УДК 517.968.28

ЕДИНСТВЕННОСТИ И ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

З.А. Каденова

Исследована единственность решений систем линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными в неограниченных областях, в которых оператор, порожденный ядрами, не является компактным оператором.

Ключевые слова: линейные интегральные уравнения первого рода с двумя независимыми переменными; единственность.

UNIQUENESS AND STABILITY OF SOLUTIONS SYSTEMS OF THE LINEAR INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND WITH TWO INDEPENDENT VARIABLES IN UNLIMITED AREAS

Z.A. Kadenova

It is devoted to the study of the uniqueness of solutions systems of the linear integral equations of the first kind with two independent variables in which the operator generated by the kernel, is not compact operator.

Keywords: linear integral equations of the first kind with two independent variables; uniqueness.

Постановка задачи. В настоящей статье на основе метода неотрицательных квадратичных форм для систем линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными в неограниченных областях доказаны теоремы единственности и получены оценки устойчивости.

Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{aligned} Ku \equiv & \int_a^b K(t,x,y)u(t,y)dy + \int_{t_0}^{\infty} H(t,x,s)u(s,x)ds + \int_{t_0}^{\infty}\int_a^b C(t,x,s,y)u(s,y)dyds = \\ & = f(t,x),\ (t,x)\in G,\ G=\left\{(t,x)\in R^2 : t_0 \le t<\infty,\ a\le x\le b\right\}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $K(t,x,y)=\begin{cases} A(t,x,y),\ t_0\le t<\infty, & a\le y\le x\le b; \\ B(t,x,y),\ t_0\le t<\infty, & a\le x\le y\le b, \end{cases}$ (2)

$$H(t,x,s)=\begin{cases} M(t,x,s),\ t_0\le s\le t<\infty, & a\le x\le b; \\ N(t,x,s),\ t_0\le t\le s<\infty, & a\le x\le b, \end{cases} \tag{3}$$

$A(t,x,y)$, $B(t,x,y)$, $M(t,x,s)$, $N(t,x,s)$, $C(t,x,s,y)$ – известные n×n-мерные самосопряженные матричные функции, определенные соответственно в области

$$G_1=\left\{(t,x,y):\quad t_0\le t<\infty,\quad a\le y\le x\le b\right\};$$

$$G_2=\left\{(t,x,y):\quad t_0\le t<\infty,\quad a\le x\le y\le b\right\};$$

$$G_3=\left\{(t,x,s):\quad t_0\le s\le t<\infty,\quad a\le x\le b\right\};$$

$$G_4=\{(t,x,s):\quad t_0\le t\le s<\infty,\quad a\le x\le b\};$$
$$G_5=\{(t,x,s,y):\quad t_0\le s\le t<\infty,\quad a\le y\le x\le b\}.$$

f(t,x) – известная, *u(t,x)* – неизвестная *n*-мерные вектор-функции.

Основополагающие результаты для интегральных уравнений Фредгольма первого рода получены в [1, 2], где для решения линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву. Единственность решения для одного класса интегральных уравнений Фредгольма первого рода рассмотрена в [3]. В данной работе исследуется единственность решения системы уравнений (1) в классе $L_2(G)$.

Введем следующие обозначения:

1. Совокупность всех матриц, действующих в R^n обозначим M, < . , . > – скалярное произведение в R^n, $\|A\|$, $\|u\|$ – нормы соответственно n×n-мерной матрицы $A=(a_{ij})\in M$ и *n*-мерного вектора *u*, т. е. для любых $u=(u_1,u_2,...,u_n)$, $\vartheta=(\vartheta_1,\vartheta_2,...,\vartheta_n)\in R^n$.

$$\langle u,\vartheta\rangle=u_1\vartheta_1+u_2\vartheta_2+...+u_n\vartheta_n,$$

$$\|u\|=\sqrt{\langle u,u\rangle},\quad \|A\|=\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}\right)^2\right)^{1/2};$$

