УДК 517.95

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА ПО ФИНАЛЬНОМУ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЮ

Дурмонбаева З.А.

Институт горного дела и горных технологий им.акад. У.А.Асаналиева КГТУ им.И.Раззакова, г.Бишкек, Кыргызстан

Изучается вопрос об однозначной разрешимости обратной задачи определения правой части зависящим от пространственной переменной для нелинейного исевдопараболического уравнения при условии финального иереопределения.Найдены достаточные условия для локальной разрешимости рассматриваемой обратной задачи.

We study the unique solvability of the inverse problem of determining the right-hand side depends on the spatial variable for the nonlinear equation under the condition of pseudo-final pereopredeleniya.Naydeny sufficient conditions for the local solvability of the inverse problem.

Введение. В работе изучается вопрос об условиях однозначной разрешимости обратной задачи нахождения пары функций $\{u(x,t), f(x)\}$, удовлетворяющих нелинейному обобщенному уравнению Буссинеска

$$u_t(x,t) = \alpha(u^2(x,t))_{xx} + u_{xxt}(x,t) + f(x)h(x,t) + g(x,t),\ (x,t) \in Ц_T, \qquad (1)$$

начальному условию

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le l, \qquad (2)$$

условию Гурса

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u_x(0,t) = \mu_2(t),$$
$$0 \le t \le T, \qquad (3)$$

и условию финального переопределения

$$u(x,T) = u_1(x), \quad 0 \le x \le l, \qquad (4)$$

где

$$Ц_T = \{(x,t): 0 < x < l, t \in (0,T]\}.$$

Ранее обратные задачи определения правой части и коэффициента для линейного псевдопараболического уравнения с условием финального переопределения изучались в работах [1,2].

В настоящей работе исследуется вопрос об однозначной разрешимости обратной задачи (1)-(4). Получено условия, обеспечивающая локальную разрешимость рассматриваемой задачи.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Решением обратной задачи (1)-(4) называется пара функций $(u(x,t), f(x)) \in C^{2,1}(Ц_T) \cap C(\overline{Ц}_T) \times C[0,l]$, удовлетворяющая условиям (1)-(4).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $u_0(x) \in C^2[0,l], \quad \mu_1, \mu_2 \in C^1[0,T]$, $h, g \in C(\overline{Q}_T)$, $|h(x,t)| \ge h_0 > 0$ и выполнены условия согласования $u_0(0) = \mu_1(0)$,

$$u_0^{'}(0) = \mu_2(0), \quad u_1(0) = \mu_1(T), \quad u_1^{'}(0) = \mu_2(T)$$

. Тогда существует единственное решение задачи (1)-(4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приведем задачу (1)-(4) к прямой задаче. Интегрируя уравнение (1) по t от 0 до T, и учитывая условия (2),(3), получим

$$f(x) = \frac{1}{h_1(x)}[a(x) - \alpha \int_0^T (u^2)_{xx}(x,t)dt], \qquad (5)$$

где

$$a(x) = (u_1 - u_0) - (u_1^{''} - u_0^{''}) - \int_0^T g(x,t)dt, \quad h_1(x) = \int_0^T h(x,t)dt.$$

Подставив в (1) вместо $f(x)$ выражение (5), в результате получим нелинейное интегро-дифференциальное уравнение для функции $u(x,t)$:

$$u_t(x,t) = \alpha(u^2(x,t))_{xx} + u_{xxt}(x,t) + h_1(x,t)\int_0^T (u^2)_{xx}(x,t)dt + g_1(x,t), \qquad (6)$$

где

$$g_1(x,t) = \frac{a(x)h(x,t)}{h_0(x)} + g(x,t), \quad h_1(x,t) = -\frac{\alpha h(x,t)}{h_0(x)}$$

.

Обращая оператор $I - \partial^2 / \partial x^2$, и, произведя два раза интегрирование по частям, из условий (6),(3), получим

$$u_t + \alpha u^2 = \alpha \int_0^x sh(x-\xi)u^2(\xi,t)d\xi + \alpha h_1(x,t)\int_0^T u^2(x,t)dt +$$
$$+ \alpha \int_0^x \int_0^T (sh(x-\xi)h_1(\xi,t))_{\xi\xi} u^2(\xi,t)dtd\xi + g_2(x,t), \qquad (7)$$

где

$$g_2(x,t)=\mu_1'(t)chx+\mu_2'(t)shx+2\alpha shx\mu_1(t)\mu_2(t)+\int_0^x sh(x-\xi)g_1(\xi,t)d\xi+$$
$$+\alpha h_1(0,t)shx\int_0^T \mu_1(t)dt.$$

Интегрирование последнего уравнения при условии (2) дает

$$u(x,t)=\int_0^t\int_0^x K_1(x,\xi,\tau)u^2(\xi,\tau)d\xi d\tau+\int_0^x\int_0^T K_2(x,\xi,\tau)u^2(\xi,\tau)d\tau d\xi+$$
$$+\int_0^T K_3(x,t,\xi,\tau)u^2(x,\tau)d\tau-\alpha\int_0^t u^2(x,\tau)d\tau+\tilde g_2(x,t), \tag{8}$$

