функций.
17) Математические программные системы: средства пакетов MATLAB и Mathcad.

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

Вычислительная математика

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Поршнев С. В. Вычислительная математика. Курс лекций. 2004 г.
2. Демидович Б. П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. 1970 г.
3. Воробьева Г. Н., Данилова А. Н. Практикум по вычислительной математике. 1990 г.
4. Блюмин А.Г., Гусев Е.В., Федотов А.А. Численные методы. Методические указания к лабораторным работам. М.: И-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2002 г.

Дополнительная

5. Самарский А.А.. Введение в численные методы. 2005 г.
6. Волков Е.А. Численные методы. 2004 г.
7. Плис А.И., Сливина Н.А. Лабораторный практикум по высшей математике. 1994 г.
8. Васин А.П., Павлоцкая Л.М., Плис А.И., Сливина Н.А. Компьютерные занятия по высшей математике. 1997 г.
9. Дьяконов В.П. Компьютерная математика. 2001 г.
10. Ильин В.А., Позднняк Э.Г. Основы математического анализа. М.: Наука, 1971.
11. Голосов А.О., Федотов А.А, Храпов П.В. Численные методы вычисления интегралов и решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Из-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1992.

Справочная

10. И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов.1986г.
11. Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике для научных работников и инженеров.1984г.
12. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера 1975 г.

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Излагаемые ниже краткие сведения необходимы для правильного понимания получаемых результатов, их интерпретации и корректного оформления.

Определение 1. Разница между величиной С и некоторым ее приближенным значением x называется *истинной погрешностью* приближенного значения x:

$$ИП(x) = C - x. \qquad (1)$$

Как правило, *истинная погрешность* непосредственно по формуле (1) *найдена быть не может,* поскольку не бывает известно точное значение С. Исключение составляют так называемые тестовые, или отладочные, задачи, решаемые при отладке алгоритма, когда искусственно составляют задачу с заранее известным истинным результатом (например, в работе № 2 сплайн строят для заранее известной заданной аналитически функции, точные, вернее более точные, значения которой сравнивают со значениями сплайна).

На практике приходится довольствоваться той или иной оценкой истинной погрешности.

Определение 2. *Предельной абсолютной* (абсолютной) погрешностью называется всякая оценка сверху модуля истинной погрешности:

$$\Delta x \geq |C - x| \qquad (2)$$

Таким образом, *для одного и того же значения x могут быть получены различенные предельные абсолютные погрешности* (например, формула Рунге в работах №4,5 дает именно предельную абсолютную погрешность. Соответствующие теоремы в курсах численных методов посвящены обоснованию неравенства (2) для этого случая).

Неравенство (2) дает отрезок

$$x - \Delta x \leq C \leq x + \Delta x.$$

Отсюда – общепринятая форма записи приближенных чисел, например,

y=16.3967 ± 0.0006

Таким образом, *приближенное число- это не точка* на числовой оси, *а отрезок*.

При этом точными могут быть лишь и рациональные числа. *Всякое иррациональное число* в памяти компьютера (тип REAL) *уже становится приближенным*.

О точности приближенного числа следует судить не по абсолютной его погрешности, а по относительной.

Определение 3. Относительной погрешностью приближенного числа называется отношение его абсолютной погрешности к абсолютной величине самого числа:

$$\delta_x = \frac{\Delta x}{|x|} \qquad (3)$$

Все методы оценки погрешности дают возможность так или иначе найти абсолютную погрешность Δx. Однако она используется лишь для того, чтобы найти δx по формуле (3) (например, если при вычислении двух разных интегралов I_1 и I_2 формула Рунге дала в одном случае $\Delta I_1=0.01$, а в другом – $\Delta I_2=0.1$, не следует думать, что первое значение интеграла найдено точнее- это определяется величинами $\delta_1 = \Delta I_1/|I_1|$ и $\delta_2 = \Delta I_2/|I_2|$).

Определение 4. Значащими цифрами числа называются все цифры в его записи с фиксированной точкой (или в мантиссе его записи с плавающей точкой) начиная с первой отличной от нуля.

Например, в числе 0.00<u>50070</u> – пять значащих цифр (они подчеркнуты).

Определение 5. Значащая цифра называется **верной,** если половина единицы ее порядка не меньше абсолютной погрешности числа:

$$\frac{1}{2}p \geq \Delta.$$

Количество верных значащих цифр называется **степенью точности** числа.

Пример 1. Найти степень точности числа $y = \underline{16.3967} \pm 0.0006$ - и округлить его до верных цифр.

Решение: $\Delta y = 0.0006 \leq 0.005 = \frac{1}{2} \cdot 0.01$ - это наименьшая половина порядка, превосходящая абсолютную погрешность числа.

Следовательно, **последняя верная цифра** числа y стоит в разряде сотых. Однако это самое по себе еще не характеризует степени точности числа: она зависит от того, сколько значащих цифр находится впереди последней верной. Для числа y верных значащих цифр четыре (они подчеркнуты). Следовательно, его степень точности $m = 4$. Округляя до верных цифр, получим:

$$y = 16.40 \qquad (4)$$

(обратите внимание на то, что на степень точности не повлияет изменение положения десятичной точки, т.е. масштаба измерений).

Не следует путать количество верных знаков после точки (запятой*) и количество верных значащих цифр*. Количество верных знаков после точки связано с порядком чисел (масштабом измерений) и характеризует лишь его относительную погрешность. *Количество верных значащих цифр (степень точности) числа не связано с положением десятичной точки* и характеризует его относительную погрешность.

При записи приближенных чисел *необходимо руководствоваться следующими общепринятыми правилами:*

1) если погрешность числа явно не указывают – число округляют до верных цифр;

2) и обратно: степень точности числа, погрешность которого не

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

указана, принимают равной количеству его значащих цифр, а его предельную абсолютную погрешность оценивают как половину порядка последней цифры.

Например, в соответствии с записью (4) для числа y будет найдена оценка погрешности

$$\Delta_y = \frac{1}{2} \cdot 0.01 = 0.005.$$

Пример 2. Какое число точнее: $x_1 = 0.022$ или $x_2 = 355.2$?

Решение. Степени точности первого числа $m_1 = 2$, второго - $m_2 = 4$. Число x на два порядка точнее.

Пример 3. Какое число точнее: $x_1 = 0.020$ или $x_2 = 5.0$?

Решение. Степени точности чисел одинаковы $m_1 = m_2 = 2$. При этом абсолютная погрешность первого числа $\Delta_{ч_1} = \frac{1}{2} \cdot 0.01 = 0.005$, второго числа $\Delta_{ч_2} = \frac{1}{2} \cdot 0.01 = 0.005$. Найдем относительные погрешности:

$$\delta_{x_1} = \frac{\Delta x_1}{|x_1|} = \frac{0.0005}{0.020} = 0.025 = 2.5\%;$$

$$\delta_{x_2} = \frac{\Delta x_2}{|x_2|} = \frac{0.05}{5.0} = 0.01 = 1\%.$$

Число x_2 точнее, чем x_1.

В том случае, когда решение задачи представляет собой не число, а набор чисел, функцию или элементы других нормированных пространств, относительной погрешностью служит соответствующая *норма разности*. Так, в работе №3 роль абсолютной погрешности решение задачи метода наименьших квадратов играет евклидова норма разности – среднеквадратичное уклонение; относительная погрешность есть отношение этой нормы к норме приближаемого набора значений функции.

Погрешность результата решения любой задачи складывается из трех составляющих:

1) *неустранимая погрешность* – погрешность исходных данных;
2) *вычислительная (арифметическая) погрешность* – возникает из-за промежуточных округлений, неизбежных в процессе вычисления (для данных типа REAL);
3) *методическая погрешность* – обусловлена использованием приближенных формул и методов.

Например, все прямые методы решения СЛАУ являются точными ($\Delta_{метод}$=0); однако не следует надеяться на то, что точным будет и результат: даже если исходные данные (элементы матрицы) были точными- результат будет содержать вычислительную погрешность, тем большую, чем больше арифметических операций содержит алгоритм. Более того , в случае, когда и исходные данные содержат погрешность, решения некоторых систем по методу Гаусса могут иметь сколь угодно большую погрешность (потеря устойчивости решения).

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

При вычислении интеграла по какой-либо из квадратурных формул (например, по формуле Симпсона) результат заведомо обладает методической погрешностью, обусловленной остаточным членом формулы. При уменьшении шага разбиений $(h \to 0)$ остаточные члены всех квадратурных формул быстро убывают $(\Delta метод \to 0)$. Однако неверно думать, что при достаточно малом шаге h удастся получить сколь угодно точные Значения интеграла – это не так! Ведь при $(h \to 0)$ число отрезков разбиения n возрастает $(h \to \infty)$, вместе с ним (в огромной пропорции) возрастает число арифметических операций ($N_{оп} \to \infty$) – и арифметическая погрешность может оказаться сколь угодно велика $(\Delta_{арифм} \to 0)$.

При корректном решении задачи надо учитывать соотношение трех составляющих погрешности, что бывает не просто (в курсах вычислительной математики этому посвящены специальные теоремы).

Работа № 1
СРАВНЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ $f(x)=0$

Рассмотрим основные методы решения уравнений вида $f(x)=0$. Предположим, что известен отрезок $[a, b]$, на котором находится один, и причем однократный, корен функции $f(x)$**.** Необходимым признаком выделения такого отрезка является условие $f(a)f(b)<0$. Отрезок, удовлетворяющий указанным требованиям, будем называть великой, а процесс определения вилки – отделением корня. Таким образом, процесс отделения корней должен предшествовать применению того или иного численного метода решения уравнений $f(x)=0$ и имеет, как правило, аналитический характер.

