УДК 517.97

НЕЛИНЕЙНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ И ЕГО РАЗРЕШИМОСТЬ

Э.Ф. Абдылдаева

Исследованы вопросы однозначной разрешимости нелинейного интегрального уравнения специфического вида, которое появляется при решении многих задач нелинейной оптимизации колебательных систем с распределенными параметрами.

Ключевые слова: колебание; управление; нелинейное интегральное уравнение; функционал; оптимизация.

NONLINEAR INTEGRAL EQUATION OF OPTIMAL CONTROL AND ITS SOLVABILITY

E.F. Abdyldaeva

The article examines questions of unique solvability of a nonlinear integral equation, which appears when solving many problems of nonlinear optimization of oscillatory systems with distributed parameters.

Key words: oscillation; control; nonlinear integral equation; functional; optimization.

1. Постановка задачи оптимального управления и условия оптимальности

Рассмотрим задачу оптимизации, где требуется минимизировать квадратичный интегральный функционал

$$J[u(t)] = \int_0^1 \left\{[V(T,x)-\xi_1(x)]^2 + [V_t(T,x)-\xi_2(x)]^2\right\} dx + \beta\int_0^T l^2(t,u(t))dt, \beta > 0, \quad (1.1)$$

где $\xi_1(x) \in H_1(Q)$, $\xi_2(x) \in H(Q)$, $l(t,u(t)) \in H(0,T)$, $l_u(t,u(t)) \neq 0$ – заданные функции, на множестве решений краевой задачи

$$V_{tt} - AV = \lambda\int_0^T K(t,t)V(t,x)dt + g(t,x)f[t,u(t)], x \in Q \subset R^n, 0 < t \leq T, \quad (1.2)$$

$$V(0,x) = \psi_1(x),\ V_t(0,x) = \psi_2(x),\ x \in \mathrm{Q}, \quad (1.3)$$

$$\Gamma V(t,x) = \sum_{i,j=1,n}^{n} a_{ij}(x)V_{x_j}(t,x)\cos(\delta,x_i) + a(x)V(t,x) = 0, x \in \gamma, 0 < t \leq T, \quad (1.4)$$

где A – эллиптический оператор, действующий по формуле

$$AV(t,x) = \sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x)V_{x_j}(t,x))_{x_i} - c(x)V(t,x),$$

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\alpha_i\alpha_j \geq c_0\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2, c_0 > 0,$$

δ – вектор нормали, исходящий из точки $x \in \gamma$; T – фиксированный момент времени, $K(t,\tau)$ – заданная функция, которая определена в области $D = \{0 \leq t \leq 1, 0 \leq \tau \leq 1\}$ и удовлетворяет условию

$$\int_0^T\int_0^T K^2(t,\tau)d\tau dt = K_0 < \infty,$$

т. е. является элементом гильбертова пространства $H(D)$;

$$g(t,x)\in H(Q_T),\psi_1(x)\in H_1(0,1),\psi_2(x)\in H(0,1),f_u[t,u(t)]\neq 0,\forall\, t\in(0,T) \qquad (1.5)$$

заданные, а $a(x)\geq 0, c(x)\geq 0$ – известные измеримые функции; $u(t)\in H(0,T)$ функция управления, λ – параметр, постоянная $\alpha>0$.

В силу условий (1.5) краевая задача (1.2)–(1.4) при каждом фиксированном $u(t)\in H(0,T)$ имеет единственное обобщенное решение (см. статью Керимбеков А.К., Абдылдаева Э.Ф. в данном сборнике):

$$V(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}V_n(t)z_n(x),$$

$$V_n(t)=\lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)q_n(s)ds+q_n(t), \qquad (1.6)$$

$$q_n(t)=\psi_{1n}cos\lambda_n t+\frac{1}{\lambda_n}\psi_{2n}sin\lambda_n t+\int_0^t\frac{1}{\lambda_n}sin\lambda_n(t-\tau)g_n(\tau)f[\tau,u(\tau)]d\tau.$$