2. $L_{2,n}(G)$ – пространство n-мерных векторов с элементами из $L_2(G)$, $\|\cdot\|_{L_2}$ – норма в $L_{2,n}(G)$, т. е. для любого $u(t,x)\in L_{2,n}(G)$

$$\|u(t,x)\|_{L_2}=\left(\int_{t_0}^{\infty}\int_a^b\|u(t,x)\|^2dxdt\right)^{\frac12};$$

3. $L_2\left(\left(G^2\right);M\right)$ – пространство n×n-мерных матриц с элементами из $L_2(G^2)$, $\|\cdot\|_{L_2}$ – норма в $L_2\left(\left(G^2\right);M\right)$, т. е. для любого $A(t,x,s,y)\in L_2\left(\left(G^2\right);M\right)$

$$\|A(t,x,s,y)\|_{L_2}=\left(\int_{t_0}^{\infty}\int_{t_0}^{\infty}\int_a^b\int_a^b\|A(t,x,s,y)\|^2dydxdsdt\right)^{\frac12}.$$

Предполагается, что ядро $\|C(t,x,s,y)\|\in L_2(G^2)$ и $C(t,x,s,y)=C^*(s,y,t,x)$, $(t,x,s,y)\in G^2$, где C^* – сопряженная матрица к матрице *C*. Тогда матричное ядро $C(t,x,s,y)$ разлагается в ряд в смысле сходимости в норме пространства $L_{2,n}(G^2)$.

$$C(t,x,s,y)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\begin{pmatrix}\phi_1^{(i)}(t,x)\\ .\\ .\\ .\\ \phi_n^{(i)}(t,x)\end{pmatrix}\left(\phi_1^{(i)}(s,y),...,\phi_n^{(i)}(s,y)\right),\ l\le m\le\infty, \tag{4}$$

где $\left\{\left(\phi^{(i)}(t,x)\right)=\left(\phi_v^{(i)}(t,x)\right)\right\}$ – ортонормированная последовательность собственных вектор-функций из $L_{2,n}(G)$, $\{\lambda_i\}$ – последовательность соответствующих ненулевых собственных значений интегрального оператора С, порожденного матричным ядром $C(t,x,s,y)$, причем элементы $\{\lambda_i\}$ расположены в порядке убывания их модулей, т. е.

$$|\lambda_1|\ge|\lambda_2|\ge...\,.$$

Обозначим

$$\begin{aligned}P(s,y,z)&=A(s,y,z)+B^*(s,z,y),\\ Q(s,y,\tau)&=M(s,y,\tau)+N^*(\tau,y,s),\end{aligned} \tag{5}$$

где $B^*(s,z,y)$, $N^*(\tau,y,s)$ – соответственно сопряженные матрицы к матрице $B(s,z,y)$, $N(\tau,y,s)$.

Потребуем выполнения следующих условий:

1. Матрицы $P(s,b,a)$, $\lim\limits_{t\to\circ} Q(t,y,t_0)$, $P_z(s,b,z)$, $\lim\limits_{t\to\circ} Q_\tau(t,y,\tau)$ – неотрицательны соответственно при всех значениях $s\in[t_0,\infty]$, $y\in[a,b]$, (s,z), $(\tau,y)\in G$,

$$\|P(s,b,a)\|\in C[t_0,\circ\,],\ \left\|\lim_{t\to\circ} Q(t,y,t_0)\right\|\in C[a,b],\ \|P_z(s,b,z)\|\in C(G),\ \left\|\lim_{t\to\circ} Q_\tau(t,y,\tau)\right\|\in C(G).$$

2. Матрицы $P_y(s,y,a)$, $Q_s(s,y,t_0)$, $P_{sy}(s,y,z)$, $Q_{\tau s}(s,y,\tau)$ – неположительны при всех значениях соответственно $(s,y)\in G$, $(s,y,z)\in G_2$, $(s,y,\tau)\in G_4$,

$$\|P_y(s,y,a)\|\in C(G),\ \|Q_s(s,y,t_0)\|\in C(G),\ \|P_{zy}(s,y,z)\|\in C(G_1),\ \|Q_{\tau s}(s,y,\tau)\|\in C(G_3).$$

3. Выполняется хотя бы одно из следующих четырех условий:

1) при почти всех $(s,y)\in[t_0,\infty]\times[a,b]$ матрица $P_y(s,y,a)$ – отрицательна;