1. *Метод деления отрезка пополам* является самым простым методом решения данной задачи. Суть метода в следующем: делим вилку $[a, b]$ пополам. Пусть точка $C=(a+b)/2$ -средина отрезка (рис. 1).

Если $f(a)f(c)<0$, то в качестве следующего отрезка выбираем $[a, c]$, в противном случае- отрезок $[c, b]$.

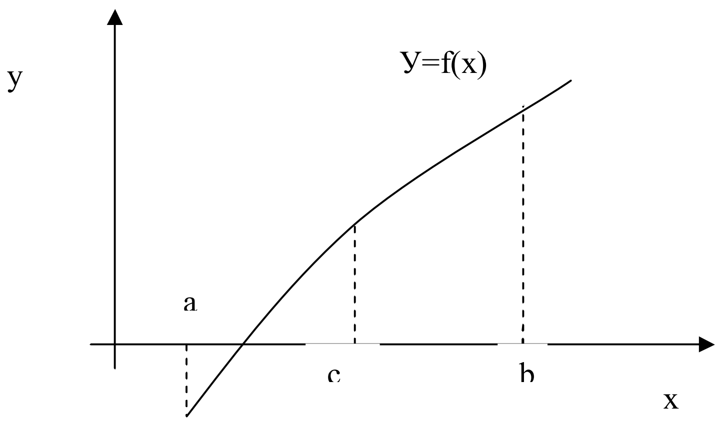


Рис. 1

Обозначим очередную вилку через $[at, bt]$. Вычисления следует продолжать до тех пор, пока не будет выполнено условие $(bt - at) < \varepsilon$, где ε - требуемая точность вычисления корня. Приближенное значение корня равно $(at + bt)/2$.

2. *Метод простых итераций* основан на построении итерационные последовательности $x_{n+1} = F(x_n)$, сходящейся к корню уравнения $x = F(x)$ при заданном значении начального приближения x_0. Можно доказать [5], что итерационная последовательность $\{x_n\}$ сходится к корню уравнения $x = F(x)$ при условии $|F'(x)| \le q < 1$ для любого начального приближения x_0. Исходное уравнение $f(x)=0$ сводится к уравнению $x = F(x)$ преобразованием $x = x - q(x)f(x)$, если $q(x) \neq 0$.

3. *Метод касательных* основан на следующем алгоритме: в точке (x_n, y_n) графика функции $y = f(x)$ проводят касательную. Точку ее пересечения с осью OX принимают за x_{n+1}, после этого процесс повторяется.

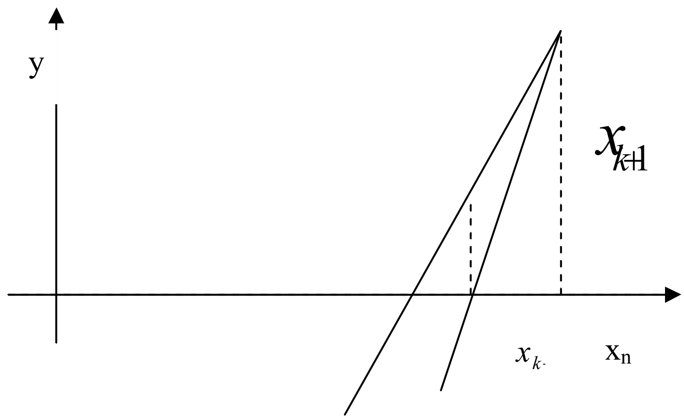


Рис. 2

На рис. 2 видно, что последовательность $\{x_n\}$ при определенных условиях стремится к корню функции $f(x)$.

Расчетные формулы метода касательных легко вывести. Уравнение касательной в точке (x_n, y_n) имеет вид

$$Y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n),$$

где Y - ордината касательной.

Точку x_{n+1} определяют из условия $Y = 0$:

$$-f(x_n) = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)$$

откуда $\quad x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$.

Таким образом, функция $F(x)$ имеет вид

$$F(x) = x - f(x)/f'(x) \quad (\text{здесь } q(x) = \frac{1}{f'(x)})$$

и из условия $|F'(x)| < 1$ можно определить область, внутри которой при любом значении x_0 последовательность $\{x_n\}$ сойдется к корню $f(x)$.

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

На практике начальное приближение x_0 выбирают из геометрических соображений. Предположим, что мы определили вилку, внутри которой 1-я и 2-я производные не меняют знаки. На рис. 3 и 4 видно, что при выполнении неравенства $f'(x)f''(x) > 0$ точку x_0 следует взять на правом конце вилки, а в случае $f'(x)f''(x) < 0$ - на левом.

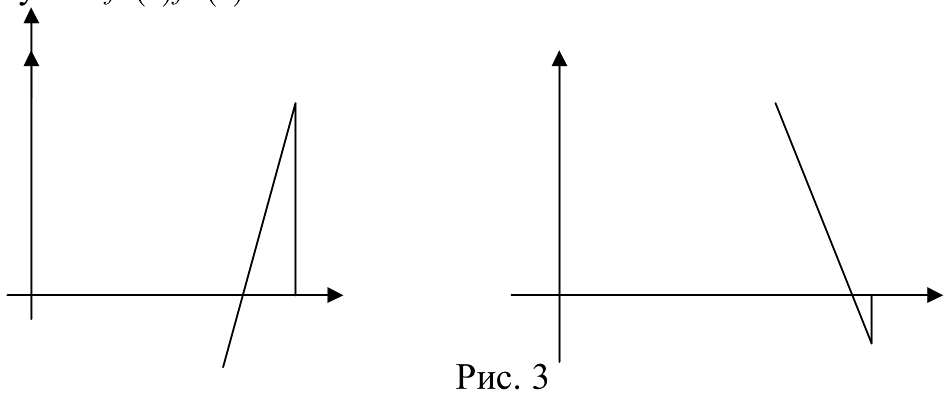


Рис. 3

Строгая оценка близости очередного приближения к корню может вызвать большие трудности [1], поэтому обычно в качестве критерия окончания счета используют условие: $f(x_n)f(x_n + sign(x_n - x_{n-1})\varepsilon < 0$

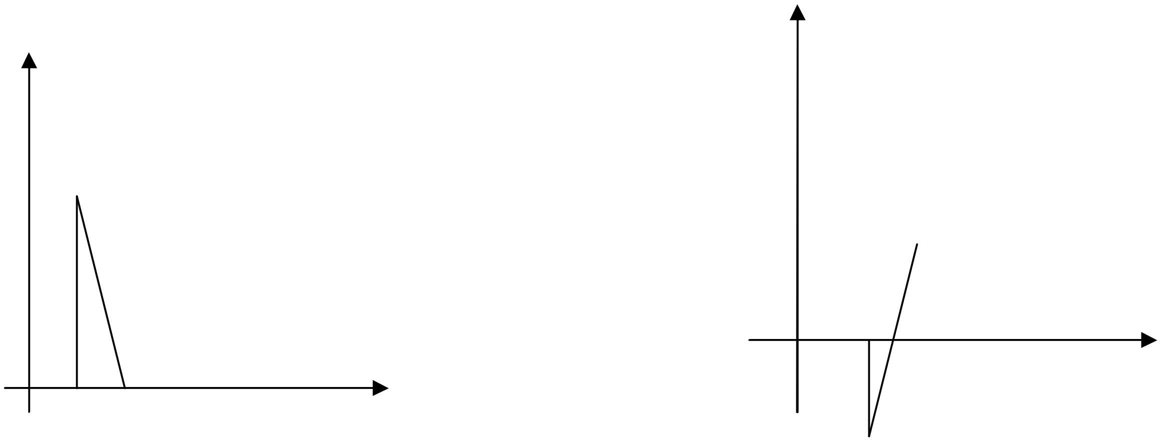


Рис. 4

$$sign(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t = 0 \\ -1, & t < 0. \end{cases}$$

Варианты работы № 1

$$f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

Номер варианта	A	B	C	D	Номер варианта	A	B	C	D
1	2	-3	-12	-5	**16**	2	4	-6	-1
2	1	-3	0	3	**17**	1	1	-7	4
3	1	3	-24	-10	**18**	2	0	-10	1

4	2	9	0	-21	**19**	1	4	0	[illegible]
5	1	3	0	-2	**20**	1	3	-12	1
6	1	3	-24	10	**21**	2	-8	0	3
7	2	9	0	-10	**22**	1	0	-5	-1
8	1	3	0	-3	**23**	2	2	-2	-7
9	1	-3	-24	-5	**24**	1	-1	-3	-1
10	1	0	-12	-5	**25**	2	3	-26	4
11	2	-3	-12	-12	**26**	1	-1	0	-5
12	1	-8	0	4	**27**	2	0	-10	3
13	1	2	-2	-6	**28**	2	-2	-6	3
14	2	0	-9	1	**29**	1	2	-12	1
15	1	3	-8	1	**30**	1	-2	-4	3

Задание

1. Нарисовать график функции $f(x)$ (с полным исследованием) и для всех корней уравнения найти такие вилки, на которых $f'(x)$ и $f''(x)$ не меняют знак.
2. Вычислить все корни с точностью 0,0001 первым и третьим способами и определить число приближений в каждом случае.
3. Сравнить полученные результаты.

