УДК 624.072.223: 519.635

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВЫНУЖДЕННОГО ПОПЕРЕЧНОГО КОЛЕБАНИЯ БАЛКИ НА УПРУГИХ ОПОРАХ

М.Ч. Апсеметов

Рассматривается вынужденное колебание балки с упругими опорами.

Ключевые слова: колебание; начальное условие; уравнение; жесткость; производная; решение.

THE SOLUTION OF THE DIFFERENTIAL EQUATION OF FORCED OSCILLATIONS OF THE CROSS BEAMS ON ELASTIC SUPPORTS

M.Ch. Apsemetov

The article discusses the forced oscillation of a beam with elastic supports.

Keywords: fluctuation; the initial condition; equation; stiffness; derivative; solution.

В настоящее время для изоляции колебаний при динамических нагрузках в конструкциях зданий и сооружений используются упругие опорные части [1].

В работе рассматривается решение дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка.

Поперечные колебания балки описываются уравнением [2]:

$$a^2\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=f(x,t),\quad a^2=\frac{EI}{\overline{m}} \tag{1}$$

$$0<x<l,\ t>0$$

для упругой опоры на концах с начальными и краевыми условиями:

$$\begin{aligned}
&y(x,0)=\varphi(x),\quad 0\le x\le l;\\
&\frac{\partial y}{\partial t}(x,0)=\psi(x);\\
&y''(0,t)=y''(l,t)=0,\ t>0;\\
&EIy'''(0,t)-C_0y(0,t)=0;\\
&EIy'''(l,t)+C_0y(l,t)=0.
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $y(x,\ t)$ – прогиб балки; $f(x,\ t)$ – внешняя нагрузка; $\varphi(t)$ и $\psi(x)$ – начальный прогиб и начальная скорость колебаний соответственно; EI – жесткость при изгибе балки; $\overline{m}$ – масса единицы длины балки; C_0 – жесткость упругой опоры; 1 – длина балки.

Область изменения переменных $D=\{x,t;0\le x\le$ $\le 1,\ t>0\}$ разобьем прямыми: $x=ih$, n и $t=jz$, $j=1,2,3,...$ на прямоугольную сетку. Значения функций в узлах сетки обозначим с помощью индексов $y(x_i,\ t_j)=y(ih,\ i\tau)=y_i$ и т. д., а производные заменим разностными отношениями (2). Тогда уравнение (1) аппроксимируется следующей неявной трехслойной схемой, имеющей второй порядок точности по обеим переменным [1, 3]:

$$\frac{y_i^{j+1}-2y_i^j+y_i^{j-1}}{\tau^2}+a^2\frac{2y_{i-2}^{j+1}-4y_{i-1}^{j+1}+6y_i^{j=1}-4y_{i+2}^{j=1}}{h^4}=f_i^{j+1}.$$

Обозначим А = a² τ^2/h^4 и перепишем это уравнение в виде

$$A\cdot y_{i-2}^{j+1}-4Ay_{i-1}^{j+1}+(6A+1)y_i^{j+1}-4Ay_{i+1}^{j+1}+Ay_{i+2}^{j+1}=$$

$$=\tau^2 f_i^{j+1}+2y_i^{j+1},$$

$$2\le i\le n-2\ j>0. \tag{3}$$

Таким образом, получим пятидиагональную систему линейных уравнений. Уравнения для $i=0$, $n-1$, n напишем с помощью краевых условий. Для этого функцию $y(x)$ разложим в ряд Тейлора в окрестности точки $x=x_0$

$$y(x)=y(x_0)+(x-x_0)y'(x_0)+\frac{x-x_0}{2!}y''(x_0)+\dots \tag{4}$$

Полагая $x_0=0$, напишем ряд (4) для случаев $x=h$ и $x=2h$:

$$y_1=y_0+hy_0'+\frac{h^2}{2}y_0''+\frac{h^3}{6}y_0'''+\frac{h^4}{24}y_0'''+0(h^s); \tag{5}$$

$$y_2=y_0+2hy_0'+\frac{4h^2}{2}y_0''+\frac{8h^3}{6}y_0'''+\frac{16h^4}{24}y_0'''+0(h^5). \tag{6}$$

Складывая почленно равенства (5) и (6) и учитывая, что $y_0'' = 0$ и $y_0'' = \dfrac{C_0 y_0}{EI}$, имеем:

$$y_1 + y_2 = 2y_0 + 3hy_0' + \frac{3C_0h^3}{2EI}y_0 + 0(h''), \text{ откуда}$$

$$y_0' = \frac{-C_1y_0 + y_1 + y_2}{3h} + 0(h^3), \tag{7}$$

где $C_1 = 2 + \dfrac{3C_0h^3}{2EI}$.