Поскольку каждое управление *u (t)* единственным образом определяет управляемый процесс *V (t,x)*, то управлению *u (t)* + Δ *u (t)* соответствует решение краевой задачи (1.2)–(1.4) вида *V (t,x)* + Δ*V (t,x)*, где Δ*V (t,x)* приращение соответствующее приращению Δ *u (t)*. Согласно методике вывода принципа максимума [1] приращение функционала (1.1) можно представить в виде

$$\Delta J[u]=J[u+\Delta u]-J[u]=-\int_0^T\Delta\prod[t,V(t,x),\omega(t,x),u(t)]dt+\int_Q\Delta V^2(T,x)dx+\int_Q\Delta V_t^2(T,x), \qquad (1.7)$$

где $\prod(t,V(t,x),\omega(t,x),u(t))=\int_Q g(t,x)\omega(t,x)dx\, f[t,u(t)]-\beta l^2(t,u(t)),$

а функция *ω (t,x)* является решением сопряженной краевой задачи

$$\omega_{tt}-A\omega_{xx}=\lambda\int_0^T K(\tau,t)\omega(\tau,x)d\tau,\ x\in Q,\ 0\leq t<T,$$

$$\omega(\mathrm{T},x)+2[V_t(T,x)-\xi_2(x)]=0,\ \ \omega_t(\mathrm{T},x)-2[V(T,x)-\xi_1(x)]=0,$$

$$\Gamma\omega(t,x)=\sum_{i,j=1}^{n}\Big(a_{ij}(x)\omega_{x_j}(t,x)\Big)_{x_i}-c(x)\omega(t,x)=0. \qquad (1.8)$$

Согласно принципу максимума для систем с распределенными параметрами [1], оптимальное управление определяется из соотношений

$$\frac{2\beta l\big(t,u(t)\big)l_u\big(t,u(t)\big)}{f_u[t,u(t)]}=\int_Q g(t,x)\omega(t,x)dx, \qquad (1.9)$$

$$f_u[t,u(t)]\left(\frac{l\big(t,u(t)\big)l_u\big(t,u(t)\big)}{f_u[t,u(t)]}\right)_u>0, \qquad (1.10)$$

которые называются условиями оптимальности.

2. Решение сопряженной краевой задачи

Решение сопряженной краевой задачи (1.8) ищем в виде ряда

$$\omega(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n(t)\,\mathrm{z}_n(x). \qquad (2.1)$$

Нетрудно проверить, что коэффициенты Фурье ω_n *(t)* при каждом фиксированном *n = 1, 2, 3 ...,* удовлетворяет соотношениям

$$\omega_n''(t)+\lambda_n^2\omega_n(t)=-\lambda\int_0^T K(\tau,t)\omega_n(\tau)d\tau,$$

$$\omega_n(\mathrm{T})+2[V_n'(T)-\xi_{2n}]=0,\quad \omega_n'(\mathrm{T})-2[V_n(T)-\xi_{1n}]=0,$$

которые можно преобразовать к линейному неоднородному интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$\omega_n(t)=\lambda\int_0^T B_n(t,\tau)\omega_n(\tau)d\tau-2[V_n'(T)-\xi_{2n}]\cos\lambda_n(T-t)+\frac{2}{\lambda_n}\big[V_n(T)-\xi_{1n}\big]\sin\lambda_n(T-t), \qquad (2.2)$$

где ядро

$$B_n(t,\tau) = \frac{1}{\lambda_n}\int_t^T \sin\lambda_n(s-t)K(\tau,s)ds \text{ и } B_n(s,T) = 0. \qquad (2.3)$$

Решение уравнение (2.2) находим [6] по формуле

$$\omega_n(t) = 2[V_n'(T) - \xi_{2n}]\left\{\lambda\int_0^T P_n(t,\tau,\lambda)\cos\lambda_n(\mathrm{T}-\tau)\,\mathrm{d}\,\tau + \cos\lambda_n(\mathrm{T}-t)\right\} +$$
$$+\frac{2}{\lambda_n}[V_n(T) - \xi_{1n}]\left\{\lambda\int_0^T P_n(t,\tau,\lambda)\sin\lambda_n(\mathrm{T}-\tau)\,\mathrm{d}\,\tau + \sin\lambda_n(\mathrm{T}-t)\right\} \qquad (2.4)$$

где резольвента $P_n\ (s,t,\lambda)$ ядра $B_n\ (s,t)$ имеет вид

$$P_n(t,\tau,\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}B_{n,i}(t,\tau) \;\; i = 1,2,3,...,$$