2) при почти всех $(s,z)\in[t_0,\infty]\times[a,b]$ матрица $P_z(s,b,z)$ – положительна;

3) при почти всех $(s,y)\in G$ матрица $Q_s(s,y,t_0)$ – отрицательна;

4) при почти всех $(\tau,y)\in G$ матрица $\lim\limits_{t\to\circ} Q_\tau(t,y,\tau)$ – положительна, и для любого

$v(t,x)\in L_2(G)$,

$$\int_a^x A(t,x,y)v(t,y)dy,\ \int_x^b B(t,x,y)v(t,y)dy,\ \int_{t_0}^t M(t,x,s)v(s,x)ds,\ \int_t^\infty N(t,x,s)v(s,x)ds\in L_{2,n}(G),$$

где $C[t_0,\infty)$, $C(G)$, $C(G_1)$ и $C(G_3)$ – пространство всех непрерывных и ограниченных функций соответственно в области $C[t_0,\infty)$, $C(G)$, $C(G_1)$ и G_3;

5) Матричное ядро $C(t,x,s,y)$ – представимо в виде разложении (4) все элементы последовательности $\{\lambda_i\}$ неотрицательны;

6) Матричное ядро $C(t,x,s,y)$ – представимо в виде разложении (4) все элементы последовательности $\{\lambda_i\}$ – положительны.

Теорема. Пусть выполняются условия 1), 2), 3) и 4). Тогда решение системы (1) единственно в пространстве $L_{2,n}(G)$.

Доказательство. В силу (2), (3) систему уравнений (1) запишем в виде

$$\begin{aligned}&\int_a^y A(t,x,y)u(t,y)dy+\int_y^b B(t,x,y)u(t,y)dy+\int_{t_0}^t M(t,x,s)u(s,x)dx+\\&+\int_t^\infty N(t,x,s)u(s,x)dx+\int_{t_0}^\infty\int_a^x C(t,x,s,y)u(s,y)dyds=f(t,x).\end{aligned}\tag{6}$$

Обе части системы (6) скалярно умножим на $u(t,x)$ и проинтегрируем по области G, применяя формулу Дирихле и учитывая обозначения (5), в результате получим:

$$\begin{aligned}&\int_{t_0}^\infty\int_a^b\left\langle\int_a^y P(s,y,z)u(s,z)dz,u(s,y)\right\rangle dsdy+\int_{t_0}^\infty\int_a^b\left\langle\int_{t_0}^s Q(s,y,\tau)u(\tau,y)d\tau,u(s,y)\right\rangle dsdy+\\&+\int_a^b\int_{t_0}^\infty\left\langle\int_{t_0}^\infty\int_a^y C(s,y,\tau,z)u(\tau,z)dzd\tau,u(s,y)\right\rangle dsdy=\int_a^b\int_{t_0}^\infty\langle f(s,y)u(s,y)\rangle dyds.\end{aligned}\tag{7}$$

Преобразуем первые два интеграла левой части уравнения (7). Известно что, если К – самосопряженная матрица размеров n×n, то

$$\langle K\vartheta,\vartheta_s\rangle=\frac{1}{2}\langle K\vartheta,\vartheta\rangle_s-\frac{1}{2}\langle K_s\vartheta,\vartheta\rangle,\tag{8}$$

где ϑ – некоторая n-мерная вектор-функция.

Далее, имея в виду, что $\dfrac{\partial}{\partial\tau}\displaystyle\int_\tau^s u(\xi,y)d\xi=-u(\tau,y)$,

