

О ПЕРИСТНОСТИ РАВНОМЕРНЫХ АБСОЛЮТОВ

ЧЕКЕЕВ А.А., АБЛАБЕКОВА Ч.А.

¹Кыргызский национальный университет им. Ж.Баласагына

²Кыргызский государственный университет строительства,
транспорта и архитектуры

УДК 515.12

В работе используются обозначения и информация из книг [1], [2], [3], [4]. Любое равномерное пространство представляется как пара (X, \mathcal{U}) , где X тихоновское (\equiv вполне регулярное ([4])) – топологическое пространство и \mathcal{U} – равномерность в терминах равномерных покрытий. Символ $f : (X, \mathcal{U}) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$ отображение равномерного пространства (X, \mathcal{U}) в равномерное пространство (Y, \mathcal{V}) . Если $f(X) = Y$, то $f : (X, \mathcal{U}) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$ сюръективное отображение. Символ $f : X \rightarrow Y$ отображение тихоновского пространства X в тихоновское пространство Y , если $f(X) = Y$, то $f : X \rightarrow Y$ – сюръективное отображение. Если $A \subset X$, то $f^\#(A)$ – малый образ подмножества A при отображении $f : X \rightarrow Y$. Имеем $f^\#(A) = Y \setminus f(X \setminus A) = \{y \in Y : f^{-1}(y) \subset A\}$. Ясно, что $f^\#(A) = B$ тогда и только тогда, когда $f^{-1}(B) = A$. Для тихоновского пространства через \mathcal{U}_f обозначается тонкая (fine) равномерность ([1], [4]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 ([2]). Равномерное пространство (X, \mathcal{U}) называется *равномерно τ -перистым*, если существует такая псевдоравномерность $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, что выполнены следующие свойства:

(VP₁) вес $w(\mathcal{V}) \leq \tau$;

(VP₂) $\bigcap \{v(x) : v \in \mathcal{V}\} = B_x$ – бикомпакт в X для любой точки $x \in X$;

(VP₃) Система $\{v(B_x) : v \in \mathcal{V}\}$ – база окрестностей бикомпакта B_x в X для любой точки $x \in X$.

В случае, когда $\tau = \aleph_0$ равномерно \aleph_0 -перистые пространства называются *равномерно перистыми равномерными пространствами*.

Пусть $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$ база равномерности \mathcal{V} , состоящая из открытых равномерных покрытий. Для любого $\beta \in \mathcal{B}$ положим $\beta^\# = f^\#(\beta) = \{f^\#(B) : B \in \beta\}$ и $\mathcal{B}^\# = \{\beta^\# : \beta \in \mathcal{B}\}$.

ЛЕММА 2. Пусть $f : (Y, \mathcal{V}) \rightarrow (Z, \mathcal{W})$ – сюръективное, замкнутое, неприводимое и равномерно непрерывное отображение и $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$ база равномерности \mathcal{V} , состоящая из открытых равномерных покрытий. Тогда $\mathcal{B}^\# = \{\beta^\# : \beta \in \mathcal{B}\}$ образует базу равномерности \mathcal{W} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $\beta \in \mathcal{B}$, $\beta^\#$ является открытым покрытием Z . Это следует из сюръективности, замкнутости и неприводимости равномерно непрерывного отображения $f : (Y, \mathcal{V}) \rightarrow (Z, \mathcal{W})$ ([5]).

Проверим выполнение аксиом базы равномерности.

1. Пусть $\beta_1, \beta_2 \in \mathcal{B}$. Тогда $\beta_1 \wedge \beta_2 \in \mathcal{B}$, где $\beta_1 \wedge \beta_2 = \{\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 : \mathcal{B}_1 \in \beta_1, \mathcal{B}_2 \in \beta_2\}$. Для любых $B_1 \in \beta_1, B_2 \in \beta_2$ имеем $f^\#(B_1 \cap B_2) = f^\#(B_1) \cap f^\#(B_2)$, т. е. $f^\#(\beta_1 \wedge \beta_2) = f^\#(\beta_1) \wedge f^\#(\beta_2)$ и, следовательно, $f^\#(\beta_1) \wedge f^\#(\beta_2) \in \mathcal{B}^\#$, где $\beta_1^\# = f^\#(\beta_1) \in \mathcal{B}^\#$ и $\beta_2^\# = f^\#(\beta_2) \in \mathcal{B}^\#$.

