УДК 517. 977.5. 928.2

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ДЛЯ МАГНИТОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СИЛОВОГО ПРИВОДА

Аширбаев Бейшембек Ыбышевич, *к.ф.-м.н, доцент, профессор, Кыргызский государственный технический университет им. И. Раззакова, Кыргызстан, 720044, г. Бишкек, пр. Ч.Айтматова 66, e-mail: ashirbaev-58@mail.ru*

Апышова Гулбубу Жанболотовна, *аспирант, Кыргызский Национальный университет им. Ж. Баласагына, Кыргызстан, 720033, г.Бишкек, ул. Фрунзе 547, e-mail: cholpon.zhanbolotova@mail.ru*

Аннотация. Рассматривается задача оптимального быстродействия для сингулярно-возмущенной управляемой системы, объектом управления которой, является магнитоэлектрический силовой привод. Использование метода разделения движений исходной системы позволяет получить эквивалентную управляемую систему, у которой разделены медленные и быстрые переменные состояния. Для решения задачи использован Принцип максимума Понтрягина.

Ключевые слова: задача оптимального быстродействия, сингулярно-возмущенная управляемая система, магнитоэлектрический силовой привод.

ON ONE METHOD FOR SOLVING THE PROBLEM OF OPTIMAL SPEED FOR A MAGNETOELECTRIC POWER DRIVE

Ashirbaev Beishembek Ybyshevich*, Candidate of Physical and Mathematical Sciences Associate Professor, Kyrgyz State Technical University named after Iskhak Razzakov, Kyrgyzstan, 720044, Bishkek, Chyngyz Aitmatov Avenue 66, e-mail: ashirbaev-58 @ mail.ru*

Apishova Gulbubu Zhanbolotovna, *postgraduate student, Kyrgyz National University named after Zhusup Balasagyn, Kyrgyzstan, 720033, Bishkek, Frunze street 547, e-mail: cholpon.zhanbolotova@mail.ru*

Abstract. The problem of optimal response is considered for a singularly perturbed controlled system, the control object of which is a magnetoelectric power drive. Using the method of separation of motions of the original system allows one to obtain an equivalent controlled system, in which slow and fast state variables are separated. The Pontryagin Maximum Principle is used to solve the problem.

Key words: optimal speed problem, singularly perturbed controlled system, magnetoelectric power drive.

Постановка задачи

Рассмотрим математическую модель линейного магнитоэлектрического силового привода [1-3]

$$u(t) = I(t)R + L\dot{I}(t) + K_e v(t), \quad m\dot{v}(t) + \varepsilon v(t) = K_F I(t), \tag{1}$$

где $u = u(t)$ −входное напряжение, $I = I(t)$ −сила тока в катушке, L −индуктивность катушки, предполагается индуктивность катушки малой, R −сопротивление, $E = K_e v(t)$ − противо ЭДС, m −масса нагрузки включая катушку и вал, ε −коэффициент вязкого трения, $F = K_F I$ −действующая сила привода (сила Лоренца), $x = x(t)$ −перемещение движущейся части, $v = v(t) = \dot{x}(t)$ −линейная скорость.

Введем замены: $x = x_1,\ v = x_2,\ I = z, L = \mu$ − малый параметр, $0 < \mu \leq 1$. Тогда система (1) имеет вид

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\frac{\varepsilon}{m}x_2 + \frac{\sigma_1}{m}z, \quad \mu\dot{z} = -\sigma_2 x_2 - Rz + bu, \tag{2}$$

где σ_1,σ_2 – электромеханические константы взаимодействия, u −оптимальное управление, $|u| \leq u_{max}$.

Требуется перевести систему (1) из начального положения

$$x_1(0) = x_1^0,\ x_2(0) = x_2^0,\ z(0) = z^0 \tag{3}$$

в начало координат, за минимальное время.

Решение задачи

Рассмотрим второе и третье уравнение системы (2)

$$\dot{x}_2 = -\frac{\varepsilon}{m}x_2 + \frac{\sigma_1}{m}z, \tag{4}$$
$$\mu\dot{z} = -\sigma_2 x_2 - Rz + bu.$$

Сингулярно-возмущенную систему (4) перепишем в следующей нормальной форме

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + bu(t), \tag{5}$$

где $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} x_2 \\ z \end{pmatrix}$, $a_1 = -\frac{\varepsilon}{m}$, $a_2 = \frac{\sigma_1}{m}$, $a_3 = -\frac{\sigma_2}{\mu}$, $a_4 = -\frac{R}{\mu}$, $b_1 = 0$, $b_2 = \frac{b}{\mu}$.