с помощью интегрирования по частям и с учетом (8), первое слагаемое левой части (7) преобразуем к виду

$$\int_{t_0}^{\infty}\int_a^b\left\langle\int_a^y P(s,y,z)u(s,z)dz,u(s,y)\right\rangle dsdy=-\int_{t_0}^{\infty}\int_a^b\left\langle\int_a^y P(s,y,z)\frac{\partial}{\partial z}\left(\int_z^y u(s,\nu)d\nu\right)dz,u(s,y)\right\rangle dyds=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\left\langle P(s,b,a)\left(\int_a^b u(s,\nu)d\nu\right),\int_a^b u(s,\nu)d\nu\right\rangle ds-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\int_a^b\left\langle P_y(s,y,a)\left(\int_a^y u(s,\nu)d\nu\right),\int_a^y u(s,\nu)d\nu\right\rangle dyds+ \tag{9}$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\int_a^b\left\langle P_z(s,b,z)\left(\int_z^b u(s,\nu)d\nu\right),\int_z^b u(s,\nu)d\nu\right\rangle dzds-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\int_a^b\int_a^y\left\langle P_{zy}(s,y,z)\left(\int_z^y u(s,\nu)d\nu\right),\int_z^y u(s,\nu)d\nu\right\rangle dzdyds.$$

Аналогично, для второго слагаемого имеем:

$$\int_{t_0}^{\infty}\int_a^b\left\langle\int_{t_0}^s Q(s,y,\tau)u(\tau,y)d\tau,u(s,y)\right\rangle dsdy=\frac{1}{2}\int_a^b\left\langle\lim_{t\to\infty}Q(t,y,t_0)\int_{t_0}^{\infty}u(\xi,y)d\xi,\int_{t_0}^{\infty}u(\xi,y)d\xi\right\rangle dy-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\int_a^b\left\langle Q_s(s,y,t_0)\int_{t_0}^s u(\xi,y)d\xi,\int_{t_0}^s u(\xi,y)d\xi\right\rangle dyds+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\int_a^b\left\langle\lim_{t\to\infty}Q_\tau(t,y,\tau)\int_\tau^{\infty}u(\xi,y)d\xi,\int_\tau^{\infty}u(\xi,y)d\xi\right\rangle dyd\tau- \tag{10}$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\int_a^b\int_{t_0}^s\left\langle Q_{\tau s}(s,y,\tau)\int_\tau^s u(\xi,y)d\xi,\int_\tau^s u(\xi,y)d\xi\right\rangle d\tau dyds.$$

Подставляя (4), (9), (10) в (7), получим:

$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\left\langle P(s,b,a)\left(\int_a^b u(s,\nu)d\nu\right),\int_a^b u(s,\nu)d\nu\right\rangle ds-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\int_a^b\left\langle P_y(s,y,a)\left(\int_a^y u(s,\nu)d\nu\right),\int_a^y u(s,\nu)d\nu\right\rangle dyds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\int_a^b\left\langle P_z(s,b,z)\left(\int_z^b u(s,\nu)d\nu\right),\int_z^b u(s,\nu)d\nu\right\rangle dzds-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\int_a^b\int_a^y\left\langle P_{zy}(s,y,z)\left(\int_z^y u(s,\nu)d\nu\right),\int_z^y u(s,\nu)d\nu\right\rangle dzdyds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b\left\langle\lim_{t\to\infty}Q(t,y,t_0)\int_{t_0}^{\infty}u(\xi,y)d\xi,\int_{t_0}^{\infty}u(\xi,y)d\xi\right\rangle dy-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\int_a^b\left\langle Q_s(s,y,t_0)\int_{t_0}^s u(\xi,y)d\xi,\int_{t_0}^s u(\xi,y)d\xi\right\rangle dyds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\int_a^b\left\langle\lim_{t\to\infty}Q_\tau(t,y,\tau)\int_\tau^{\infty}u(\xi,y)d\xi,\int_\tau^{\infty}u(\xi,y)d\xi\right\rangle dyd\tau- \tag{11}$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\int_a^b\int_{t_0}^s\left\langle Q_{\tau s}(s,y,\tau)\int_\tau^s u(\xi,y)d\xi,\int_\tau^s u(\xi,y)d\xi\right\rangle d\tau dyds+$$

$$+\sum_{i=1}^m\lambda_i\int_a^b\int_{t_0}^{\infty}\left|\left\langle\phi^{(i)}(s,y),u(s,y)\right\rangle\right|^2 dsdy=\int_a^b\int_{t_0}^{\infty}\left\langle f(s,y),u(s,y)\right\rangle dyds.$$

Пусть $f(t,x)=0,\ (t,x)\in G$. Тогда, учитывая условия 1), 2), 3) и 4) из (11), имеем $u(t,x)=0$ при всех $(t,x)\in G$. Теорема доказана.

