УДК 517.958

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ НАЧАЛЬНЫХ И КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

АБЛАБЕКОВ Б.С., КУРМАНБАЕВА А.К.
Институт горного дела и горных технологий им. У.Асаналиева
izvestiya@ktu.aknet.kg

Изучается начальные и краевые задачи для уравнения фильтрации жидкости в трещиновато-пористой среде.

Рассмотрим два варианта задачи Коши на полупрямой, различающихся граничными условиями в точке x=0.

Пусть $Q_T^+ = \{(x,t) : x \in R^+, t \in (0,T]\}$.

Задача 1. Найти функцию $u(x,t)$, определенную при $(x,t) \in C_{M_\gamma}(Q_T^+)$, удовлетворяющую в классическом смысле уравнению

$$Lu \equiv \frac{\partial}{\partial t}\left[u_{xx} - u\right] + u_{xx} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T^+, \tag{1}$$

начальному

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{R}^+, \tag{2}$$

и граничному условию

$$u(0,t) = \mu(t), \quad 0 \le t \le T. \tag{3}$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $u_0(x) \in C_{M_\gamma}^{(2)}(\overline{R}^+)$, $f(x,t) \in C_{M_\gamma}^{(0,0)}(\overline{Q}_T^+)$ при γ<1-T, кроме того, $\mu(t) \in C^1([0,T])$ и выполнены условия согласования $u_0(0) = \mu(0) = 0, \quad f(0,t) = 0$. Тогда существует единственное классическое решение задачи 1, принадлежащее $C_{M_\gamma}^{(2,1)}(Q_T^+)$. Это решение имеет вид

$$\begin{aligned} u(x,t) = &\int_0^t \int_0^\infty (Z(x+\xi, t-\tau) + Z(x-\xi, t-\tau)) f(\xi,\tau) d\xi d\tau + \\ &+ \int_0^\infty Z(x+\xi,t) + Z(x-\xi,t) L_1[u_0](\xi) d\xi + \mu(t)\frac{\partial Z}{\partial x}(x,t) + \\ &+ \int_0^t \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) Z(x, t-\tau)\mu(\tau) d\tau, \end{aligned} \tag{4}$$

где

$E(x,t) = \theta(t) Z(x,t)$ – фундаментальное решение оператора L.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. После четного продолжения функции $f(x,t)$, $u_0(x)$ по x при $x < 0$ и продолжения функции $f(x,t)$, $\mu(t)$ нулем при $t < 0$ задачу 2 можно записать в виде

$$\begin{aligned} &Lv \equiv \frac{\partial}{\partial t}\left[v_{xx} - v\right] + v_{xx} = \Phi(x,t), \quad (x,t) \in R^2, \\ &v\big|_{t<0} = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$\Phi(x,t)=\theta(t)f(x,t)+L_1[u_0](x)\delta(t)+\theta(t)\left(\frac{\partial}{\partial t}+I\right)\mu(t)\delta'(x).$$

Из задачи (5) имеем

$$v(x,t)=E(x,t)*[\theta(t)f(x,t)+L_1[u_0](x)\delta(t)+\theta(t)(\frac{\partial}{\partial t}+I)\mu(t)\delta^{'}(x)].$$

Так как

$$E(x,t)*\theta(t)f(x,t)=\int\limits_{R^2}E(x-\xi,t-\tau)\theta(\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau=$$

$$=\int\limits_0^t\int\limits_R Z(x-\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau=\int\limits_0^t[\int\limits_{-\infty}^0 Z(x-\xi,t-\tau)f(-\xi,\tau)d\xi+$$

$$+\int\limits_0^\infty Z(x-\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi]d\tau=\int\limits_0^t\int\limits_0^\infty[Z(x+\xi,t-\tau)+Z(x-\xi,t-\tau)]d\xi d\tau,$$

$$E(x,t)*L_1[u_0](x)\delta(t)=<\int\limits_R E(x-\xi,t-\tau)L_1[u_0](\xi)d\xi,\delta(t)>=$$

$$=\int\limits_R E(x-\xi,t-\tau)L_1[u_0](\xi)d\xi=\int\limits_{-\infty}^0 Z(x-\xi,t)L_1[u_0](-\xi)d\xi+$$