Содержание отчета

1. Постановка задачи и описание методов.
2. График функции на вилке и значения нулевых приближений для всех корней.
3. Полученные значения корней и число итераций во всех случаях.
4. Листинг программы.

Р а б о т а № 2
МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

В работе сравниваются два метода вычисления определенного интеграла $\mathrm{I} = \int_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ - достаточно гладкая функция. Оба метода основаны на построении квадратурной формулы, т.е. на замене интеграла суммой вида $I \approx I_n = \sum_{i=1}^{n} q_i f(x_i)$, где x_i и q_i, $i = 1, 2, ..., n$ - узлы и коэффициенты квадратурной формулы.

Величина $R_n = |I - I_n|$ называется погрешностью квадратурной формулы.

1. *Формула средних прямоугольников*. Пусть $f(x)$ имеет вторую непрерывную производную, а узлы $\{x_i\}$ распределены равномерно на отрезке $[a,\, b]$:

$$x_i = a + \left(i - \frac{1}{2}\right)h, \text{ где } h = (b-a)/n.$$

Заменим функцию $f(x)$ ее значением в средней точке $f(x_i)$ на каждом i-м частичном отрезке $[x_{i-1},\, x_i]$. Тогда $I \approx I_h = h\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$ - формула средних прямоугольников, т.е. интеграла заменяют в этом случае интегральной суммой при данном выборе частичных отрезков и промежуточных точек (площадь криволинейной трапеции заменяется площадью ступенчатой фигуры – рис. 1).

Нетрудно видеть, что погрешность вычисления интеграла

$$|I - I_h| = \frac{b-a}{24} h^2 \left|f''(\xi)\right|, \quad \xi \in [a,b].$$

Таким образом, при указанных ограничениях на $f(x)$ погрешностью квадратурной формулы $R_h = |I - I_h| = O(h^2)$.

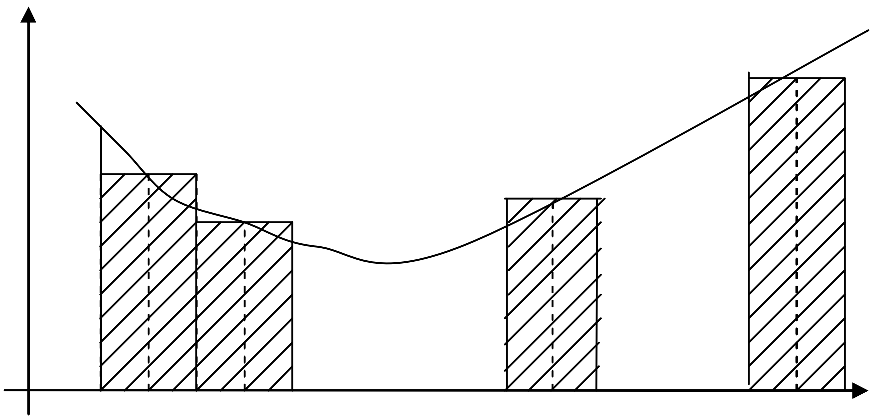


Рис.1

Запись $\alpha = O(\beta)$ (читается: α есть О большое от β) означает, что отношение α / β ограничено в окрестности оговоренной точки, например, при $h \to 0$. Соответствующая квадратурная формула имеет второй порядок точности. Считают, что $R_h \approx Ch^2$, где Ch^2 - главный член погрешности.

Так как значение погрешности связано с величиной 2-й производной подынтегральной функции, на практике предпочтительней пользоваться так называемым правилом Рунге (правило двойного пересчета).

Пусть для некоторой величины I (необязательно интеграла) справедливо равенство $I = I_h + ch^k$. В этом случае говорят, что приближенное равенство $I \approx I_h$ имеет k-й порядок точности относительно h.

Вычисляя ту же величину с шагом $h/2$, получаем $I = I_{h/2} + C\left(\frac{h}{2}\right)^k$. Легко определить оценку погрешности значения $I_{h/2}$:

$$R_{h/2} = \left|I - I_{h/2}\right| = \frac{C(h/2)^k}{2^k - 1} \approx \frac{I_{h/2} - I_h}{2^k - 1}.$$

Для формулы прямоугольников $k = 2$ и $R_{h/2} \approx \frac{|I_{h/2} - I_h|}{3}$. Отсюда получаем алгоритм вычисления интеграла с заданной погрешностью ε: считаем величины I_h, $I_{h/2}$ и $R_{h/2}$.

Если полученная величина $R_{h/2} < \varepsilon$, то вычисления заканчивают и в качестве приближенного значения интеграла берут $I \approx I_{h/2} + \left(I_{h/2} - I_h\right)/3$ (второе слагаемое носит название уточнения по Ричардсону). В противном случае шаг снова делят пополам и вычисление интеграла продолжается.

2. Формула Симпсона. Второй из рассмотренных методов основан на замене подынтегральной функции параболами и называется методом Симпсона. Будем считать, что $f(x)$ имеет непрерывную производную четвертого порядка. Снова разбиваем отрезок $[a, b]$ на n равных частей и на каждом из полученных отрезков строим интерполяционный многочлен 2-й степени. Обозначим через h половину длины частичного отрезка: $h = (b-a)/(2n)$, а через x_i точки: $x_i = a + ih, \quad i = 0,1,2,\ldots,2n.$

Интерполяционный многочлен строят по узлам $x_{2i-2}, x_{2i} \quad i = 1,2,\ldots,n.$ (рис. 2).

Можно показать [1], что

$$\int_{x_{2i-z}}^{x_{2i}} P_2^i(x)dx = \frac{h}{3}\left(f_{2i-2} + 4f_{2i-1} + f_{2i}\right), \text{ где } f_k = f(x_k).$$

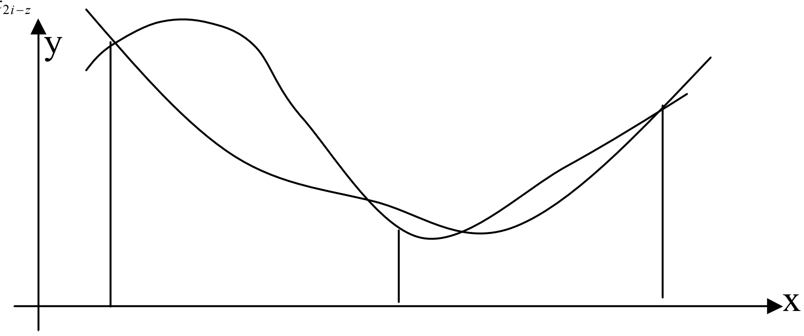


Рис. 2

Отсюда $\int_a^b f(x)dx \approx I_h = \frac{h}{3}\left(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \ldots + 2f_{2n-2} + 4f(2n-1) + f_{2n}\right).$

Последнее равенство носит название формулы Симпсона. Легко видеть, что полученная формула также является квадратурной. Погрешность формулы Симпсона [1]

$$R_h = \left|I - I_h\right| = \frac{b-a}{180}h^4\left|f^{IV}(\xi)\right| = 0\left(h^4\right),$$

т.е. имеет четвертый порядок точности $(k = 4)$, $\xi \in [a,b]$.

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

Оценка погрешности по правилу Рунге имеет вид $R \approx I_{h/2} + \left(I_{h/2} - I_h\right)/15$, а приближенное значение интеграла

$$I \approx I_{h/2} + \left(I_{h/2} - I_h\right)/15$$

Алгоритм вычисления интеграла с заданной погрешностью строится так же, как и для формулы прямоугольников.

Замечание. Начинать вычисления интеграла рекомендуется с $h \approx \sqrt{\varepsilon}$ для метода прямоугольников и с $h \approx \sqrt[4]{\varepsilon}$ для метода Симпсона. Так как число разбиений n цело, удобно пользоваться следующим алгоритмом:

формула прямоугольников: $n = \left[\dfrac{b-a}{\sqrt{\varepsilon}}\right] + 1, \quad h = \dfrac{b-a}{n}$;

формулы Симпсона: $n = \left[\dfrac{b-a}{2\sqrt[4]{\varepsilon}}\right] + 1, \quad h = \dfrac{b-a}{2n}$

(здесь квадратная скобка обозначает целую часть заключенного в ней выражения).

Задание

1. Вычислить интеграла по формулам прямоугольников и Симпсона с точностью 0,0001, пользуясь правилом Рунге.
2. Сравнить полученные двумя методами значения интеграла (с уточнением по Ричардсону и без него) между собой и с точным значением. Кроме того, сравнить число разбиений, при которых достигнута заданная точность (n для метода прямоугольников и $2n$ для метода Симпсона).

Содержание отчета

1. Постановка задачи и краткое описание методов решения.
2. Точное значение интеграла.
3. Приближенные значения интеграла (с уточнением и без него), полученные двумя методами.
4. Последние значения числа разбиений: n (для прямоугольников) и $2n$ (для метода Симпсона).
5. Листинг программы.

Р а б о т а № 3
ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Рассмотрим один из основных методов нахождения двойного интеграла – метод ячеек.