Как показано в [4] систему (5) заменим эквивалентной системой, у которой разделены медленные $x_2(t)$ и быстрые $z(t)$ составляющие вектора состояния. Для этого введем замены переменных

$$x_2 = \tilde{x}_2 - \mu N\tilde{z}, \quad \tilde{z} = z - Hx_2, \tag{6}$$

где H и N определяются из уравнения:

$$\mu H(a_1 + a_2 H) = a_3 + a_4 H, \tag{7}$$
$$\mu(a_1 N + a_2 HN + NHa_2) = a_3 + Na_4. \tag{8}$$

Эквивалентная система к системе (5) имеет вид

$$\dot{\tilde{y}}(t) = \tilde{A}\tilde{y}(t) + \tilde{B}u(t), \tag{9}$$

где $\tilde{y} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_2 \\ \tilde{z} \end{pmatrix}$, $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{a}_4 \end{pmatrix}$, $\tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \end{pmatrix}$, $\tilde{a}_1 = a_1 + a_2 H$, $\tilde{a}_4 = a_4 + \mu Ha_2$, $\tilde{b}_1 = b_1 + N\tilde{b}_2$, $\tilde{b}_2 = b_2 - \mu Hb_1$.

Теперь сформулируем задачу (2), (3) следующим образом: требуется перевести систему (9) из начального состояния

$$\tilde{y}(0) = \tilde{y}^0, \tag{10}$$

в конечное состояние

$$\tilde{y}(T^*) = \tilde{y}^1, \tag{11}$$

где $\tilde{y}^i = (\tilde{x}_2^i \quad \tilde{z}^i)'$, $\tilde{x}_2^i = x_2^i + \mu N\tilde{z}^i$, $\tilde{z}^i = z^i - Hx_2^i$, $i = 0, 1$, при этом функционал

$$I = \int_0^{T^*} dt \tag{12}$$

принимал наименьшее возможное значения, где момент окончания процесса T^* не задан и подлежит определению.

Для решения задачи используем алгоритм «Принципа максимума».

1. Составляем гамильтониан:

$$H(t,\psi,x,u) = \psi_1(\tilde{a}_1\tilde{x}_2 + \tilde{b}_1 u) + \psi_2(\tilde{a}_4\tilde{z} + \tilde{b}_2 u) - 1.$$

2. Находим условный максимум гамильтониана по управлению

$$u^*(t) = arg\max_{|u|\le 1} H(t,\psi,x,u) = sign(\psi_1\tilde{b}_1 + \psi_2\tilde{b}_2).$$

3. Составляем канонические уравнения принципа максимума:

$$\dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{a}_1\tilde{x}_2 + sign(\psi_1\tilde{b}_1^2 + \psi_2\tilde{b}_2), \ \ \tilde{x}_2(0) = \tilde{x}_2^0, \ \ \tilde{x}_2(T^*) = \tilde{x}_2^1, \tag{13}$$
$$\dot{\tilde{z}} = \tilde{a}_4\tilde{z} + sign(\psi_1\tilde{b}_1 + \psi_2\tilde{b}_2^2), \quad \tilde{z}(0) = \tilde{z}^0, \quad \tilde{z}(T^*) = \tilde{z}^1,$$
$$\dot{\psi}_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial \tilde{x}_2} = -\psi_1\tilde{a}_1,$$
$$\dot{\psi}_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial \tilde{z}} = -\psi_2\tilde{a}_4,$$
$$[\delta F - H(t)\delta t + \psi_1\delta\tilde{x}_2 + \psi_2\,\delta\tilde{z}]\,\Big|_{t=T^*} = 0,$$

где $\delta F = 0$. Так как время окончания T^*не задан, $\tilde{x}_2(T^*)$, $\tilde{z}(T^*)$ заданы, то вариация δt произвольна, а $\delta\tilde{x}_2 = 0$, $\delta\tilde{z} = 0$. Поэтому из условия трансверсальности следует

$$H(T^*) = H\big(T^*, \psi(T^*), \tilde{x}_2(T^*), \tilde{z}(T^*)\, u(T^*)\big) = 0.$$

Из краевой задачи (13), решая систему

$$\dot{\psi}_1(t) = -\psi_1\tilde{a}_1, \quad \dot{\psi}_2(t) == -\psi_2\tilde{a}_4$$

получаем

$$\psi_1(t) = e^{-\tilde{a}_1 t} + C_1, \tag{14}$$
$$\psi_2(t) = e^{-\tilde{a}_4 t} + C_2,$$
$$u^*(t) = sign\Big(\big(e^{-\tilde{a}_1 t} + C_1\big)\tilde{b}_1 + \big(e^{-\tilde{a}_4 t} + C_2\big)\tilde{b}_2\Big). \tag{15}$$

Функция (15) меняет знак не более одного раза, поэтому оптимальное управление $u^*(t)$ имеет не более двух интервалов знакопостоянства. На одном интервале $u = u_{max}$, а на другом $u = -u_{max}$.