$$+\int\limits_0^\infty Z(x-\xi,t)L_1[u_0](\xi)d\xi=\int\limits_0^\infty[Z(x+\xi,t)+Z(x-\xi,t)]L_1[u_0](\xi)d\xi,$$

$$E(x,t)*(\frac{\partial}{\partial t}+I)\mu(t)\delta^{'}(x)=\frac{\partial E}{\partial x}*(\frac{\partial}{\partial t}+I)\mu(t)\delta(x)=$$

$$=<\int\limits_R\frac{\partial E}{\partial x}(x-\xi,(t-\tau)(\frac{\partial}{\partial\tau}+I)\theta(\tau)\mu(\tau)d\tau,\delta(x)>=\int\limits_0^t\frac{\partial Z(x,t-\tau)}{\partial x}(\frac{\partial}{\partial\tau}+I)\mu(\tau)d\tau=$$

$$=\frac{\partial Z(x,t)}{\partial x}\mu(t)+\int\limits_0^t(\frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial\tau}+\frac{\partial Z}{\partial x})(x,t-\tau)\mu(\tau)d\tau,$$

то, положив $v(x,t)=\theta(t)u(x,t)$ из последнего выражения, получим формулу (14). Далее, как и в [1], можно показать, что при выполнении условий теоремы 1 полученное решение является классическим решением задачи 2.

Теорема 1 доказана.

ЗАДАЧА 2. Эта задача формулируется аналогично задаче 2 заменой граничного условия $u(0,t)=\mu(t)$ на следующее

$$B[u](0,t)=\left(\frac{\partial}{\partial t}+I\right)u_x(0,t)=\mu_1(t),\quad 0\le t\le T.$$

Заметим, что при выполнении условий согласования $\mu_1(0)=u_0^{'}(0)=0$ последнее условие можно переписать в виде $u_x(0,t)=\mu_2(t).$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $u_0(x)\in C^{(2)}_{M_\gamma}(\overline{R}^+)$, $f(x,t)\in C^{(1,0)}_{M_\gamma}(\overline{Q}^+_T)$ при

$\gamma<1-T$, кроме того, $\mu_1(t)\in C([0,T])$ и выполнены условия согласования $u_0^{'}(0)=\mu_1(0)=0,\ f_x(0,t)=0.$ Тогда существует единственное классическое решение задачи 3, принадлежащее $C_{M_\gamma}^{(2,1)}(Q_T^+)$. Это решение имеет вид

$$u(x,t)=\int_0^t\int_0^\infty (Z(x-\xi,t-\tau)-Z(x+\xi,t-\tau))f(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$

$$+\int_0^\infty (Z(x-\xi,t)-Z(x+\xi,t))L_1[u_0](\xi)d\xi+ \tag{6}$$

$$+\int_0^t Z(x,0,t-\tau)\mu_1(\tau)d\tau.$$

Доказательство теоремы 1.3.5 проводится так же, как теоремы 1.с нечетным продолжением функции $u_0(x)$, $f(x,t)$ на полуось $x<0$ и продолжением функции $f(x,t)$, $\mu_1(t)$ нулем при $t<0$.

Задача Гурса. Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую уравнению

$$u_{xxt}+u_{xx}-u_t=f(x,t)\quad R_{++}^2=\{(x,t)x>0,t>0\}, \tag{7}$$

начальному условию

$$u(x,0)=u_0(x),\quad x\ge 0, \tag{8}$$

и условиям Гурса

$$u(0,t)=\mu_1(t),\quad t\ge 0,\qquad u_x(0,t)=\mu_2(t),\quad t\ge 0. \tag{9}$$

Справедлива

теорема 3. Пусть выполнены

$f(x,t)\in C(\overline{R_{++}^2}),\quad u_0(x)\in C^2(x\ge 0),\ \mu_1(t),\mu_2(t)\in C^1(t\ge 0),$ кроме того, $u_0(0)=\mu_1(0),\quad u_0(0)=\mu_2(0)$, тогда задача Гурса (8)-(9) имеет единственное решение и имеет вид

$$u(x,t)=\int_0^t\int_0^x Z(x-\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau+\int_0^x u_0(\xi)(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-I)Z(x-,t)d\xi$$

$$+[\mu_2(t)shx+\int_0^t \mu_2(\tau)(\frac{\partial}{\partial\tau}+I)Z(x,t-\tau)d\tau]+ \tag{10}$$

$$+[\mu_1(t)chx+\int_0^t \mu_1(\tau)\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\right)Z(x,t-\tau)d\tau]-u_0(0)Z(x,t)+u_0(x)e^{-t}-u_0(0)\frac{\partial Z(x,t)}{\partial x}.$$