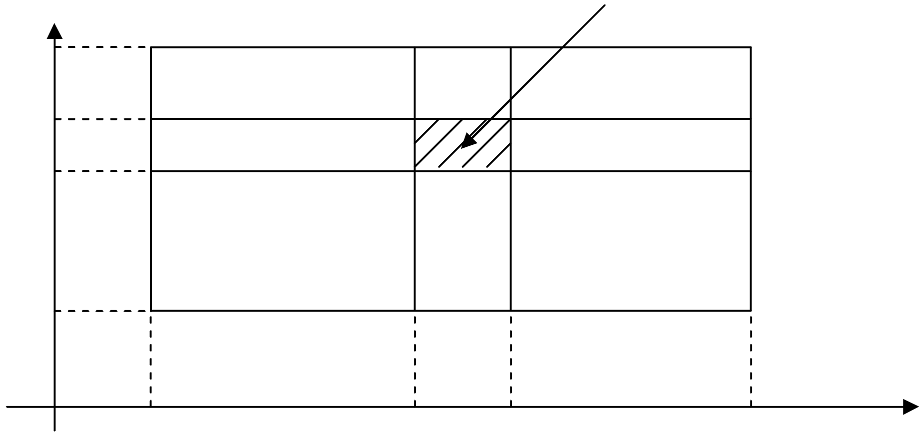
Требуется вычислить интеграл $\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy$, где $D=\{a\le x\le b,\quad c\le y\le d\}$- координатный прямоугольник, а $f(x,y)$- дважды дифференцируемая в области D функция.

Суть метода ячеек заключается в следующем: по теореме о среднем
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = S\cdot f(\xi,\eta).$$
Здесь $S=(b-a)(d-c)$ - площадь области D, точка $M(\xi,\eta)$ - некоторая точка этой области. Будем считать, что $f(\xi,\eta)\approx f(\bar{x},\bar{y})$, где $(\bar{x},\bar{y})$ - центр области D: $\bar{x}=(a+b)/2,\quad \bar{y}=(c+d)/2$. В этом случае

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = S\cdot f(\bar{x},\bar{y}).$$

Можно показать [4], что главный член погрешности полученной формулы
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = S\cdot f(\bar{x},\bar{y}) \approx \frac{S}{24}\left[(b-a)^2 f''_{xx}(\bar{x},\bar{y}) + (d-c)^2 f''_{yy}(\bar{x},\bar{y})\right].$$

Для уменьшения погрешности область разбиваем на прямоугольники (ячейки) линиями (рис. 1):
$$x_i = a+ih_x,\quad h_x=(b-a)/n_x,\quad i=0,1,\dots,n_x;$$
$$y_i = c+jh_y,\quad h_y=(d-c)/n_y,\quad j=0,1,\dots,n_y$$



Применив полученную формулу к каждой из ячеек, получим
$$I\approx I_h=\sum_{i=1}^{n_x}\sum_{j=1}^{n_x} S_{ij}(\bar{x}_i,\bar{y}_j) = h_x h_y \sum_{i=1}^{n_x}\sum_{j=1}^{n_y} f\left(a+(i-0{,}5)h_x,\quad c+(j-0{,}5)h_y\right).$$
В работе [4] показано, что главный член погрешности
$$R\approx C_1 h_x^2 + C_2 h_y^2,\quad \text{т.е. } R\approx (h_x^2+h_y^2)\ .$$
Как и в работе №4, на практике погрешность обычно оценивают с помощью правила Рунге, а именно, считают интеграл с шагами $\{h_x,h_y\}$ и $\{h_x/2,\ h_y/2\}$ и сравнивают полученные результаты. Погрешность оценивается величиной [4]
$$R\approx |\, h_{n/2}-h_h\,|/3$$
После выполнения условия в качестве интеграла берут
$$i^*\approx I_{h/2}+(I_{h/2}-I_h)/3.$$
Подчеркнем, что при использовании правила Рунге отношение n_x/n_y должно оставаться постоянным. Полученная формула вычисления интеграла верна

для простейшей области – координатного прямоугольника. Если область не прямоугольная, то в ряде случаев она с помощью простой замены переменных легко переводится в прямоугольную. Пусть, например, область задается неравенствами: $D = \{a \le x \le b, \quad \varphi(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$ (рис. 2).

Замена переменных

$$x = a + u(b-a),$$
$$y = \varphi_1(a+u(b-a)) + \sigma(\varphi_2(a+u(b-a)) - \varphi_1(a+u(b-a)))$$

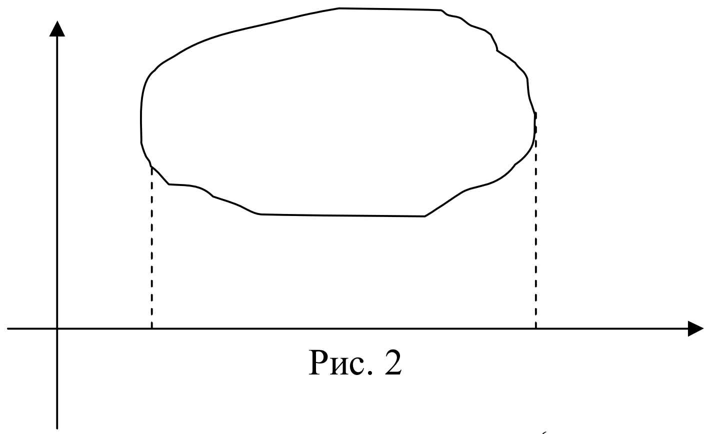


Рис. 2

преобразует область в прямоугольник $D' = \{0 \le u \le 1, \quad 0 \le \upsilon \le 1\}$. Напомним, что замену переменных в двойном интеграле производят по формуле

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(x(u,\upsilon),\ y(u,\upsilon)) \,|\, J(u,\upsilon) \,|\, dud\upsilon,$$

где $J(u,\upsilon) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_\upsilon \\ y'_u & y'_\upsilon \end{vmatrix} \ne 0$ - якобиан преобразования,

$$J(u,\upsilon) = (b-a)(\varphi_2(a+u(b-a)) - \varphi_1(a+u(b-a))).$$

Задание

1. Вычислить интеграл методом ячеек с точностью 0,0001, пользуясь правилом Рунге.
2. Сравнить полученные значения интеграла (с уточнением и без него) с точным значением интеграла.

Содержание отчета

1. Постановка задачи и краткое описание метода.
2. Точное значение интеграла.
3. Выкладки по замене переменных, якобиан и выражение для интеграла в новых переменных.
4. Приближенные значения интеграла (с уточнением и без него), полученные двумя методами.
5. Листинг программы.

Варианты работы № 3

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

Номер варианта	Область D				$f(x,y)$
	a	b	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$	
1	0	1	x^2	$1+x$	xy^2
2	1	2	0	$1+\ln x$	e^y
3	0	$\pi/3$	0	cosx	sinx/(1+y)
4	1	e	$x-2$	$\ln x$	y/x
5	1	2	0	x	$x^2\sqrt{1+xy}$
6	0	1	x^2	$1+x$	x^2y
7	1	2	$\ln x$	$1+\ln x$	e^y
8	$\pi/6$	$\pi/2$	0	$\sin x$	$\cos x/(1+y)$
9	1	2	x	$2x$	$x\ln(xy)$
10	1	e	$\ln x$	x	y/x
11	1	2	0	$3-x$	$x+y^2$
12	1	2	$\ln x$	$1+\ln x$	e^{x+y}
13	0		0	$1/\cos x$	$ytgx$
14	1	2	0	x	$4x^2\ln(1+xy)$
15	1	2	0	$\sqrt{x}$	$2x^2y\sqrt{1+xy^2}$
16	0	1	0	$1+x$	$-x+y^2$
17	0	1	$\ln(1+x)$	$1+2\ln(1+x)$	$e^{x+y}/(1+x)$
18	$\pi/6$	$\pi/2$	0	$1/\sin x$	$yctgx$
19	1	3	x	$2x$	$\ln(y/x)$
20	1	2	0	$1/x$	$x\sqrt{1+xy}$
21	0	1	0	$1+x$	$x+y^2$
22	0,25	1	0	$\sqrt{x}$	$x\sqrt{x}\cdot e^{xy}$
23	0	1	0	e^x	$(x+x^2)e^{-x}\cos(xy/4e^x)$
24	1	2	$1-x$	x	$\ln(x+y)/x$
25	1	$\sqrt{3}$	0	x^2	$1/(1+x^2)(1+y)\sqrt{y}$
26	1	2	$x/2$	x	$x/(x^2+y^2)$
27	1	2	x	$2x^2$	$2e^{y/x}$
28	$\pi/3$	$\pi/2$	0	x	$\cos(x+y)$
29	1	2	0	$\sqrt{x}$	$8x^2y\ln(1+xy^2)$
30	1	3	0	x	$1/\sqrt{1+e^{2y/x}}$

Р а б о т а № 4

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ТРЕХДИАГОНАЛЬНОЙ МАТРИЦЕЙ МЕТОДОМ ПРОГОНКИ

Ряд вычислительных задача сводится к решению СЛАУ специального вида:

$$\begin{cases} b_1 x_1 + c_1 x_2 = s_1, \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 = s_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = s_i \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n-1} x_{n-2} + b_{n-1} x_{n-1} + c_{n-1} x_n = s_{n-1} \\ a_n x_{n-1} + b_n x_n = s_n, \end{cases} \qquad (1)$$

Матрица системы (1)имеет ленточную структуру и называется трехдиагональной. Для удобства будем считать, что

$$a_1 = c_m = 0 \qquad (2)$$

Алгоритм решения таких систем носит название метода прогонки и является разновидностью метода последовательного исключения неизвестных. По методу прогонки решение будем искать в виде

$$x_{i-1} = \alpha_{i-1} x_i + \beta_{i-1}, \qquad i = 2,3,\dots,n. \qquad (3)$$

Подставляя формулу (3) в i-е уравнение системы (1), после несложных преобразований имеем

$$x_i = \frac{-c_i}{a_i \alpha_{i-1} + b_i} x_{i+1} + \frac{s_i - a_i \beta_{i-1}}{a_i \alpha_{i-1} + b_i}$$

Сравнив полученный результат с выражением (3) для $x_i (x_i = \alpha_i x_{i+1} + \beta_i)$, получим рекуррентные формулы для вычисления α_i и β_i:

$$\alpha_i = \frac{-c_i}{a_i \alpha_{i-1} + b_i}, \qquad \beta_i = \frac{s_i - a_i \beta_{i-1}}{a_i \alpha_{i-1} + b_i}, \qquad i = 2,3,\dots,n-1.$$

Из первого уравнения системы (1) имеем: $x_1 = \frac{-c_1}{b_1} x_2 + \frac{s_1}{b_1}$, откуда следует, что $\alpha_1 = \frac{-c_1}{b_1}$, $\beta_1 = \frac{s_1}{b_1}$.