Аналогично, записывая ряд (4) для $x = x_{n-1}$ и $x = x_{n-2}$, получаем для точки $x = 0$ уравнение (1) следующего вида:

$$\frac{\partial^2 y(0,t)}{\partial t^2} + a^2\frac{\partial^4 y(0,t)}{\partial x^4} = f(0,t). \tag{8}$$

Так как по условию в точке $x = 0$

$$y'''(0,t) = C_0 \cdot y(0,t)/EJ,$$

где $\dfrac{\partial^4 y(0,t)}{\partial x^4} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial^3 y(0,t)}{\partial x^3}\right) = K_0\dfrac{\partial y(0,t)}{\partial x}$,

и уравнение (8) примет вид

$$\frac{\partial^2 y(0,t)}{\partial t^2} + a^2K_0\frac{\partial y(0,t)}{\partial x} = f(0,t). \tag{9}$$

Используя формулу (8), запишем конечно-разностный аналог уравнения (9):

$$\frac{y_0^{j+1} - 2y_0^{j+1}}{\tau^2} + \frac{a^2C_0}{3h}\left(-2y_0^{j+1} + y_1^{j+1} + y_2^{j+1}\right) = f_0^{j+1}$$

или

$$(-BK_1+1)y_0^{j=1} + By_1^{j+1} + By_2^{j+1} = \tau^2 f_0^{j+1} + 2y_0^j - y_0^{j-1}, \tag{10}$$

где $B = \dfrac{a^2\tau K_0}{3h} - \dfrac{a^2\tau^2C_0}{3hEI}$.

Теперь напишем уравнение колебаний в точке $x = h$:

$$a^2\frac{\partial'' y(h,t)}{dx^4} + \frac{\partial^2 y(h,t)}{\partial t^2} = f(h,t).$$

Представляя четвертую производную по в виде

$$\frac{\partial'' y(h,t)}{\partial x^4} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 y(h,t)}{\partial x^2}\right) \approx \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{y_2^{j+1} - 2y_1^{j+1} + y_0^{j+1}}{h^2}\right)$$

и принимая во внимание краевое условие $y_0'' = 0$, получим уравнение

$$\frac{y_1^{j+1} - 2y_1^j + y_1^{j+1}}{\tau^2} +$$

$$+\frac{a^2}{h^2}\left(\frac{y_1^{j+1} - 2y_2^{j+1} + y_3^{j+1}}{h^2} - 2\frac{y_0^{j+1} - 2y_1^{j+1} + y_2^{j+1}}{h^2}\right) = f_1^{j+}$$

или (после приведения подобных членов)

$$-2Ay_0^{j+1} + (5A+1)y_1^{j+1} - 4A_2^{j+1} + Ay_3^{j+1} =$$
$$= \tau^2 f_1^{j+1} + 2y_1^j - y_1^{j-1}. \tag{11}$$

Аналогичные уравнения можно получить в точках $x = 1$ и $x = 1 - h$ соответственно:

$$By_{n-2}^{j+1} + By_{n-1}^{j+1} + (-K_1B+1)y_n^{j+1} = \tau^2 f_n^{j+1} + 2y_n^j - y_n^{j-1}; \tag{12}$$

$$Ay_{n-3}^{j+1} - 4Ay_{n-2}^{j+1} + (5A+1)y_{n-1}^{j+1} - 2Ay_n^{j+1} = \tau^2 f_{n-1}^{j+1} + 2_{n-1}^j - y_{n-1}^{j-1}. \tag{13}$$

Таким образом, присоединяя уравнения (10), (11), (12) и (13) к системе (3), имеем систему $n + 1$ уравнений с $n + 1$ неизвестными:

$$HV = F, \tag{14}$$

где H – пятидиагональная матрица с диагональным преобладанием; F – вектор-функция правых частей:

$$H = \begin{pmatrix} -K_1B+1 & B & B & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -2A & 5A+1 & -4A & A & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ A & -4A & 6A+1 & 4A & A & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & A & -4A & 6A+1 & -4A & A \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & A & -4A & 5A+1 & -2A \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & B & B & -K_1B+1 \end{pmatrix};$$

$$F = \begin{pmatrix} \tau^2 f_0^{j+1} + 2y_0^j - y_0^{j-1} \\ \tau^2 f_1^{j+1} + 2y_1^j - y_1^{j-1} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \tau^2 f_i^{j+1} + 2y_i^j - y_i^{j-1} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \tau^2 f_{n-1}^{j+1} + 2y_{n-1}^j - y_{n-1}^{j-1} \\ \tau^2 f_n^{j+1} + 2y_n^j - y_n^{j-1} \end{pmatrix}.$$

При $j = 0$ имеем: $y_i^0 = y(x_i,0) = \varphi(x_i)$. Для выражения y_i^{-1} функцию $y_i(t)$ разложим в ряд Тейлора в окрестности точки $t = 0$.