где

$$K_1(x,t,\xi)=\alpha tsh(x-\xi),\ K(x,t,)=\alpha\int_t^T h_1(x,\tau)d\tau,\quad K_3(x,t,\xi,\tau)=\alpha\int_\tau^T[sh(x-\xi)h_1(\xi,\tau)]_{\xi\xi}d\tau,$$

$$\tilde g_2(x,t)=\int_0^t g_2(x,\tau)d\tau+u_0(x).$$

Далее, следуя работе В.Г.Романова [3], покажем, что дляуравнение (8) имеет место принцип сжатых отображений. Уравнение (8) обладает малым параметром, роль которого играет число T в данном уравнении. Благодаря наличию этого параметра к уравнению (8) применим принцип сжатых отображений. Для этого уравнение (8) запишем в виде операторного уравнения

$$u=Au, \tag{9}$$

где

$$Au=\int_0^t\int_0^x K_1(x,\xi,\tau)u^2(\xi,\tau)d\xi d\tau+\int_0^T\int_0^x K_2(x,\xi,\tau)u^2(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$
$$+\int_0^T K_3(x,t,\xi,\tau)u^2(x,\tau)d\tau-\alpha\int_0^t u^2(x,\tau)d\tau.$$

В пространстве $C(\overline{Ц}_T)$ рассмотрим множество $m(T)$ функций $u(x,t)$,удовлетворяющих неравенству

$$\|u-\tilde g_2\|_C(T)\le\|\tilde g_2\|_C(T).$$

Покажем, что при достаточно малых T операторA осуществляет сжатое отображение множества $m(T)$ на себя. В самом деле, для $u\in m(T)$ справедливо неравенство

$$\|u\|_C(T)\le 2\|\tilde g_2\|_C(T).$$

С другой стороны, оценивая интегралы, входящие в уравнении (8), получим

$$\|Au-\tilde g_2\|_C\le\alpha T\left[1+\frac{\|h\|_{C_b}}{h_0}\right]\|u\|_C^2+\alpha T\|u\|_C^2\le 4\|\tilde g_2\|_C^2\max\left(\alpha T(1+\frac{\|h\|_C}{h_0}),\alpha T\right),$$

где функция $\tilde g_2(x,t)$ оценивается следующим образом:

$$\|\tilde g_2\|_C\le T\Big[\|\mu_1(t)-\mu_1(0)\|_C\|chx\|_C+\|\mu_2(t)-\mu_2(0)\|_C\|shx\|_C\Big]+2\alpha\|\mu_1\|_C\|\mu_2\|_C\|shx\|_C+$$
$$+\|g_1\|_C\|shx\|_C+\alpha\|h_1(0,t)\|_C\|\mu_1(t)\|_C\|shx\|_C].$$

Поэтому для

$$T\le T^*=1/\min[\ ],$$

операторAпереводит множество $m(T)$ в себя.

Пусть теперь u_1,u_2 - любые два элемента из множества $m(T)$ в себя, $T\le T^*$. Тогда используя очевидные неравенства

$$\left|u_1^2(x,t)-u_2^2(x,t)\right|\le\left|u_1(x,t)+u_2(x,t)\right|\cdot\left|u_1(x,t)-u_2(x,t)\right|\le 4N\left|u_1(x,t)-u_2(x,t)\right|$$

получим

Пусть теперь u_1, u_2 –любые два элемента из множества $m(T)$,

$T \le T^*$. Тогда имеем

$$\left\| Au_1 - Au_2 \right\|_{C_b} \le \left[\alpha T (1 + h_0^{-1} \|h\|_{C_b}) + \alpha T \right] \left\| u_1 + u_2 \right\|_{C_b} \left\| u_1 - u_2 \right\|_{C_b} \le$$

$$\le 4 \left[\alpha T (1 + h_0^{-1} \|h\|_C + \alpha T \right] \left\| \tilde{f}_1 \right\|_{C_b} \left\| u_1 - u_2 \right\|_{C_b} \le \frac{T}{T^*} \left\| u_1 - u_2 \right\|_{C_b}.$$

Отсюда вытекает, что при любом $T < T^*$ оператор A осуществляет сжатое отображение множества $m(T)$ на себя. Тогда в силу теоремы С.Банаха на множестве $m(T)$ существует и при том только одна неподвижная точка отображения, т.е. существует только одна решение уравнения (9). Следовательно, решая систему (5), (8) методом последовательных приближений, мы однозначно построим функции $u(x,t), f(x)$. Теорема 2 доказана.

Литература:

1. Аблабеков Б.С. Обратные задачи для псевдопараболических уравнений. - Бишкек: Илим, 2001. –183 с.
2. Атаманов Э.Р., Мамаюсупов О.Ш. Неклассические задачи для псевдопараболических уравнений. – Фрунзе: Илим, 1990. –101с.
3. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. –М.:Наука, 1984.-264с.