Подставив формулу (3) при $i = n$ в последнее уравнение системы (1), найдем x_n:

$$x_n = (s_n - a_n \beta_{n-1})/(a_n \alpha_{n-1} + b_n).$$

Используя формулу (3), найдем остальные неизвестные. Таким образом, расчетные формулы метода прогонки имеют вид: $\alpha_1 = \frac{-c_1}{b_1}$, $\beta_1 = \frac{s_1}{b_1}$,

$r = a_i\alpha_{i-1} + b_i$; $\alpha_i = \frac{-c_i}{r}$, $\beta_i = \frac{s_i - a_i\beta_{i-1}}{r}$, $i = 2,3,\ldots,n$ - прямой ход метода прогонки; $x_n = \beta_n$, $x_i = \alpha_i x_{i+1} + \beta_i$, $i = n-1,\ n-2,\ldots,1$ - обратный ход метода прогонки.

Задание

1. Написать программу для решения системы (1) с формальными параметрами n, a, b, c, s, x, где n - порядок системы; a, b, c, s, x - одномерные массивы элементов матрицы, правой части и неизвестных.
2. Самостоятельно составить модельную систему уравнений вида (1) для $n = 4$. Значения коэффициентов матрицы подобрать так, чтобы были выполнены условия:

$$|b_1| \geq |a_i| + |c_i| > 0, \quad i = 2,3,\ldots,n-1,$$

$$b_1 \neq 0,\ \ b_n \neq 0,\ \ |c_1 / b_1| < 1,\ \ |a_n / b_n| < 1,$$

которые являются достаточными для реализуемости метода прогонки [1]. Решить модельную систему уравнений с помощью отлаженной программы.

Содержание отчета

1. Постановка задачи.
2. Модельная система уравнений и ее точное решение.
3. Программа.
4. Результат работы программы.

Работа № 5

ПОСТРОЕНИЕ КУБИЧЕСКОГО СПЛАЙНА ДЛЯ ТАБЛИЧНО ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ

Задача приближения таблично заданной функции многочленом заключается в следующем: по таблично заданной функции

x	x_0	x_1	x_2	. . .	x_n
y	y_0	y_1	y_2	. . .	y_n

Нужно найти многочлен степени m: $P_m(x)$, близкий функции $y(x)$ при $x \in [x_0, x_n]: P_m(x) \approx y(x)$. Построение такого многочлена позволяет приближенно определять значения функции в произвольной точке данного отрезка $[x_0, x_n]$. Метод интерполяции заключается в построении приближающего многочлена $P_m(x)$, который совпадает со значениями функции $y(x)$ во всех заданных точках $x_i\ (i = 0,\ 1, 2,\ldots, n)$, называемых узлами интерполяции:

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

$P_m(x_i) = y(x_i)$ $i = 0, 1, 2, \ldots, n.$ Максимальная степень такого многочлена равна количеству точек $n(m = n)$, при этом получим интерполяционные многочлены Лагранжа, Ньютона и т.д. При больших n многочлены n-й степени приводят к большой вычислительной погрешности. От этого недостатка свободна кусочно-полиномиальная интерполяция (интерполяция сплайнами), при которой на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ функция приближается многочленом 3-й степени.

Обычно задача построения кубического сплайна ставится следующим образом: требуется найти совокупность многочленов 3-й степени $S(x) = \{S_i(x),\ i = 0,1,2,\ldots,n-1\}$, где

$$\mathrm{S_i}(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3,\ x \in [x_i, x_{i+1}]$$

При этом многочлены должны удовлетворять условиям:

$$S_i(x_i) = y_i, \quad S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}, \quad i = 0,1,2,\ldots,n-1 \qquad (1)$$

(основное условие интерполяции) а также

$$S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1}), \quad S_i''(x_{i+1}) = S_{i+1}''(x_{i+1}), \quad i = 0,1,2,\ldots,n-2 \qquad (2)$$

(условия гладкости – непрерывность 1-й и 2-й производных $S(x)$).

Если считать шаг таблицы постоянным: $h_i = x_{i+1} - x = h$, то указанные условия проводят к трехдиагональной СЛАУ относительно коэффициентов c_i:

$$\begin{cases} 4c_1 + c_2 = 3\dfrac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2}, \\ c_{i-1} + 4c_i + c_{i+1} = 3\dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}, \quad i = 2,3,\ldots,n-2, \\ c_{n-2} + 4c_{n-1} = 3\dfrac{y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}}{h^2}, \end{cases}$$

$$c_0 = c_n = 0$$

(порядок системы равен $n-1$).

Остальные коэффициенты сплайнов находят по формулам:

$$a_i = y_i, \quad b_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \frac{h}{3}(c_{i+1} + 2c_i), \quad d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h}, \quad i = 0,1,\ldots,n-1.$$

Задание

1. Построить таблицу значений $\mathrm{y_i}$ на отрезке $[a,b]$ с шагом $h = (b-a)/n$. Значения a и b и функцию $y = f(x)$ взять из работы №2; n-любое цело.
2. По полученной таблице $\mathrm{y_i}$, используя программу из работы № 4, вычислить коэффициенты сплайнов.
3. Вычислить значение сплайна и истинные значения функции в точке
   $$x_i^* = a + (i - 0{,}5)h, \quad i = 1,2,\ldots,n$$
4. Вычислить значение сплайна и функции в произвольной точке x, задаваемой с экрана.

Содержание отчета

1. Постановка задачи и метод решения.

2. Таблица значений $S(x_i^*)$, $y(x_i^*)$ и $|S(x_i^*)-y(x_i^*)|$, а также значения $S(x)$ и $y(x)$ (в соответствии с пп. 3, 4 задания).

Р а б о т а № 6
МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Интерполяционные функции - как многочлены Лагранжа, так и сплайны – имеют один общий недостаток: немонотонное поведение на отрезке интерполяции. Кроме того, значения исходной функции в узлах нередко бывают известны лишь приближенно, со случайными ошибками, что обесценивает основное условие интерполяции: $P(x_i)=y_i$. В подобных случаях предпочтительнее решать задачи аппроксимации, т.е. строить простую аналитическую функцию, проходящую достаточно близко от заданных точек (x_i, y_i). Особенно актуальной эта задача становится тогда, когда имеются априорные данные о функции, например, известен вид аналитической зависимости или интервалы ее монотонности и т.п. В общем случае выбор аналитической зависимости представляет собой непростую задачу. Существует несколько формальных и неформальных подходов для ее решения, например вероятностный [3]. В настоящей работе предлагается формальный подходов для выбора аппроксимирующей функции, зависящей от двух параметров.

Постановка задачи и теоретические основы метода наименьших квадратов

По таблично заданной функции

x	x_1	x_2	. . .	x_n
y	y_1	y_2	. . .	y_n

(будем обозначать ее) $f(x)$ или $y(x)$; $y(x_i)=y_i$, $i=1,\ldots,n$) требуется найти монотонную, гладкую, аналитические заданную функцию $z(x)$ минимизирующую величину $\|z(x)-y(x)\|=\sqrt{(z(x)-y(x), z(x)-y(x))}$, т.е. проходящую достаточно близко ко всем значениям y_i. Так как $y(x)$ задана таблично, совокупность ее значений $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ можно считать элементом арифметического пространства R_n. В этом случае величину $\|z(x)-y(x)\|$ Вычисляют по формуле

$$\|z(x)-y(x)\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z(x_i)-y_i)^2},$$

т.е. минимизируют сумму квадратов, что и дало название методу- метод наименьших квадратов (МНК).

На рис. 1 приведена геометрическая интерпретация метода.