и при выполнении условия $\left|\lambda\right| < \dfrac{\lambda_n}{T\sqrt{K_0}} \underset{n\to\infty}{\to} \infty$ является непрерывной функцией, а также удовлетворяет оценке

$$|\,P_n\left(s,t,\lambda\right)| \le \frac{\sqrt{T}}{\lambda_n^2 - \left|\lambda\right|TK_0}\left(\int_0^T K^2\left(s,\eta\right)d\eta\right)^{1/2},$$
$$\text{или } \int_0^T\left|P_n(t,\tau,\lambda)\right|^2 d\tau \le \frac{TK_0}{\left(\lambda_n - \left|\lambda\right|T\sqrt{K_0}\right)^2}. \qquad (2.5)$$

Нетрудно проверить, что $\omega\ (t,x)$ является элементом пространства $H(Q)$. Это следует из неравенства

$$\int_0^T\int_0^1 \omega^2(t,x)dxdt = \int_0^T\int_0^1\left(\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n(t)z_n(x)\right)^2 dxdt = \int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n^2(t)dt \le$$
$$\le 16\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\left\{[V_n'(T) - \xi_{2n}]^2 + \frac{1}{\lambda_n}\left[V_n(T) - \xi_{1n}\right]^2\right\}\left[\frac{\lambda^2T^2K_0}{\left(\lambda_n - \left|\lambda\right|T\sqrt{K_0}\right)^2} + 1\right]dt =$$
$$= 16\sum_{n=1}^{\infty}\left\{[V_n'(T) - \xi_{2n}]^2 + \frac{1}{\lambda_n}\left[V_n(T) - \xi_{1n}\right]^2\right\}\left[\frac{\lambda^2T^2K_0}{\left(\lambda_n - \left|\lambda\right|T\sqrt{K_0}\right)^2} + 1\right]\int_0^T dt \le$$
$$\le 32T\left[\frac{\lambda^2T^2K_0}{\left(\lambda_n - \left|\lambda\right|T\sqrt{K_0}\right)^2} + 1\right]\left\{\sum_{n=1}^{\infty}V_n'^2(T) + \sum_{n=1}^{\infty}\xi_{2n}^2 + \sum_{n=1}^{\infty}V_n^2(T) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi_{1n}^2}{\lambda_n^2}\right\} < \infty,$$

которое имеет место в силу следующих соотношений

$$\sum_{n=1}^{\infty}V_n'^2(T) < \infty, \sum_{n=1}^{\infty}V_n^2(T) < \infty, \sum_{n=1}^{\infty}\xi_{1n}^2 = \|\,\xi_1(x)\,\|_H^2 \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty}\xi_{2n}^2 = \|\,\xi_2(x)\,\|_H^2.$$

3. Нелинейное интегральное уравнение оптимального управления

Оптимальное управление находим согласно условиям оптимальности (1.9) и (1.10). Решение сопряженной краевой задачи (1.8), определяемое равенствами (2.1) и (2.2), подставим в (1.9). Сначала вычислим интеграл

$$\int_Q g(t,x)\omega(t,x)dx = \int_Q\sum_{n=1}^{\infty}g_n(t)z_n(x)\sum_{k=1}^{\infty}\omega_k(t)z_k(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}g_n(t)\omega_n(t)$$

и равенство (1.9) перепишем в виде

$$\frac{\beta l\left(t,u(t)\right)l_u\left(t,u(t)\right)}{f_u[t,u(t)]}=-\sum_{n=1}^{\infty}g_n(t)\left\{2\left[V_n'(T)-\xi_{2n}\right]\left(\lambda\int_0^T P_n(t,\tau,\lambda)\cos\lambda_n(T-\tau)d\tau+\cos\lambda_n(T-\tau)\right)+\right.$$

$$\left.+\left\{2\left[V_n'(T)-\xi_{2n}\right]\left(\lambda\int_0^T P_n(t,\tau,\lambda)\cos\lambda_n(T-\tau)d\tau+\cos\lambda_n(T-\tau)\right)\right\}\right\}.$$

