УДК.517.928.977.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ В СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С КВАДРАТИЧНЫМ ФУНКЦИОНАЛОМ

ИМАНАЛИЕВ З.К., УМЕТАЛИЕВ М.У., АШИРБАЕВ Б.Ы.
Кыргызский государственный технический университет им.И.Раззакова, Бишкек. Кыргызская Республика.
Imanaliev@mail.ru

INTEGRAL MULTITUDE IN SINGULAR-RATED TASK OF CONTROL WITH SGUARE SUNCTIONALITY

IMANALIEV Z.K., UMETALIEV M.U., ASHIRBAEV B.Y.
Kyrgyz State Technikal University named after I. Razzakova. Kyrgyz Republic.
Imanaliev@mail.ru.

В данной работе предложен приближенный способ определения оптимального управления, который основан на разделении медленных и быстрых координатов вектора состояния на интегральном многообразии, что позволяет ограничиваться рассмотрением «укороченной» системы меньшей размерности вместо исходной системы, имеющей более высокий порядок.

Сформулируем следующую задачу оптимального управления: требуется найти r- мерную непрерывную вектор-функцию $u(t)$, доставляющую минимум функционалу

$$J(u) = d^* x(T,\mu) + c^* z(T,\mu) + \frac{1}{2}\int_0^T u^*(t) R u(t) dt \qquad (1)$$

на траекториях системы

$$\begin{aligned} &\dot{x} = A_1 x + A_2 z + B_1 u, \qquad x(0) = x_0, \quad x \in R^n, \\ &\mu\dot{z} = A_3 x + A_4 z + B_2 u, \qquad z(0) = z_0, \quad z \in R^m, \end{aligned} \qquad (2)$$

где

$\mu > 0$ − малый параметр, $T > 0$ − фиксированное число, $*$ − знак транспонирования, d, c − векторы с размерностью n, m, R − положительно определенная постоянная матрица с размерностью $m \times n$, $A_1 - (n \times n)$, $A_2 - (n \times m)$, $A_3 - (m \times n)$, $A_4 - (m \times m)$, $B_1 - (n \times r)$, $B_2 - (m \times r)$ − постоянные матрицы.

Интеграл в формуле (1) оценивает энергии управляющего воздействия затрачиваемого в процессе управления.

Предположим, что вещественные части корней матрицы A_4 отрицательные.

Гамильтониан для оптимальной задачи отыскания минимума энергетического потребления определяется следующим образом

$$H = \frac{1}{2}(u, Ru) + (p, A_1 x + A_2 z + B_1 u) + (q, A_3 x + A_4 z + B_2 u), \qquad (3)$$

где векторы p и q – решения сопряженной системы

$$\begin{aligned} &\dot{p} = -A_1^* p - A_3^* q, \\ &\mu\dot{q} = -A_2^* p - A_4^* q \end{aligned} \qquad (4)$$

и удовлетворяет граничным условиям

$$p(T,\mu) = -d, \qquad q(T,\mu) = -\frac{c}{\mu}. \qquad (5)$$

Условие

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0, \tag{6}$$

должно быть выполнено вдоль оптимальной траектории и означает

$$\frac{\partial H}{\partial u} = Ru + B_1^* p + B_2^* q = 0. \tag{7}$$

По предположению, корни характеристического уравнения матрицы A_4 имеют отрицательные вещественные части, тогда система (4) имеет пограничный слой, и для нее существует интегральное многообразие [1] $q = h(\mu)p$, где $h(\mu) - m \times n -$ мерная матрица элементы, которой обычно зависят от μ.