Здесь $\|z(x)-y(x)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2}$

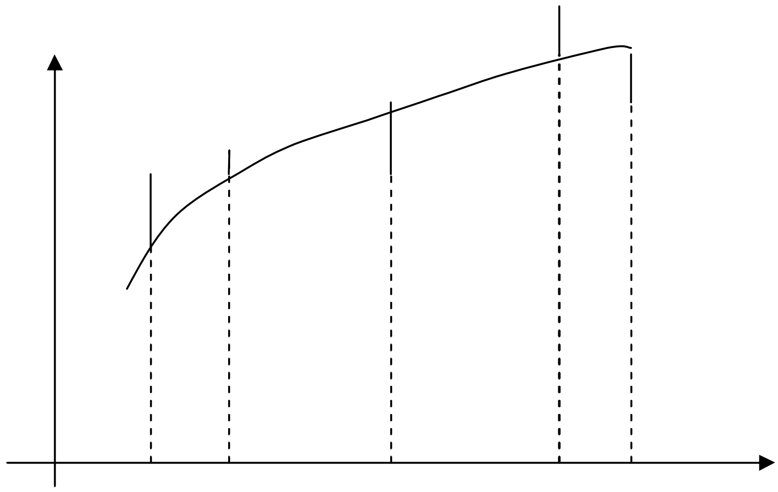


Рис. 1

Для решения поставленной задачи выбирают функцию $z(x) = z(x;\lambda_1,...,\lambda_m)$, зависящую от параметров $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m$, по которым минимизируют величину $F(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m) = \sum_{i=1}^{n}[z(x_i,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m) - y_i]^2$

После того как вид функции $z(x)$ выбран, минимум указанной величины может найден обычно оценивают величиной среднеквадратичного отклонения:

$$\Delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}[z(x_i)-y_i]^2}{n}} = \sqrt{\frac{F(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)}{n}}. \qquad (1)$$

В самом простом случае аппроксимирующую функцию ищут в виде линейной комбинации двух заранее избранных функций:

$$z(x,a,b) = a\varphi_1(x) + b\varphi_2(x) \qquad (2)$$

Условия минимума величины $F(a,b) = \sum_{i=1}^{n}[a\varphi_1(x_i) + b\varphi_2(x_i) - y_i]^2$ приводят к СЛАУ относительно неизвестных параметров a и b:

$$\begin{cases} Aa + Bb = D_1 \\ Ba + Cb = D_2 \end{cases} \qquad (3)$$

где

$$A = \sum_{i=1}^{n}\varphi_1^2(x_i); \qquad B = \sum_{i=1}^{n}\varphi_1(x_i)\varphi_2(x_i); \qquad C = \sum_{i-1}^{n}\varphi_2^2(x_i)$$

$$D_1 = \sum_{i=1}^{n} y_i\varphi_1(x_i); \qquad D_2 = \sum_{i=1}^{n} y_i\varphi_2(x_i) \qquad (4)$$

Выбор функции $z(x)$

ABBYY PDF Transformer 2.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

В данной работе вид эмпирической зависимости предлагается выбрать, используя характеристические свойства некоторых элементарных функций. Введем следующие обозначения:

$x_a = \frac{(x_1 + x_n)}{2}$ - среднее арифметическое двух чисел;

$x_q = \sqrt{x_1 x_n}$ – среднее геометрическое двух чисел;

$x_h = \frac{2}{1/x_1 + 1/x_n} = \frac{2x_1x_n}{x_1 + x_n}$ - среднее гармоническое двух чисел;

Легко видеть, что функции $z_1(x) - z_9(x)$ обладают следующими свойствами:

$z_1(x) = ax + b \Leftrightarrow z(x_a) = z_a$

$z_2(x) = bx^a \Leftrightarrow z(x_q) = z_q$

$z_3(x) = bx^{ax} \Leftrightarrow z(x_a) = z_q$

$z_4(x) = aInx + b \Leftrightarrow z(x_q) = z_a$,

$z_5(x) = \frac{a}{x} + b \Leftrightarrow z(x_h) = z_a$

$z_6(x) = \frac{x}{ax + b} \Leftrightarrow z(x_a) = z_h$

$z_7(x) = \frac{x}{bx + a} \Leftrightarrow z(x_h) = z_h$

$z_8(x) = be^{a/x} \Leftrightarrow z(x_h) = z_q$

$z_9(x) = \frac{1}{a \ln x + b} \Leftrightarrow z(x_q) = z_h$

Где z_a, z_q, z_h - среднее арифметическое, среднее геометрическое и среднее гармоническое значения функций $z(x)$ в точках x_1 и x_n.

Таким образом, для выбора функции из рассматриваемого семейства необходимо вычислить следующего величины:

$$\delta_1 = |z(x_a) - y_a|, \quad \delta_2 = |z(x_q) - y_q|, \quad \delta_3 = |z(x_a) - y_q| \quad ,$$

$$\delta_4 = |z(x_q) - y_a|, \quad \delta_5 = |z(x_h) - y_a|, \quad \delta_6 = |z(x_a) - y_h| \quad ,$$

$$\delta_7 = |z(x_h) - y_h|, \quad \delta_8 = |z(x_h) - y_q|, \quad \delta_9 = |z(x_q) - y_h|$$

И найти наименьшую из них. Ее номер (от 1 до 9) и определяет выбираемую аппроксимирующую функцию.

Величины $x_a, x_h, x_q, y_a, y_h, y_q$ вычисляют по заданной таблице (см. «Вариант работы №3»), а значения $z(x_a)$, $z(x_h)$ и $z(x_q)$ берут из графика, построенного самостоятельно по аналогии с рис. 1.

Определение параметров a и b для выбранной функции

Возможны три случая:

1. Номер функции равен 1, 4 или 5. Функция $\varphi_1(x)$ для этих номеров равна x, $\ln x$ или $1/x$. Функция $\varphi_2(x)\equiv 1$.

2. Номер функции равен 2, 3 или 8. Для использования формулы (2) необходимо прологарифмировать функцию $z(x)$:

$$\ln z_2(x) = a\ln x + \ln b \Rightarrow \varphi_1(x) = \ln x,\quad \varphi_2(x) = 1,$$
$$\ln z_3(x) = ax + \ln b \quad\quad \Rightarrow \varphi_1(x) = x,\quad \varphi_2(x) = 1,$$
$$\ln z_8(x) = \frac{a}{x} + \ln b \quad\quad \Rightarrow \varphi_1(x) = \frac{1}{x},\quad \varphi_2(x) = 1.$$

Для этих номеров в формулах (4) для D_1 и D_2 вместо y_i также следует поместить $\ln y_i$. Нужно помнить, что после решения системы (3) вместо параметра b мы получим $b = \ln b$, т.е. $b = e^{\tilde{b}}$.

3.Номер функции равен 6, 7 или 9. Здесь необходимо перейти к функции $1/z(x)$:

$$\frac{1}{z_6(x)} = ax + b \quad\quad \Rightarrow \quad \varphi_1(x) = x,\quad \varphi_2(x) = 1,$$
$$\frac{1}{z_7(x)} = \frac{a}{x} + b \quad\quad \Rightarrow \quad \varphi_1(x) = \frac{1}{x},\quad \varphi_2(x) = 1,$$
$$\frac{1}{z_9(x)} = a\ln x + b \quad \Rightarrow \quad \varphi_1(x) = \ln x,\quad \varphi_2(x) = 1.$$

В выражения для D_1 и D_2 вместо y_i следует подставить $1/y_i$.

Замечание. Легко видеть, что в формулах (4) во всех девяти случаях

$$C = \sum_{i=1}^{n}\varphi_2^2(x_i) = \sum_{i=1}^{n}1 = n$$

Содержание отчета

1. Постановка задачи.
2. Графики таблично заданной функции и аппроксимирующей функции $z(x)$.
3. Подсчитанные величины $x_a, x_h, x_q, y_a, y_h, y_q, z(x_a)$, $z(x_h)$, $z(x_q)$, $\delta_1, \ldots \delta_9$, $\delta_k = \min \delta_i$
4. Система уравнений для определения a и b .
5. Листинг программы.
6. Результат решения: a, b, $z(x)$.
7. Среднеквадратичное отклонение Δ –см. формулу (1).

Варианты работы № 6

Номер варианта	Значения x								
	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
1	0.96	2.07	1.96	2.62	3.75	4.12	3.98	3.63	4.7
2	3.93	2.30	1.60	1.27	1.18	0.99	1.41	0.80	1.12

3	1.15	1.39	1.85	1.95	2.16	2.79	2.88	2.38	3.31
4	0.16	0.68	1.96	2.79	3.80	6.81	9.50	15.60	24.86
5	3.33	3.81	4.72	6.18	6.63	7.52	9.16	10.36	10.95
6	2.30	2.45	2.65	1.62	2.01	1.64	1.35	1.45	0.75
7	2.07	2.41	1.77	1.98	2.24	2.73	2.91	2.56	3.07
8	1.55	1.80	1.66	0.73	0.69	1.30	0.38	0.72	0.70
9	9.44	5.16	4.43	3.31	3.48	3.20	2.34	2.13	2.18
10	1.32	1.81	2.58	2.88	3.88	4.29	4.58	5.06	4.14
11	2.85	1.83	1.86	1.57	2.17	1.37	1.16	1.69	0.81
12	0.31	0.57	1.57	1.40	1.18	1.54	1.55	1.96	2.42
13	1.22	1.18	2.50	2.35	4.47	6.02	7.35	10.90	15.36
14	3.21	2.95	4.06	4.03	5.39	5.97	6.51	6.77	7.79
15	2.20	2.02	1.42	1.30	0.45	0.46	0.33	0.41	0.25
16	2.34	2.45	2.79	4.40	4.25	5.63	5.54	6.31	6.70
17	2.61	1.62	1.17	0.75	0.30	0.75	1.03	0.81	0.57
18	9.58	5.75	3.68	2.74	2.91	2.62	2.64	2.40	2.57
19	0.73	1.80	2.90	2.63	3.78	4.58	4.50	4.65	5.75
20	3.00	2.10	2.21	2.04	1.13	1.18	1.27	1.10	0.86
21	0.86	0.97	0.65	0.75	1.60	0.65	1.34	1.62	1.01
22	1.24	1.74	1.61	2.16	3.06	2.88	4.53	5.40	7.07
23	2.57	2.96	3.08	2.56	3.45	3.16	2.99	4.00	4.21
24	0.91	1.33	1.36	0.35	0.25	1.01	0.38	0.70	0.82
25	2.35	2.74	5.37	6.96	8.52	10.52	13.41	15.93	17.61
26	3.14	.78	1.62	1.33	1.03	0.29	0.36	0.60	0.40
27	10.91	4.89	3.26	3.15	2.93	1.98	2.90	2.79	2.52

.