Согласно (1.6) это равенство приводим к виду

$$\frac{\beta l\left(t,u(t)\right)l_u\left(t,u(t)\right)}{f_u[t,u(t)]}=\sum_{n=1}^{\infty}L^*_n(t,\lambda)\int_0^T G_n(\tau,\lambda)f[\tau,u(\tau)]ds+\sum_{n=1}^{\infty}L^*_n(t)h_n, \tag{3.1}$$

где $L_n^*(t,\lambda)=\left(g_n(t)\tilde{P}_n(t,\lambda),g_n(t)\tilde{\tilde{P}}_n(t,\lambda)\right),$ (3.2)

$$\begin{gathered}\tilde{P}_n(t,\lambda)=\lambda\int_0^T P_n(t,\tau,\lambda)\cos\lambda_n(T-\tau)d\tau+\cos\lambda_n(T-\tau),\\ \tilde{\tilde{P}}_n(t,\lambda)=\lambda\int_0^T P_n(t,\tau,\lambda)\sin\lambda_n(T-\tau)d\tau+\sin\lambda_n(T-\tau),\end{gathered} \tag{3.3}$$

$$G_n(\tau,\lambda)=\begin{pmatrix}g_n(t)\tilde{G}_n(\tau,\lambda)\\ g_n(t)\tilde{\tilde{G}}_n(\tau,\lambda)\end{pmatrix} \tag{3.4}$$

Таким образом, оптимальное управление определяется как решение нелинейного интегрального уравнения (3.1) и при этом должны выполняться условия (1.9) и (1.10). Условие (1.10) ограничивает класс функций внешних воздействий *f [t,u(t)]*. Поэтому будем считать, что функция *f [t,u(t)]* удовлетворяет условию (1.10) для любого управления $u(t)\in H(0,T)$.

Нелинейные интегральные управления (3.1) решаются согласно методике, разработанной проф. А. Керимбековым [2]. Положим

$$\frac{\beta l\left(t,u(t)\right)l_u\left(t,u(t)\right)}{f_u[t,u(t)]}=p(t). \tag{3.5}$$

Лемма 4.1. Функция *p(t)* является элементом пространства *H (0,T)*.

Доказательство. В силу условия (1.9)имеет место оценка

$$\sup\left|\frac{l_u(t,u(t))}{f_u(t,u(t))}\right|\le M,\forall t\in[0,T].$$

Так как $u(t)\in H(0,T)$, то утверждение леммы следует из неравенства

$$\int_0^T\left|p(t)\right|^2dt\le\beta\int_0^T\left|l(t,u(t)\right|^2\cdot\left|\frac{l_u(t,u(t)}{f_u(t,u(t)}\right|^2dt\le\beta M^2\int_0^T l^2(t,u)dt<\infty.$$

Согласно условию (1.10), из равенства (3.5) управление *u (t)* определяется однозначно, т. е. существует функция φ такая, что

$$u(t)=\varphi(t,p(t),\beta). \tag{3.6}$$

В силу (3.5) и (3.6) уравнение (3.1) перепишем в виде

$$p(t)=\sum_{n=1}^{\infty}L^*_n(t,\lambda)\int_0^T G_n(s,\lambda)f[s,\varphi(s,p(s),\beta)]ds+\sum_{n=1}^{\infty}L^*_n(t)h_n \tag{3.7}$$

или в операторной форме

$$p(t)=G[p(t)], \tag{3.8}$$

где $G[p(t)]=\sum_{n=1}^{\infty}L^*_n(t,\lambda)[h_n+\int_0^T G_n(\tau,\lambda)f[\tau,\varphi(\tau,p(\tau),\beta)]dt].$ (3.9)

Теперь исследуем вопросы однозначной разрешимости операторного уравнения (3.8).

Лемма 4.2. Оператор *G [p(t)]* отображает пространство *H (0,T)* в себя, т. е. является элементом пространства *H (0,T)*.