Теперь находим время $T^* = t_1 + t_2$ затрачиваемое на переход из точки $(\tilde{x}_2^0; \tilde{z}^0)$ в точку $(\tilde{x}_2^1; \tilde{z}^1)$, где $t_1 -$ время движения с управлением $u = u_{max}$ до точки переключения, $t_2 -$ время движения с управлением $u = -u_{max}$.

Объект управления описывается на первом интервале системой

$$\dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{a}_1\tilde{x}_2 + \tilde{b}_1 u_{max}, \quad (16)$$

$$\dot{\tilde{z}} = \tilde{a}_4\tilde{z} + \tilde{b}_2 u_{max}.$$

Решения системы (16) имеют вид:

$$\tilde{x}_2(t) = -\frac{\tilde{b}_1 u_{max}}{\tilde{a}_1} + C_1 e^{\tilde{a}_1 t}, \quad \tilde{z}(t) = -\frac{\tilde{b}_2 u_{max}}{\tilde{a}_4} + C_2 e^{\tilde{a}_4 t}. \quad (17)$$

При $t = 0$ из (17) получаем

$$C_1 = \tilde{x}_2^0 + \frac{\tilde{b}_1 u_{max}}{\tilde{a}_1}, \quad C_2 = \tilde{z}^0 + \frac{\tilde{b}_2 u_{max}}{\tilde{a}_4}, \text{ тогда}$$

$$\tilde{x}_2(t) = -\frac{\tilde{b}_1 u_{max}}{\tilde{a}_1} + \left(\tilde{x}_2^0 + \frac{\tilde{b}_1 u_{max}}{\tilde{a}_1}\right) e^{\tilde{a}_1 t}, \quad (18)$$

$$\tilde{z}(t) = -\frac{\tilde{b}_2 u_{max}}{\tilde{a}_4} + \left(\tilde{z}^0 + \frac{\tilde{b}_2 u_{max}}{\tilde{a}_4}\right) e^{\tilde{a}_4 t}.$$

Объект управления описывается на втором интервале системой

$$\dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{a}_1\tilde{x}_2 - \tilde{b}_1 u_{max}, \quad (19)$$

$$\dot{\tilde{z}} = \tilde{a}_4\tilde{z} - \tilde{b}_2 u_{max}.$$

Решения системы (19) с начальными условиями $\tilde{x}_2(t_1)$ и $\tilde{z}(t_1)$ записываем в виде:

$$\tilde{x}_2(t) = e^{\tilde{a}_1 t}\tilde{x}_2(t_1) - \tilde{b}_1 u_{max}\int_0^t e^{\tilde{a}_1 \tau} d\tau,$$

$$\tilde{z}(t) = e^{\tilde{a}_4 t}\tilde{z}(t_1) - \tilde{b}_2 u_{max}\int_0^t e^{\tilde{a}_4 \tau} d\tau$$

или

$$\tilde{x}_2(t) = e^{\tilde{a}_1 t}\tilde{x}_2(t_1) + \frac{\tilde{b}_1 u_{max}}{\tilde{a}_1}\left(1 - e^{\tilde{a}_1 t}\right), \quad (20)$$

$$\tilde{z}(t) = e^{\tilde{a}_4 t}\tilde{z}(t_1) + \frac{\tilde{b}_2 u_{max}}{\tilde{a}_4}\left(1 - e^{\tilde{a}_4 t}\right).$$

В конечный момент времени $T^* = t_1 + t_2$ оптимальные траектории $\tilde{x}_2(t)$ и $\tilde{z}(t)$ должны попасть в точку $(\tilde{x}_2^1; \tilde{z}^1)$:

$$\tilde{x}_2(t_1 + t_2) = e^{\tilde{a}_1(t_1+t_2)}\tilde{x}_2(t_1) + \frac{\tilde{b}_1 u_{max}}{\tilde{a}_1}\left(1 - e^{\tilde{a}_1(t_1+t_2)}\right),$$

$$\tilde{z}(t_1 + t_2) = e^{\tilde{a}_4(t_1+t_2)}\tilde{z}(t_1) + \frac{\tilde{b}_2 u_{max}}{\tilde{a}_4}\left(1 - e^{\tilde{a}_4(t_1+t_2)}\right),$$