Р а б о т а № 7
ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка с двумя неизвестными функциями и начальными условиями в одной точке (задача Коши):

$$\begin{cases} y' = f(x,y,z) \\ z' = \varphi(x,y,z); \quad y(x_0) = y_0, \quad z(x_0) = z_0 \end{cases}$$

Распространенным численным методом решения поставленной задачи является Метод Рунге – Кутта 2-го порядка (подробно этот метод рассмотрен в работах [1]).

Алгоритм метода заключается в следующем: пусть известны значения функций $y(x)$ и $z(x)$ в точке x_i: $y(x_i) = y_i$, $z(x_i) = z_i$. Для того чтобы вычислить значения $y(x)$ и $z(x)$ в точке x_{i+1}, находят величины $k1,\ k2,\ l1,\ l2$:

$$k_1 = hf(x_i, y_i, z_i), \qquad\qquad l = h\varphi(x_i, y_i, z_i),$$

$$k_2 = hf(x_i + h,\ y_i + k_1,\ z_1 + l_1) \qquad l_2 = h\varphi(x_i + h,\ y_i + k_1,\ z_1 + l_1)$$

где $h = x_{i+1} - x_i$.

После этого получают значения неизвестных функций

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2), \quad z_{i+1} = z_i + \frac{1}{2}(l_1 + l_2).$$

Таким образом, зная значения y_0 и z_0 в точке x_0, можно вычислить значения $y(x)$ и $z(x)$ в произвольной точке x.

Для одного уравнения $y' = f(x, y)$ формулы принимают вид

$$k_1 = hf(x_i, y_i), \quad k_2 = hf(x_i + h,\ y_i + k_1)$$

$$y_{i+1} = y_i = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

Геометрическая иллюстрация этого случая приведена на рис. 1.

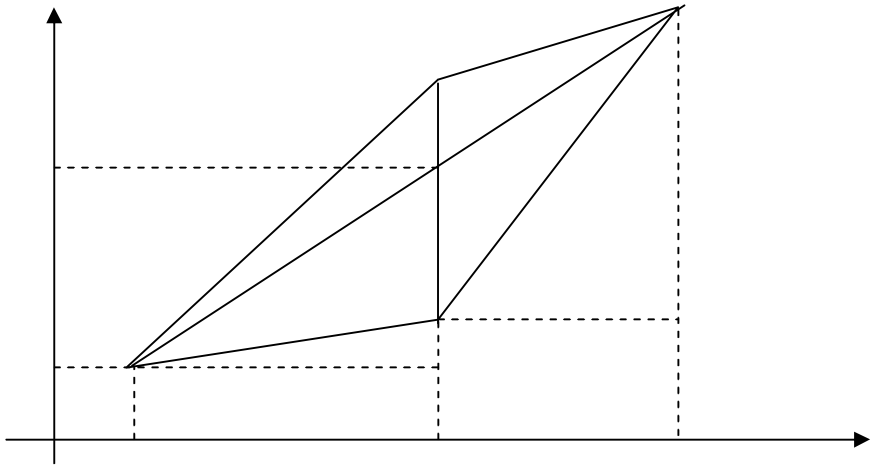


Рис.1

Здесь $\tilde{y}(x)$ и $\tilde{\tilde{y}}(x)$ - интегральные кривые, проходящие через точки (x_i, y_i) и $(x_i + h,\ y_i + k_1)$; k_1 - приращение ординаты касательной к функции $\tilde{y}(x)$ в точке x_i, т.е. дифференциал $d\tilde{y}(x_i)$ при $\Delta x = h$; k_2 - дифференциал $d\tilde{\tilde{y}}(x_{i+1})$ при $\Delta x = h$; точка (x_{i+1}, y_{i+1}) лежит на пересечении диагоналей параллелограмма.

Рассмотренный метод Рунге-Кутта имеет 2-й порядок точности: $R_h = O(h^2)$. На практике точность решения определяют так же, как и в методах численного интегрирования (см. работы № 2 и 3) по правилу Рунге:

$$R \approx |\, y_{n/2} - y_h \,| / 3 \qquad \text{и} \qquad R \approx |\, z_{n/2} - z_h \,| / 3 \quad ,$$

где $y_{h/2}$, $z_{h/2}$ и y_h , z_h - решения, найденные с шагом $h/2$ и h соответственно. Для того чтобы найти значения y_1 и z_1 с заданной точностью, их вычисляют с шагом $h = x_1 - x_0$, $h/2$, $h/4$ и т.д. до тех пор, пока соответствующие величины R_y и R_z не станут меньше заданной точности ε.

Варианты работы даны для линейного ОДУ 2-го порядка:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \qquad y(a) = A, \quad y'(a) = C.$$

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

Для перехода к системе ОДУ 1-го порядка следует ввести новую функцию $z(x) = y'(x)$ тогда

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = f(x) - q(x)y - p(x)z; \quad y(a) = A, \ z(a) = C \end{cases}$$

(в наших обозначениях: $f(x,y,z) = z, \ \varphi(x,y,z) = f(x) - q(x)y - p(x)z$).

Задание

1. Вычислить с заданной точностью решение уравнения в точках 0,25; 0,5; 0,75; 1.
2. Найти точное решение ОДУ.
3. Сравнить приближенное решение с точным.

Содержание отчета

1. Постановка задачи.
2. Точное решение уравнения.
3. Таблица значений приближенного и точного решений в заданных точках.
4. Листинг программы.

Варианты работы № 7

Значения a и b во всех вариантах равны 0 и 1, соответственно $[a,b] = [0,1]$

Номер варианта	$p(x)$	$q(x)$	$f(x)$	A	C
1	-2	1	$3e^x$	2	3
2	-7	12	5	1	2
3	-4	3	e^{5x}	3	9
4	-1	0	$2(1-x)$	1	1
5	-8	16	e^{4x}	0	1
6	-8	7	14	1	0
7	0	4	8	3	4
8	0	1	$5\sin(2x)$	1	2/3
9	-2	0	$e^x(x^2+x-3)$	2	2
10	0	1	$4e^x$	4	-3
11	0	-1	$2-x^2$	1	1
12	0	4	e^{-2x}	0	0
13	-4	0	$6x^2+1$	0	3,5625
14	0	-4	$16xe^2x$	0	3

15	1	-2	$-2x+1$	1	-1
16	-6	8	10	1	2
17	-2	2	$2x$	0	1
18	-5	0	7	1	0,6
19	-3	2	$2\sin x$	0	-0,2
20	6	0	8	2	6
21	1	-2	$\cos x - 3\sin x$	1	2
22	-1	0	3	6	2
23	0	4	$\sin x$	1	1
24	0	4	e^x	1	3
25	-1	-6	2	1	0
26	-8	7	14	1	5
27	0	1	$\cos x$	1	2
28	4	4	$5e^{-2x}$	1	2
29	0	4	$3\sin(2x)$	2	0,75
30	0	-1	e^x	3	1,5

Работа № 8

РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ 2-ГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ ПРОГОНКИ

Рассмотрим краевую задачу для линейного обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) 2-го порядка:

$$y''+p(x)y'+q(x)y = f(x), \qquad y(a) = A, \quad y(b) = B\,. \qquad (1)$$

Для численного решения данного уравнения используем разностную аппроксимацию производных. Для этого выразим $y_{i=1}$ и y_{i+1} по формуле Тейлора:

$$y_{i-1} = y_i - hy_i^1 + \frac{h^2}{2!}y_i'' - \frac{h^3}{3!}y_i''' + O(h^4), \qquad (2)$$

$$y_{i+1} = y_i + hy_i^1 + \frac{h^2}{2!}y_i'' - \frac{h^3}{3!}y_i''' + O(h^4). \qquad (3)$$

Из формул (2) и (3) легко получить

$$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + O(h^2) \qquad y_i'' = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + O(h^2)$$

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей точками

$$x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_n = b \quad x_{i+1} - x_i = h = \frac{b-a}{n}, \quad i = 0,1,\ldots,n-1$$

И заменим производные в уравнении (1) во внутренних точках x_i их разностными аналогами. После несложных преобразований получим

$$y_{i-1}\left(1-\frac{h}{2}p_i\right)+y_i\left(h^2q_i-2\right)+y_{i+1}\left(1+\frac{h}{2}p_i\right)=h^2f_i \qquad (4)$$

где $\quad p_i=p(x_i),\ q_i=q(x_i),\ f_i=f\left(x_l\right),\quad i=1,2,\ldots,n-1$

Краевые условия принимают вид

$$y_0=A,\quad y_n=B. \qquad (5)$$

Подставляя условия (5) в уравнение (4), получим относительно величин y_i СЛАУ $(n-1)$-го порядка с трехдиагональной матрицей

$$\begin{cases} y_1\left(h^2q_1-2\right)+y^2\left(1+\frac{h}{2}p_1\right)=h^2f_1-A\left(1-\frac{h}{2}p_1\right), \\ y_{i-1}\left(1-\frac{h}{2}p_i\right)+y_i\left(h^2q_i-2\right)+y_{i+1}\left(1+\frac{h}{2}p_i\right)=h^2f_i,\ i=2,3,\ldots,n-2, \\ y_{n-2}\left(1-\frac{h}{2}p_{n-1}\right)+y_{n-1}\left(h^2q_{n-1}-2\right)=h^2f_{n-1}-B\left(1+\frac{h}{2}p_{n-1}\right) \end{cases} \qquad (6)$$

Варианты работы № 9

Варианты работы № 8 взять из работы № 7. Краевое условие в точке b: $\quad y(b)=B$ вычислить, решив аналитически соответствующую задачу Коши (после нахождения точного решения подставить в него точку $b=1$, т.е. $B=y(1)$).