Матрица $h(\mu)$ удовлетворяет матричному уравнению

$$\mu h(A_1^* + A_3^* h) = A_2^* + A_4^* h. \tag{8}$$

Решение уравнение (8) можно построить в виде сходящегося степенного ряда [1]

$$h(\mu) = h_0 + h_1 \mu + h^2 \mu^2 + \dots \tag{9}$$

где

$$h_0 = -A_4^{*-1} A_2^*, \quad h_1 = A_4^{*-1} h_0 (A_1^* + A_3^* h_0), \dots$$

$$h_i = A_4^{*-1} \left(h_{i-1} A_1^* + \sum_{j=0}^{i-1} h_j A_3^* h_{-j-1+i} \right), \dots, \quad i = 1, 2, \dots$$

Замена $q = \eta + hp$ приводит систему (4) к виду:

$$\dot{p} = -(A_1^* + A_3^* h)p - A_3^* \eta, \quad p(T, \mu) = -d, \tag{10}$$

$$\mu \dot{\eta} = -(A_4^* - \mu h A_3^*)\eta, \quad \eta(T, \mu) = -\frac{c}{\mu} + hd = \eta_0.$$

Тогда решение системы (10) с начальными условиями (5) записывается в виде

$$p(t) = \overline{p}(t) + m_1(\tau), \qquad q(t) = h(\mu)\overline{p}(t) + m_2(\tau), \tag{11}$$

где

$\overline{p}(t) = e^{-\left(A_1^* + A_3^* h\right)(t-T)}\left(-d + \Delta p_0\right) -$ решение системы

$$\dot{\overline{p}} = -(A_1^* + A_3^* h)\overline{p}, \quad \overline{p}(T, \mu) = -d + \Delta p_0,$$

$$\Delta p_0 = \int_{-\infty}^{T} e^{-(A_1^* + A_3^* h)(T-s)} A_3^* e^{-(A_4^* - \mu h A_3^*)\frac{s-T}{\mu}} \eta_0 ds,$$

$$m_1 = \mu \int_{-\infty}^{T} e^{-(A_1^* + A_3^* h)(\tau - \sigma)} A_3^* e^{-(A_4^* - \mu h A_3^*)\sigma} \eta_0 d\sigma, \quad m_2 = e^{-\left(A_4^* - \mu h A_3^*\right)\tau} \eta_0.$$

Функции m_1 и m_2 удовлетворяют неравенствам:

$$\|m_1\| \le \mu C_1 \|\eta_0\| e^{\xi\tau}, \qquad \|m_2\| \le C_2 \|\eta_0\| e^{\xi\tau}, \tag{12}$$

где $C_1, C_2, \xi - const, \quad \tau = \dfrac{t-T}{\mu} \le 0.$

Если выбрать начальную точку $\left(-d, -\dfrac{c}{\mu}\right)$, принадлежащую интегральному многообразию $q = h(\mu)p$, то $\eta_0 = 0$, $m_1 = 0$, $m_2 = 0$ и, следовательно, $p = \overline{p}$, $q = h(\mu)\overline{p} -$ решение системы (4), траектория которого лежит на этом многообразии. Таким образом, для произвольной точки (p_0, q_0) мы указали такую точку $\left(p_0 = \overline{p}_0 + \Delta p_0, \overline{q}_0 = h(\mu)\overline{p}_0\right)$, лежащую на интегральном многообразии, $q = h(\mu)p$, что решение системы (4), выходящие из точки (p_0, q_0) при $t = T$ $(\tau = 0)$, неограниченно приближается к решению при $\tau \to -\infty$ $p = \overline{p}$, $q = h(\mu)\overline{p}$, $p(T) = p_0$, лежащему на этом многообразии. С учетом соотношений из (11) формула (7) записывается следующим образом:

$$u(t,\mu) = -R^{-1}\left(\overline{B}^{*} e^{-A_0^*(t-T)}\alpha_1 + \frac{1}{\mu}\overline{B}_2^{*} e^{-A_4^*\tau}\alpha_2\right) = \Psi(t,\mu), \tag{13}$$