Доказательство. Предположим, что искомое решение задачи (7)-(9) существует. Введем обобщенные функции

$$U(x,t)=\begin{cases}u(x,t), & если\quad (x,t)\in R_{++}^2;\\ 0, & если\quad (x,t)\in \bar{R}_{++}^2;\end{cases}$$

$$F(x,t)=\begin{cases}f(x,t), & если\quad (x,t)\in R_{++}^2;\\ 0, & если\quad (x,t)\in \bar{R}_{++}^2;\end{cases}$$

Тогда задача Гурса приводится в D' к уравнению

$$U_{xxt} + U_{xx} - U_t = \Phi(x,t), \qquad (11)$$

где

$$\Phi(x,t) = F(x,t) + \left(\frac{\partial}{\partial t} + I\right)[\mu_2(t)\delta(x) + \mu_1(t)\delta^{-1}(x)] + (u_0''(x) - u_0(x))\delta(t) \qquad (12)$$

Так как носители функций $\Phi(x,t)$ и $\varepsilon(x,t)$ ограничены с одной и той же стороны, то свертка

$$U(x,y) = \Phi(x,t) * \varepsilon(x,t) \qquad (13)$$

существует и является единственным в $D'(R^2)$ решением уравнения (11).
Вычислив свертку (13) и положив

$$U(x,t) = \theta(x,t)u(x,t),$$

получим для $u(x,t)$ формулу (10). Нетрудно показать, что в условиях теоремы функция $u(x,t)$, определенная равенством (10), является классическим решением задачи (7)-(9).

Начально-краевая задача. Найти классическое решение уравнения

$$u_{xxt} + u_{xx} - u_t = f(x,t) \qquad (x,t) \in \Omega = \{(x,t) \quad 0 < x < 1, \quad t > 0\} \qquad (14)$$

при начальным условиям

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le 1, \qquad (15)$$

и граничных условиях

$$u(0,t) = \nu_1(t), \quad t \ge 0, \; u(1,t) = \nu_2(t), \quad t \ge 0. \qquad (16)$$

Справедлива

теорема 4. Пусть выполнены следующие условия:

а) $u_0(x) \in C^2[0,1], \quad \nu_1(t), \nu_2(t) \in C^1(t \ge 0),$
$f(x,t) \in C(\Omega),$

б) $u_0(0) = \nu_1(0), \quad u_0(1) = \nu_2(0),$

Тогда классическое решение задачи (14)-(16) существует, единственно и представляется формулой (10), в которой функция

$$\mu_2(t) = e^{-t}\varphi(t),$$

где функция $\varphi(t)$ является решением интегрального уравнения

$$\varphi(t) + \int_0^t C_1(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau = g(t).$$

Здесь

$$C_1(t) = \frac{1}{sh1}\sum_{k=1}^{\infty} L_k^1(t)\frac{1}{(2k+1)!}$$

Доказательство этой теоремы следует из теоремы 1 и 3.

Замечание. В работе [1,2] изучены задача Коши для двумерного уравнения фильтрации жидкости в трещиновато-пористой среде.

Литература

1. Б.С. Аблабеков. Обратные задачи для псевдопараболичесих уравнений. -Бишкек: Илим 2001. – 182 с.
2. Б.С. Аблабеков. Фундаментальное решение и задачи Коши для двумерного уравнения фильтрации жидкости в трещиновато-пористой среде // Известия КГТУ им. И.Раззакова, №19, Бишкек. 2009.- С.98-101.

3. Б.С. Аблабеков. Начально-краевая задача для двумерного уравнения фильтрации жидкостей в трещиновато-пористой среде на неограниченном канале// Исслед.по и.-д.у. Бишкек: Илим. 2009 г. Вып. 41. с.165-169.