Задание

1. Решать аналитически задачу Коши и найти значение решения в точке b.
2. Решать задачу (1) методом прогонки с шагом $h=(b-a)/n$, используя программу работы № 1.
3. Вычислить точное решение yt с тем же шагом и величину $\|y-yt\|=\max|y-yt|$.

Содержание отчета

1. Постановка задачи и метод решения.
2. Аналитическое решение задачи (1)
3. Результаты решения: массивы y и yt величина $\|y-yt\|$
4. Листинг программы.

Р а б о т а № 9
РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ СТРЕЛЬБЫ

Рассмотрим краевую задачу для линейного ДУ 2-го порядка:

$$y''+p(x)y'+q(x)y = f(x), \qquad y(a)=A, \quad y(b)=B. \tag{1}$$

Как известно, общее решение уравнения (1) имеет вид

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_{чи}, \tag{2}$$

где y_1 и y_2 - линейно независимые частные решения однородного уравнения; C_1 и C_2 - произвольные постоянные; $y_{чи}$ - некоторое частное решение неоднородного уравнения.

При подстановке в (2)краевых условий $y(a)=A, \quad y(b)=B$ получим систему уравнений относительно C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1 y_1(a) + C_2 y_2(a) + y_{чи}(a) = A \\ C_1 y_1(b) + C_2 y_2(b) + y_{чи}(b) = B \end{cases} \tag{3}$$

Допустим, что известно частное решения уравнения (1), удовлетворяющее условию

$$y_{чи}(a) = A, \tag{4}$$

А также одно из частных решений соответствующего однородного уравнения, отвечающее условию

$$y_1(a) = 0 \tag{5}$$

Тогда первое уравнение системы (3) приобретает вид

$$C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot y_2(a) + A = A$$

И, следовательно, $C_2 = 0$. Постоянную C_1 определяем из уравнения

$$C_1 y_1(b) + y_{чи}(b) = B. \tag{6}$$

Метод, при котором предварительно отыскивают численные решения $y_{чи}$ и y_1, удовлетворяющие (4) и (5), а затем находят C_1 исходя из (6), носит название метода стрельбы.

Для численного решения задачи разобьем отрезок $[a, b]$ точками $x_i = a + ih$, как в работе № 7, и обозначим:

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad p_i = p(x_i), \quad q_i = q(x_i), \quad f_i = f(x_i),$$

$$y_0(i) = y_{чи}(x_i), \quad y_1(i) = y_1(x_i).$$

Будем искать численные решения $y_0(i)$ и $y_1(i)$, исходя из условий:

$$y_0(0) = A, \quad y_1(0) = 0 \tag{7}$$

$$y_0(1) = D_0, \quad y_1(0) = D_1 \neq 0 \tag{8}$$

(для уменьшения вычислительной погрешности обычно берут $D_0 = F + 0(h)$ и $D_1 = 0(h)$).

Система (4) из работы № 8 дает в нашем случае $2(n-1)$ уравнений:

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

$$y_0(i-1)\left(1-\frac{h}{2}p_i\right)+y_0(i)(h_2q_i-2)+y_0(i+1)\left(1+\frac{h}{2}p_i\right)=h^2f_i,$$

$$y_1(i-1)\left(1-\frac{h}{2}p_i\right)+y_1(i)(h^2q_i-2)+y_1(i+1)\left(1+\frac{h}{2}p_i\right)=0, \qquad i=1,2,\ldots,n-1. \qquad (9)$$

С учетом четырех условий (7), (8) имеем $2(n+1)$ уравнений относительно ординат $y_0(i), \quad y_1(i), \; i=0,1,\ldots,n$.

Преимущества метода стрельбы по сравнению с рассмотренным в работе № 8 методом прогонки обусловлены наличием двух дополнительных условий (8), которые находится «в нашей власти». Наличие этих дополнительных “степеней свободы” дает в наше распоряжение – для каждого из численных решений $y_0(i)$ и $y_1(i)$ по два начальные точки: $y_0(0)$, $y_0(1)$ и $y_1(0)$, $y_1(1)$.

Это позволяет не решать систему (9) методом прогонки, а находить остальные ординаты явно, по формулам (10):

$$y_0(i+1)=\frac{f_ih^2-\left(1-\frac{h}{2}p_i\right)y_0(i-1)+(2-h^2q_i)y_0(i)}{\left(1+\frac{h}{2}p_i\right)}$$

$$y_1(i+1)=\frac{(2-h^2q_i)y_1(i)-\left(1-\frac{h}{2}p_i\right)y_1(i-1)}{\left(1+\frac{h}{2}p_i\right)}, \qquad i=1,2,\ldots,n-1. \qquad (10)$$

В результате последовательно определяем все ординаты: $y_0(i), \quad y_1(i), \; i=0,1,\ldots,n$. Теперь для определения C_1 используем (6): $C_1y_1(n)+y_0(n)=B$, откуда $C_1=(B-y_0(n))/y_1(n)$.

Окончательно искомое численное решение краевой задачи (1) в точках разбиения получим по формулам

$$y(x_i)=y_0(i)+C_1y_i(i), \quad i=0,1,\ldots,n.$$

Задание на счет, варианты и содержание о7тчета взять из работы №8.

Р а б о т а №10

ПОИСК ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИИ МЕТОДОМ «ЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ»

Задача определения экстремума функции носит название задачи оптимизации.

Функции $f(x)$ называется *унимодальной* на отрезке $[a,b]$, если она имеет единственный локальный экстремум на этом отрезке.

Без ограничения общности будем считать, что функция имеет на $[a,b]$ минимум (в противном случае будем рассматривать функции $-f(x)$). Большинство методов одномерной оптимизации основано на следующем

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

свойстве: пусть $f(x)$ унимодальная на $[a, b]$, а α и β - произвольные точки (a, b). Тогда, если $\alpha < \beta$ и $f(\alpha) < f(\beta)$, то $f(x)$ унимодальна на $[\alpha, \beta]$, в противном случае – на $[\alpha, \beta]$. Рис. 1 иллюстрирует данное свойство для точки минимума.

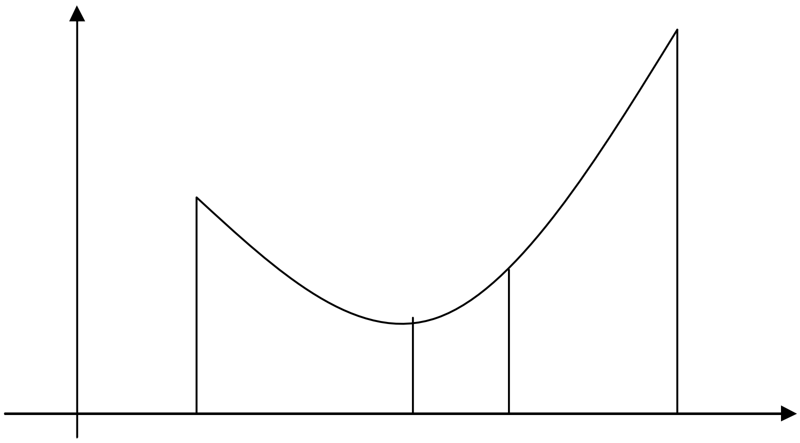


Рис. 1

Таким образом, алгоритм нахождения минимума сводится к определению точек α_{n-1}, β_{n-1} на отрезке $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ и переходу к отрезку $[a, b] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}]$. Счет заканчивают, когда $b_n - a_n$ станет меньше величины 2ε(ε -заданная точность), в качестве решения берут $x_{\text{экстр}} = (a_n + b_n)/2$.

В методе «золотого сечения» точки α и β определяют из условия (рис.2):

Рис. 2

$$\frac{\alpha - a}{b - a} = \frac{\beta - \alpha}{\beta - a} \qquad (1)$$

которое дает

$$\frac{\alpha - a}{b - a} = t = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx 0,3819661.$$

Отсюда легко определить точки α и β:

$$\alpha = a + t(b - a), \qquad \beta = b - t(b - a)$$

Методе «золотого сечения» является одним из наиболее экономичных, так как в силу условия (1) точка α отрезку $[a, b]$ совпадает с точкой «β» отрезка $[\alpha, \beta]$, а точка β отрезка $[a, b]$ с точкой «α»отрезка $[\alpha, b]$, что позволяет на каждом очередном отрезке вычислять только одно значение функции $f(x)$ (это необходимо учесть в программе).

Задание

1. Определить отрезки унимодальности для функции из работы № 9 и найти точные значения экстремумов.
2. Вычислить все экстремумы функции методом «золотого сечения» точностью 0,001.
3. Сравнить полученные значения с истинными .

Содержание отчета

1. Постановка задачи и краткое описание метода.
2. Точные значения экстремальных точек.
3. Результат работы программы.
4. Листинг программы.