При $t = -\tau$ получим:

$$y_i(r) = y_i(0) - \tau\dot{y}(0) + \frac{\tau^2}{2}\ddot{y}_i(0) + 0(\tau^3).$$

Используя данное уравнение и начальные условия, имеем:

$$y_i^{-1} = \varphi_i - \tau\psi_i + \frac{\tau^2}{2}\left(-a^2\frac{\partial^4 y(0)}{\partial x^4} + f_i^0\right) + 0(\tau^3);$$

$$i = 0,1,\ldots,n.$$

Решение системы (14) ищем в виде

$$y_i = \alpha_i y_{i+1} + \beta_i y_{i+2} + \gamma_i. \tag{15}$$

Тогда

$$y_{i-1} = (\alpha_{i-1}\cdot\alpha_i + \beta_{i-1})y_{i+1} + \alpha_{i-1}\beta_i y_{i+2} + (\alpha_{i-1}\gamma_i + \gamma_{i-1});$$

$$y_{i-2} = [\alpha_{i-2}(\alpha_{i-1}\alpha_i + \beta_{i-1}) + \beta_{i-2}\alpha_i]y_{i+1} + (\alpha_{i-2}\alpha_{i-1}\beta_i +$$
$$+ \beta_{i-2}\beta_i)y_{i+2} + [\alpha_{i-2}(\alpha_{i-1}\gamma_i + \gamma_{i-1}) + \beta_{i-2}\gamma_i + \gamma_{i-2}].$$

Подставляя значения y_i, y_{i-1}, y_{i-2} в равенство (3), получим формулы для вычисления прогоночных коэффициентов:

$$\alpha_i = [4 + (4 - \alpha_{i-2})\beta_{i-1}]/A_i, \quad \beta_i = -1/A_i,$$

$$\gamma_i = [F_i/A + (4 - \alpha_{i-2})\gamma_{i-1} - \gamma_{i-2}]/A_i,$$

где $A_i = (\alpha_{i-2} - 4)\alpha_{i-1} + \beta_{i-2} + 6 + 1/A$.

Сравнение (10) и (15) при $i = 0$ дает

$$\alpha_0 = \beta_0 = \frac{\beta}{1-KB}; \quad \gamma_0 = -\frac{F_0}{1-K_1B}, \tag{16}$$

а подстановка значения y_0 из (10) в (11) и сравнение полученного уравнения с (15) при $i = 1$. позволяют определить значения α_1, β_1, γ_1:

$$\alpha_1 = \frac{4+K}{D}, \quad \beta_1 = -\frac{1}{D}, \quad \gamma_1 = \frac{F_1 / A - KF_0 / B}{D}, \quad (17)$$

где $K = \dfrac{2}{K_1 - 1/8}, \quad D = 5 + 1/A - K.$

Для нахождения y_{n-1} и y_n значения y_{n-2} и y_{n-3} из (15) при $i = n - 2$ и $i = n - 3$ подставим в (12) и (13):

$$\begin{cases} a_{n-1}y_{n-1} + a_n y_n = K_n, \\ b_{n-1}y_{n-1} + b_n y_n = K_{n-1}, \end{cases}$$

откуда следует

$$y_{n-1} = \frac{K_n b_n - a_n K_{n-1}}{a_{n-1}b - a_n b_{n-1}}; \quad y_n = \frac{a_{n-1}K_{n-1} - K_n b_{n-1}}{a_{n-1}b_n - a_n b_{n-1}}, \quad (18)$$

где $a_{n-1} = 1 + \alpha_{n-2};$

$a_n = 1/b - K_1 + \beta_{n-2};$

$K_n = F_n / b - \gamma_{n-2};$

$b_{n-1} = (\alpha_{n-3} - 4)\alpha_{n-2} + \beta_{n-3} + 5 + 1/A;$

$b_n = (\alpha_{n-3} - 4)\beta_{n-2} - 2;$

$K_{n-1} = F_{n-1} / A - (\alpha_{n-3} - 4)\gamma_{n-2} - \gamma_{n-3}.$

Расчеты проводят в следующем порядке: по формулам (16) и (17) вычисляют α_0, β_0, γ_0 и α_1, β_1, γ_1 затем по формуле (15), определяют α_i, β_i, γ_i при $i = 2, 3,... n - 2$ (прямая прогонка); далее, найдя по формулам (18) y_{n-1} и y_n по формуле (15) определяют y_i, $i = n - 2, n - 3,..., 1, 0$ все (обратная прогонка).

Следует отметить, что внешняя нагрузка в правой части дифференциального уравнения может быть сейсмической или вибрационной.

Предложенный алгоритм расчета может быть использован для расчета балок зданий и сооружений на динамические нагрузки.

Литература

1. *Чуднецов В.П.* Численное решение уравнения поперечных колебаний пролетного строения балочного моста на упругих опорах / В.П. Чуднецов, М. Мурзакматов, М.Ч. Апсеметов // Исследование сейсмостойкости зданий и сооружений. Бишкек, 1991. С. 14–21.
2. *Пискунов И.С.* Дифференциальные и интегральные исчисления. Том II / И.С. Пискунов. М.: Наука, 1976. 518 с.
3. *Мак-Кракен Д., Дорн У.* Численные методы и программирование на Фортране / Д. Мак-Кракен, У. Дорн. М.: Мир, 1977. 584 с.