2. Если $\alpha \in \mathcal{B}$ и $\beta \in \mathcal{B}$ таково, что β сильно звездно вписано в α , т. е. для любого $B \in \beta$ найдется такое $A_B \in \alpha$, что $\beta(B) \subset A_B$, то покрытие $\beta^\#$ звездно вписано в

покрытие $\alpha^\#$, т. е. для любого $z \in Z$ найдется такое $A_z \in \alpha$, что $\beta^\#(z) \subset A_z^\#$. Действительно, так как $\beta^\#$ - покрытие Z , то найдется такое $B^\# \in \beta^\#$, что $z \in B^\#$, т. е. $f^{-1}(z) \subset B \in \beta$. Тогда, как мы отмечали выше, найдется такое $A_B \in \alpha$, что $\beta(B) \subset A_B$. Положим $A_z = A_B$. Покажем, что $\beta^\#(z) \subset A_z^\# = A_B^\#$. Пусть $\Gamma^\# \in \beta^\#$ такой произвольный элемент $\beta^\#$, что $z \in \Gamma^\#$ и $z' \in \Gamma^\#$ - произвольный элемент. Тогда $f^{-1}(z) \subset \Gamma$, $f^{-1}(z') \subset \Gamma$ и $f^{-1}(z) \subset B$ и имеем $f^{-1}(z) \subset \Gamma \cap B \neq \emptyset$, т. е. $f^{-1}(z') \subset \Gamma \subset \beta(B) \subset A_B = A_z$. Тогда $z' \in A_B^\# = A_z^\#$, т. е. $\beta^\#(z) \subset A_z^\#$.

Пусть $\omega \in \mathcal{W}$ - произвольное равномерное покрытие Z . В силу равномерной непрерывности отображения $f: (Y, \mathcal{V}) \rightarrow (Z, \mathcal{W})$ найдется такое $\nu \in \mathcal{V}$, что покрытие $f(\nu)$ вписано в ω . Пусть $\beta_\nu \in \mathcal{B}$ такое равномерное покрытие, что β_ν вписано в покрытие ν . Тогда открытое равномерное покрытие $\beta_\nu^\#$ вписано в $f(\nu)$ и, следовательно, в ω . Это означает, что семейство $\mathcal{B}^\#$ - база равномерности ω .

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f: (X, \mathcal{U}) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$ сюръективное замкнутое неприводимое равномерно непрерывное отображение. Тогда из равномерной τ -перистности равномерного пространства (X, \mathcal{U}) следует равномерная τ -перистность равномерного пространства (Y, \mathcal{V}) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\omega \subset \mathcal{W}$ псевдоравномерность, удовлетворяющая свойствам (VP_1) - (VP_3) определения 1 и $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$ - база псевдоравномерности, состоящая из открытых равномерных покрытий. Тогда, в силу леммы 2, семейство из открытых равномерных покрытий $\mathcal{B}^\# = \{\beta^\# : \beta \in \mathcal{B}\}$ - база псевдоравномерности $\omega \subset \mathcal{V}$ на Y . Покажем, что для псевдоравномерности ω выполняются свойства (VP_1) - (VP_2) определения 1, откуда следует равномерная τ -перистность пространства (Y, \mathcal{V}) . Ясно, что $|\mathcal{B}^\#| = |\mathcal{B}| \leq \tau$. Для любого $y \in Y$ пусть $x \in X$ такое, что $y = f(x)$. Так как $\mathcal{B}^\#$ - база псевдоравномерности ω , то для любой точки $y \in Y$, $B_y = \bigcap \{\beta^\#(y) : \beta^\# \in \mathcal{B}^\#\}$ - замкнуто в Y относительно топологии, порожденной псевдоравномерностью ω . Следовательно, B_y замкнуто в Y ([1], [2]). По условию $B_x = \bigcap \{\beta(x) : \beta \in \mathcal{B}\}$ - бикомпакт в X для любого $x \in X$. Покажем, что $f^\#(B_x) = B_y$. Пусть $z \in Y$ такая произвольная точка, что $f^{-1}(z) \subset B_x$. Тогда $f^{-1}(z) \subset \beta(x)$ для любого $\beta \in \mathcal{B}$. Для любого $\beta \in \mathcal{B}$ выберем $\alpha, \beta \in \mathcal{B}$ таким образом, что γ - звездно вписано в α , а α сильно звездно вписано в β . Тогда $f^{-1}(z) \subset \gamma(x) \subset A_x \subset [A_x]_X \subset \alpha(A_x)$ и $f^{-1}(x) \cap A_x \neq \emptyset$. Тем более $f^{-1}(x) \cap [A_x]_X \neq \emptyset$. Для заданного отображения $f: (X, \mathcal{U}) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$ имеем $f([A_x]_X) = [f^{-\#}(A_x)]_Y$ ([5]), следовательно, $y \in [f^{-\#}(A_x)]_Y = [A_x^\#]_Y$, где $A_x^\# \in \alpha^\#$. Тогда $y \in [A_x^\#]_Y \subset \alpha^\#(A_x^\#) \subset \beta^\#(y)$ и $z \in f^\#([A_x]_X) = [f^{-\#}(A_x)]_Y$, т. е. $z \in \beta^\#(y)$ для любого $\beta^\# \in \mathcal{B}^\#$, т. е. $z \in B_y = \bigcap \{\beta^\#(y) : \beta^\# \in \mathcal{B}^\#\}$. Равенство $f^\#(B_x) = B_y$ доказано. Ясно, что $B_y \subset f(B_x)$ и, следовательно, B_y - бикомпактно, как замкнутое подпространство бикомпакта $f(B_x)$, для любого $y \in Y$.