Доказательство. Непосредственным вычислением имеем неравенство

$$\int_0^T G^2[p(t)]dt = \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} L^*_n(t,\lambda)[h_n + \int_0^T G_n(\tau,\lambda) f[\tau,\varphi(\tau,p(\tau),\beta)]d\tau] \right)^2 dt \le$$

$$\le 2\int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(L^*_n(t,\lambda)\cdot h_n \right)^2 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} L^*_n(t,\lambda) \int_0^T G^2_n(\tau,\lambda) f\left(\tau,\varphi\left(\tau,p(\tau)\right),\beta\right) d\tau \right)^2 \right) dt \le$$

$$\le 2\int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left\langle L^*_n(t,\lambda), h_n \right\rangle \right)^2 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left\langle L_n(t,\lambda), \int_0^T G_n(\tau,\lambda) f\left(\tau,\varphi\left(\tau,p(\tau)\right),\beta\right) d\tau \right\rangle \right)^2 dt \le$$

$$\le 2\int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left\| L^*_n(t,\lambda) \right\|_{R^2} \left\| h_n \right\| \right)^2 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left\| L_n(t,\lambda) \right\|_{R^2} \left\| \int_0^T G_n(\tau,\lambda) f\left(\tau,\varphi\left(\tau,p(\tau)\right),\beta\right) d\tau \right\| \right)^2 dt \le$$

$$\le 2\int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left\| L^*_n(t,\lambda) \right\|^2_{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\| h_n \right\|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\| L_n(t,\lambda) \right\|^2_{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \int_0^T G_n(\tau,\lambda) f\left(\tau,\varphi\left(\tau,p(\tau)\right),\beta\right) d\tau \right\|^2 \right) dt \le$$

$$\le 2\int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left\| L^*_n(t,\lambda) \right\|^2_{R^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left\| h_n \right\|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \int_0^T G_n(\tau,\lambda) f\left(\tau,\varphi\left(\tau,p(\tau)\right),\beta\right) d\tau \right\|^2 \right) dt < \infty,$$

которое имеет место в силу следующих неравенств

$$\left\| L^*_n(t,\lambda) \right\|^2_{R^2} \le 4g^2_n(t) \left\{ 1 + \frac{\lambda^2 T^2 K_0}{\left(\lambda_n - |\lambda| T\sqrt{K_0} \right)^2} \right\},$$

$$\left\| G_n(t,\lambda) \right\|^2_{R^2} \le 2\left(1 + \frac{1}{\lambda_n} \right) g^2_n(\tau) \left\{ 1 + \frac{T^2 K_0}{\left(\lambda_n - |\lambda| T\sqrt{K_0} \right)^2} \right\},$$

$$\left\| h_n(t,\lambda) \right\|^2_{R^2} \le 4\left\{ \xi^2_{1n} + \xi^2_{1n} + \psi^2_{1n} + \lambda^2_n \psi^2_{1n} + 2T\lambda^2 \left[\psi^2_{1n} + \frac{\psi^2_{2n}}{\lambda^2_n} \right] \frac{TK_0}{\left(\lambda_n - |\lambda| T\sqrt{K_0} \right)^2} \left[1 + \lambda^2_n \right] \right\} < \infty.$$

Лемма 4.3. Пусть выполнены условия

$$\| f[t,u(t)] - f[t,\overline{u}(t)] \|_H \le f_0 \| u(t) - \overline{u}(t) \|_H, \; f_0 > 0 \tag{3.10}$$

$$\| \varphi[t,p(t),\beta] - \varphi[t,\overline{p}(t),\beta] \|_H \le \varphi_0(\beta) \| p(t) - \overline{p}(t) \|_H, \; \varphi_0(\beta) > 0. \tag{3.11}$$

Тогда при выполнении условия

$$\gamma = 8\| g(t,x) \|^2_H \left(1 + \frac{1}{\lambda_1} \right) \left(1 + \frac{\lambda^2 T^2 K_0}{\left(\lambda_1 - |\lambda| T\sqrt{K_0} \right)^2} \right) \left(1 + \frac{T^2 K_0}{\left(\lambda_1 - |\lambda| T\sqrt{K_0} \right)^2} \right) f_0 \varphi_0(\beta) < 1, \tag{3.12}$$

оператор *G[p]* является сжимающим.