В силу полной непрерывности и самосопряженности оператора C, порожденного матричным ядром $C(t,x,s,y)$, ортонормированная последовательность собственных вектор-функций $\left\{\left(\phi^{\nu}(t,x)\right)=\left(\phi_i^{(\nu)}(t,x)\right)\right\}$ полна в $L_{2,n}(G)$.

Семейство множеств корректности, зависящее от параметра α, выделим следующим образом:

$$M_\alpha=\left\{u(t,x)\in L_{2,n}(G):\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu^{-\alpha}\left|u^{(\nu)}\right|^2\le c\right\},\ \text{где } c>0,\quad 0<\alpha<\infty,$$
$$u^{(\nu)}=\int_{t_0}^{\infty}\int_a^b\left\langle u(t,x),\varphi^{(\nu)}(t,x)\right\rangle dxdt,\ (\nu=1,2,...,). \tag{12}$$

Пусть $f(t,x)\in K(M_\alpha)$, где оператор K определен по формуле (1).

Тогда система (1) имеет решение $u(t,x)\in K(M_\alpha)$ и из последнего равенства имеем:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_{\nu}\left|u^{(\nu)}\right|^{2}\leq\left|\int_{t_0}^{\infty}\int_{a}^{b}\left\langle f(t,x),u(t,x)\right\rangle dxdt\right|.$$

Отсюда, используя неравенства Гельдера, имеем:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_{\nu}\left|u^{(\nu)}\right|^{2}\leq\left\|f(t,x)\right\|_{L_{2,n}}\left\|u(t,x)\right\|_{L_{2,n}}. \tag{13}$$

С другой стороны,

$$\left\|u(t,x)\right\|^{2}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\left|u^{(\nu)}\right|^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}}}{\lambda_{\nu}^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}}\cdot\lambda_{\nu}^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}\cdot\left|u^{(\nu)}\right|^{\frac{2}{1+\alpha}}\leq\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\left|u^{(\nu)}\right|^{2}}{\lambda_{\nu}^{-1}}\right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_{\nu}^{-\alpha}\left|u^{(\nu)}\right|^{2}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}}. \tag{14}$$

Здесь мы применили неравенство Гёльдера при $p=\frac{1+\alpha}{\alpha}$, $q=1+\alpha$.

Пусть $u(t,x)\in K(M_{\alpha})$. Тогда, учитывая (13) из неравенства (14), имеем:

$$\left\|u(t,x)\right\|_{L_2}^{2}\leq c^{\frac{1}{1+\alpha}}\left(\left\|f(t,x)\right\|_{L_2}\left\|u(t,x)\right\|_{L_2}\right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

Отсюда получим следующую оценку устойчивости:

$$\left\|u(t,x)\right\|_{L_2}\leq c^{\frac{1}{2+\alpha}}\left\|f(t,x)\right\|_{L_2}^{\frac{\alpha}{2+\alpha}},\qquad 0<\alpha<\infty. \tag{15}$$

Таким образом, доказана

Теорема 1. Пусть выполняются условия 1), 2), 3) и 5), $K(M_{\alpha})\subset L_{2,n}(G)$ – образ M_{α} при отображении К. Тогда решение системы (1) единственно в $L_{2,n}(G)$ и на множестве $K(M_{\alpha})$ оператор $К^{-1}$, обратный к К, равномерно непрерывен с гёльдеровым показателем $\frac{\alpha}{2+\alpha}$, т. е. справедлива оценка (15).

Литература

1. *Лаврентьев М.М.* Об интегральных уравнениях первого рода / М.М. Лаврентьев // ДАН СССР. 1959. Т. 127, № 1. С. 31–33.
2. *Лаврентьев М.М.* Некорректные задачи математической физики и анализа / М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский. М.: Наука, 1980.
3. *Асанов А.* О единственности решения для одного классаинтегрального уравнения Фредгольма первого рода / А. Асанов, З.А. Каденова // Тр. Всерос. научн. конф. “Математическое моделирование и краевые задачи”. Самара: СамГТУ, 2004. Ч. 3. С. 122–126.