Система $\{\beta^\#(B_y) : \beta^\# \in \mathcal{B}^\#\}$ определяет базу окрестностей бикомпакта B_y в (Y, \mathcal{V}) . Пусть O - произвольное открытое множество в Y , содержащее бикомпакт B_y , т. е. $B_y \subset O$. Тогда $f^{-1}(O)$ открыто в (X, \mathcal{U}) и $B_x = f^{-1}(B_y) \subset f^{-1}(O)$. Следовательно, существует такое

$\beta \in \mathcal{B}$, что $B_x = \beta(B_x) \subset f^{-1}(O)$. Тогда из, легко доказуемых равенств, $f^\#(\beta(B_x)) = \beta^\#(B_y)$, $f^{-1}(\beta^\#(B_y)) = \beta(B_x)$, имеет место включение: $f^\#(B_x) = (B_y) \subset \beta^\#(B_y) \subset f^\#(f^{-1}(x)) \subset O$, которое доказывает, что $\{\beta^\#(B_y) : \beta^\# \in B^\#\}$ является базой окрестностей бикомпакта B_y для любой точки $y \in Y$.

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть $f : (X, \mathcal{U}) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$ удовлетворяет условиям теоремы 3. Тогда если (X, \mathcal{U}) равномерно перистое равномерное пространство, то (Y, \mathcal{V}) также равномерно перисто.

Доказательство непосредственно следует из теоремы при $\tau = \aleph_0$.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Пусть $f : X \rightarrow Y$ сюръективное, замкнутое неприводимое отображение. Тогда если X – перистый паракомпакт, то Y также перистый паракомпакт

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для тонких равномерностей \mathcal{U}_f и \mathcal{V}_f на X и Y , соответственно имеем равномерно непрерывное отображение $f : (X, \mathcal{U}_f) \rightarrow (Y, \mathcal{V}_f)$, удовлетворяющее теореме 3. Так как X – перистый паракомпакт ([5]), то (X, \mathcal{U}_f) является равномерно перистым пространством.

Это следует из известной характеристики перистых паракомпактов ([5]). Тогда из теоремы 3 следует, что (Y, \mathcal{V}_f) – равномерно перистое пространство, следовательно, из [6] следует, что Y – перистый паракомпакт.

Следствие доказано.

ТЕОРЕМА 4. Пусть (\dot{X}, \mathcal{U}) равномерный абсолют равномерного пространства (X, \mathcal{U}) . Тогда следующие условия равносильны:

1. (X, \mathcal{U}) – равномерно τ – перисто
2. (\dot{X}, \mathcal{U}) – равномерно τ – перисто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация $(1 \Rightarrow 2)$ доказана С. С. Токсонбаевым ([6]).

$(2 \Rightarrow 1)$. Естественная проекция $\pi_x : (\dot{X}, \mathcal{U}) \rightarrow (X, \mathcal{U})$ ([2]) равномерного абсолюта (\dot{X}, \mathcal{U}) на равномерное пространство (X, \mathcal{U}) является равномерно совершенным неприводимым отображением, следовательно отображение $\pi_x : (\dot{X}, \mathcal{U}) \rightarrow (X, \mathcal{U})$ – удовлетворяет условиям теоремы 3. Тогда из равномерной τ – перистости (\dot{X}, \mathcal{U}) следует равномерная τ – перистость (X, \mathcal{U}) . Теорема доказана.

Литература

1. Isbell J. R. Uniform spaces. – Providence. – 1964.
2. Борубаев А.А. Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения. – Фрунзе: Илим, 1990.
3. Архангельский А. В., Пономарев В. И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. – М.: Наука, 1974.
4. Энгелькинг Р., Общая топология. – М. Мир, 1986.
5. Архангельский А. В. Об одном классе пространств, содержащем все метрические и все локально бикомпактные пространства // Мат. Сб.- 1965. – Т.97.- № 31.- С. 55-85.
6. Токсонбаев С. С. Об абсолютах равномерных пространств и их равномерно непрерывных отображениях // Канд. Дисс. –Бишкек.-2013.