Доказательство. Непосредственным вычислением имеем неравенство

$$\int_0^T \left| [G[p] - G[\overline{p}] \right| dt = \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} L^*_n(t,\lambda) \int_0^T G_n(\tau,\lambda) \left(f[\tau,\varphi(\tau,p(\tau),\beta)] - f[\tau,\varphi(\tau,\overline{p}(\tau),\beta)] \right) d\tau \right)^2 dt \le$$

$$\le \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} L^{*2}_n(t,\lambda) \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T G^2_n(\tau,\lambda) ds \int_0^T \left(f[\tau,\varphi(\tau,p(\tau),\beta)] - f[\tau,\varphi(\tau,\overline{p}(\tau),\beta)] \right)^2 d\tau dt \le$$

$$\le 8\left(1+\frac{1}{\lambda_1}\right)\left(1+\frac{\lambda^2T^2K_0}{\left(\lambda_1-|\lambda|T\sqrt{K_0}\right)^2}\right)\left(1+\frac{T^2K_0}{\left(\lambda_1-|\lambda|T\sqrt{K_0}\right)^2}\right)\| g(t,x)\|_H^4\ f_0^2\varphi_0^2(\beta)\left\|p(t)-\overline{p}(t)\right\|_H^2,$$

откуда находим, что

$$\| G(p)-G(\overline{p})\|_H \le \left\{8\left(1+\frac{1}{\lambda_1}\right)\left(1+\frac{\lambda^2T^2K_0}{\left(\lambda_1-|\lambda|T\sqrt{K_0}\right)^2}\right)\left(1+\frac{T^2K_0}{\left(\lambda_1-|\lambda|T\sqrt{K_0}\right)^2}\right)\right\}^{1/2}\| g(t,x)\|_H^2 \times$$

$$\times f_0\varphi_0(\beta)\| p(t)-\overline{p}(t)\|_H .$$

Теорема 4.1. Пусть выполнены условия (1.4)–(1.5), (1.14)–(1.15), (2.6), (3.5), (4.10)–(4.13). Тогда операторное уравнение (4.8) в пространстве *H (0,T)* имеет единственное решение.

Доказательство. Согласно Леммам 4.1 и 4.2 операторное уравнение (4.8) можно рассматривать в пространстве *H (0,T)*. Согласно Лемме 4.3 оператор *G (p)* является сжимающим. Поскольку гильбертово пространство *H (0,T)* является полным метрическим пространством, то согласно теореме [3] о принципе сжимающих отображений, оператор *G (p)* имеет единственную неподвижную точку, т. е. операторное уравнение (4.8) имеет единственное решение.

Решение операторного уравнения (3.8) может быть найдено методом последовательных приближений, т. е. *n*-е приближение решения находится по формуле

$$p_n(t)=G[p_{n-1}(t)],\, n=1,2,3,...,$$

где p_0 *(t)* произвольный элемент пространства *H (0,T)*, причем имеет место оценка

$$\| \overline{p}(t)-p_n(t)\| \le \frac{\gamma^n}{1-\gamma}\| G[p_0(t)]-p_0(t)\|_H . \tag{3.13}$$

Точное решение $\overline{p}(t)$ может быть найдено как предел приближенных решений, т. е.

$$\overline{p}(t)=\lim_{n\to\infty} p_n(t).$$

Подставляя это решение в (3.6) находим искомое оптимальное управление

$$u^0(t)=\varphi[t,\overline{p}(t),\beta]. \tag{3.14}$$

Оптимальный процесс V^0 *(t,x)*, т. е. решение краевой задачи (1.1)–(1.5),соответствующее оптимальному управлению u^0 *(t)*, согласно (1.6)находим по формуле

$$V^0(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)q_n(s)ds+q_n(t)\right)z_n(x). \tag{3.15}$$

Минимальное значение функционала (1.1) вычислим по формуле

$$J[u^0(t)]=\int_0^1\left\{\left[V^0(T,x)-\xi_1(x)\right]^2+\left[V_t^0(T,x)-\xi_2(x)\right]^2\right\}dx+\beta\int_0^T l^2\left(t,u^0(t)\right)dt. \tag{3.16}$$

Найденная тройка $\left(u^0(t),V^0(t,x),J[u^0(t)]\right)$ является решением задачи нелинейной оптимизации.

Литература

1. *Егоров А.И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами / А.И. Егоров. М.: Наука, 1978. 500 с.
2. *Керимбеков А.К.* Нелинейное оптимальное управление линейными системами с распределенными параметрами: дис. … д-ра физ.-мат. наук / А.К. Керимбеков; Ин-т математики НАН КР. Бишкек, 2003. 224 с.
3. *Люстерник Л.А.* Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. М.: Наука, 1965. 520 с.