откуда

$$\tilde{x}_2(t_1) = \frac{\tilde{b}_1 u_{max}}{\tilde{a}_1} - \frac{\tilde{b}_1 u_{max}}{\tilde{a}_1} e^{-\tilde{a}_1(t_1+t_2)}, \quad (21)$$

$$\tilde{z}(t_1) = \frac{\tilde{b}_2 u_{max}}{\tilde{a}_4} - \frac{\tilde{b}_2 u_{max}}{\tilde{a}_4} e^{-\tilde{a}_4(t_1+t_2)}.$$

В силу непрерывности траектории при $t = t_1$ с учетом (18) и (21) имеем:

$$-\frac{\tilde{b}_1 u_{max}}{\tilde{a}_1} + \left(\tilde{x}_2^0 + \frac{\tilde{b}_1 u_{max}}{\tilde{a}_1}\right) e^{\tilde{a}_1 t_1} = \frac{\tilde{b}_1 u_{max}}{\tilde{a}_1} - \frac{\tilde{b}_1 u_{max}}{\tilde{a}_1} e^{-\tilde{a}_1(t_1+t_2)}, \quad (22)$$

$$-\frac{\tilde{b}_2 u_{max}}{\tilde{a}_4} + \left(\tilde{z}^0 + \frac{\tilde{b}_2 u_{max}}{\tilde{a}_4}\right) e^{\tilde{a}_4 t_1} = \frac{\tilde{b}_2 u_{max}}{\tilde{a}_4} - \frac{\tilde{b}_2 u_{max}}{\tilde{a}_4} e^{-\tilde{a}_4(t_1+t_2)}.$$

Из (22) следует следующая система для определения t_1 и t_2

$$t_2 = -\frac{1}{\tilde{a}_1} ln\left(\frac{\tilde{x}_2^0\tilde{a}_1 + \tilde{b}_1 u_{max}}{\tilde{b}_1 u_{max}} e^{2\tilde{a}_1 t_1} - 2e^{\tilde{a}_1 t_1}\right), \quad (23)$$

$$\frac{(\tilde{a}_4\tilde{z}^0 + \tilde{b}_2 u_{\max})e^{2\tilde{a}_4 t_1} - 2\tilde{b}_2 u_{max} e^{\tilde{a}_4 t_1}}{\tilde{b}_2 u_{max}} = -\left(\frac{\tilde{x}_2^0\tilde{a}_1 + \tilde{b}_1 u_{max}}{\tilde{b}_1 u_{max}} e^{2\tilde{a}_1 t_1} - 2e^{\tilde{a}_1 t_1}\right)^{\frac{\tilde{a}_1}{\tilde{a}_4}}.$$

Из системы определяются t_1 и t_2, следовательно минимальное время $T^* = t_1 + t_2$ затрачиваемое на переход из точки $(\tilde{x}_2^0; \tilde{z}^0)$ в точку $(\tilde{x}_2^1; \tilde{z}^1)$.

Заключение

В данной статье динамика линейного магнитоэлектрического силового привода описывается системой дифференциальных уравнений, содержащей малый параметр при части производных. Декомпозиция исходной системы на медленные и быстрые подсистемы позволяет понизить размерность данной системы и устранять вычислительную жесткость.

Список литературы

1. Brown C. J. Time-optimal Control of a Noving-Coil Linear Actuator // C. J. Brown, J.T. Mo //IBM J. Re S. Develop. – 1968. – 372 – 379.
2. Novotny, D.W. Vektor Control fnd Dynamics of AC Drivers / D.W. Novotny, T.A. Lipo. - New York: Oxford, 1996.
3. Chrisiansen, B. Control of a Voice-Coil-Motor with Coulombic Friction /B Chrisiansen, H. Maurer, O. Zim //Proceedings of the 47 th IEEE Conference on Decision and Control, Cancun, Mexico, 2008. – P. 1557-1562. DOL: 10.1109/CDC.2008.4739025.
4. Иманалиев, З.К. Разделение движений сингулярно-возмущенной управляемой системе /З.К. Иманалиев, Б.Ы. Аширбаев //Исслед. по интегро-дифф. уравнениям. – 2007, Бишкек: Илим. - Вып. 36. - С.136 –141.
5. Айдарова, А. Р. Компьютерное моделирование для изучения дополнительных причин потерь в электрических сетях / А. Р. Айдарова // Известия Кыргызского государственного технического университета им. И. Раззакова. – 2014. – № 32-1. – С. 176-181.