где

$$\overline{B}_1^{*} = B_1^* + B_2^* h, \quad \overline{B}_2^{*} = B_2^* + \mu B_1^* A_3^* (A_4^* - \mu h A_3^*)^{-1} + O\left(\mu^2 e^{\theta\tau}\right), \quad (\theta > 0), \tag{14}$$

$$\alpha_1 = \alpha_1(\mu) = -d + \Delta p_0, \qquad \alpha_2 = -C + \mu h d, \quad \overline{A}_1^{*} = A_1^* + A_3^* h, \quad \overline{A}_4^{*} = A_4^* - \mu h A_3^*.$$

При $\mu \to 0$ имеем следующие предельные соотношения:

$$\lim \overline{B}_1 = B_0 = B_1 - A_2 A_4^{-1} B_2, \quad \lim \overline{B}_2 = B_2, \quad \lim \overline{A}_0 = A_0 = A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3,$$

$$\lim \overline{A}_4 = A_4, \quad \lim \alpha_1 = -d + A_3^* A_4^{*-1} C, \quad \lim \alpha_2 = C.$$

С учетом (13) система (2) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_1 x + A_2 z + \varphi_1, \qquad x(0,\mu) = x_0, \\ \mu\dot{z} &= A_3 x + A_4 z + \varphi_2, \qquad z(0,\mu) = z_0, \end{aligned} \tag{15}$$

где $\varphi_1 = B_1 \Psi$, $\varphi_2 = B_2 \Psi$, $\Psi(t,\mu)$ известная функция, определенная формулой (13).

В отличие от (4) система (15) имеет интегральное многообразие

$$z = K(\mu)x + \varpi(t,\mu), \tag{16}$$

движение по которому описывается системой

$$\dot{x} = (A_1 + A_2 K)x + A_3 \varpi + \varphi_1. \tag{17}$$

Матрица K и вектор ϖ являются решениями уравнений:

$$\begin{aligned} &\mu K(A_1 + A_2 K) = A_3 + A_4 K, \\ &\mu \frac{\partial \varpi}{\partial t} + \mu K(A_2 \varpi + \varphi_1) = A_4 \varpi + \varphi_2. \end{aligned} \tag{18}$$

Аналогично вышеуказанному уравнения (18) также имеют решения, которые могут быть представлены в виде сходящихся степенных рядов

$$K = K_0 + \mu K_1 + \ldots + \mu^n K_n + \ldots,$$

$$\varpi(t,\mu) = \varpi_0(t) + \mu\varpi_1(t) + \ldots + \mu^n \varpi_n(t) + \ldots.$$

Для функции входящие в правые части системы (15) можно записать конечные асимптотические разложения по степеням μ, коэффициенты которых однозначно определяются из соотношения (18) путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях μ.

Произведя в системе (15) замену

$$z = K(\mu)x + \varpi(t,\mu) + y, \tag{19}$$

можно разделить быстрые и медленные движения, перейдя к системе

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A_1 + A_2 K)x + A_2 \varpi + \varphi_1 + A_2 y, \qquad x(0,\mu) = x_0, \\ \mu\dot{y} &= (A_4 - \mu K A_2)y, \qquad y(0\mu) = z_0 - K x_0 - \varpi(0) = y_0. \end{aligned} \tag{20}$$

Аналогично, как это делалось выше для системы (4), решение системы (20) можно записать в форме (11).

Список использованной литературы:

1. З.К. Иманалиев. Метод интегральных многообразий в линейной сингулярно-возмущенной задаче оптимального управления с квадратичным функционалом //Компьютеры в учебном процессе и современные проблемы математики. Материалы IV Республиканской научно-методической конференции. – Бишкек, 1996.- Ч. 2. - С.191 –196.

2. В.В. Стрыгин, В.А. Соболев. Разделение движений методом интегральных многообразий. - Москва: Наука, 1988.- 256 с.

3. Е.И. Геращенко, С.И. Геращенко. Метод разделения движений и оптимизация нелинейных систем. – Москва: Наука, 1975. – 295 с.