

БИЙБОСУНОВА Г.И, БИЙБОСУНОВ А.И.  
 КНУ им. Ж.Баласагына, Бишкек  
 BIYBOSUNOVA G. I., BIYBOSUNOV A. I.  
 J. Balasagyn KNU, Bishkek

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВИХРЕВЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ОБТЕКАНИИ ВОГНУТОЙ  
 ПОВЕРХНОСТИ ПОТОКОМ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ И ПОСЛЕДУЮЩАЯ  
 РЕАЛИЗАЦИЯ НА ЭВМ

Кысылган суюктуктун агынын ийилген тегиздикти айланып агып өтүүсүндөгү  
 куюн процессин моделдөө жана андан аркы компьютерде ишке ашыруу

Simulation of vortex processes in a flow around a concave surface fluid flow and  
 subsequent implementation on a computer

**Аннотация:** В статье сформулирована математическая модель, описывающая нелинейную фазу развития возмущений в сжимаемом пограничном слое в поле центробежных сил при больших, но докритических числах Рейнольдса и Гертлера. Результаты, полученные при моделировании гиперзвуковых течений, достаточно хорошо совпадают с экспериментальными данными, полученными ранее и позволяют использовать метод сращиваемых асимптотических разложений для широкого спектра задач в пограничном слое жидкости и газа.

**Аннотация:** Макалада чоң санда талаадагы борбордон качма күчтүн кысылган чек аралык катмарындагы линиялуу эмес фазанын каршылыгынын өсүүсүн сүрөттөөдөгү, Рейнольдстун жана Гетлердин чекке чейинки сандарында математикалык модели түзүлгөн.

Гиперүн агынын моделдөөдөгү алынган жыйынтык, газ жана суюктуктун чек аралык катмарында көпчүлүк маселелер үчүн асимптотикалык бөлүү, улоо ыкмасын колдонууга мүмкүндүк берет жана мурун алынган эксперименталдык маалымат менен эң эле жакшы дал келет.

**Annotation:** An article presents a mathematical model describing the nonlinear phase of the development of disturbances in a compressible boundary layer in the field of centrifugal forces with large but subcritical Reynolds and Gertler numbers. The results agree quite well with the experimental data obtained earlier and allow using the method of matched asymptotic expansions for a wide range of problems in the boundary layer of liquid and gas.

**Ключевые слова:** нелинейность; пограничный слой; вихри; гиперзвуковое течение.

**Урунттуу сөздөр:** линиялуу эмес; чек аралык катмар; куюн; гиперүн агыны.

**Keywords:** nonlinearity; boundary layer; vortices; hypersonic flow.

Вопросы возникновения и развития вихрей Гертлера – Тейлора в сжимаемых потоках привлекает в настоящее время большой интерес в связи с разработкой новых технологий, в частности связанных с гиперзвуком. Данная модель описывает развития вихрей Гертлера - Тейлора и для возмущенных течений около локальных и периодических в трансверсальном направлении неровностей или других пространственных возмущенных течений.

Рассмотрим режим, соответствующий длинам волны вихрей Гертлера – Тейлора  $\lambda$ , сравнимые с толщиной пограничного слоя  $\delta$ . В этом случае характерные размеры возмущенной области течения совпадают по порядку величины, тогда одинаковые порядки будут иметь и возмущенные величины вертикальной и трансверсальной скоростей  $v$   $w$ , что следует из уравнения неразрывности и принципа минимального вырождения.

Предположим, что вихри вызывают нелинейные изменения основного течения, тогда

$$u \approx \Delta u \quad O(1)$$

Нелинейность, проявляющаяся в трансверсальном направлении, дает

$$w \approx \Delta w \quad (1.1)$$

При этом исследуются нелинейные процессы, проявляющиеся в течении с характерным масштабом в направлении координаты  $z$  равным  $\lambda$ , что определяет величину градиента давления в поперечном направлении:

$$\frac{\partial p}{\partial y} \approx \frac{\rho u^2}{x} \quad (1.2)$$

$$\text{Отсюда } \Delta p \approx \kappa. \quad \text{Далее} \quad v \approx w \approx \varepsilon^{\frac{1}{2}} \kappa^{\frac{1}{2}} \quad (1.3)$$

Из уравнения неразрывности и оценок (1.1) - (1.3) можно найти продольный размер возмущенной области  $x \approx \varepsilon^{\frac{1}{2}} \kappa^{\frac{1}{2}}$  (1.4)

Для дальнейшего анализа важно оценить порядок отношения диффузионного и инерционного членов в уравнении продольного импульса:

$$\frac{\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}{\rho u \frac{\partial u}{\partial x}} \approx 0 \left( \varepsilon^{\frac{1}{2}} \kappa^{\frac{1}{2}} \right) \rightarrow 0$$

Понятно, что в таких условиях не выполнено условие прилипания и поэтому необходимо ввести на дне основной области подслоя с толщиной

$$y \approx \varepsilon^{\frac{3}{4}} \kappa^{-\frac{1}{4}}, \text{ течение в котором будет описываться системой уравнений трехмерного}$$

пограничного слоя. Решение такой системы можно представить в виде:  $x \approx 1 + \lambda \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \kappa^{-\frac{1}{2}} x_\alpha$

$$y \approx \lambda y_\alpha$$

$$z \approx \lambda z_\alpha$$

$$u(x, y, z, \varepsilon) \approx u_\alpha(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha) + \dots$$

$$v(x, y, z, \varepsilon) \approx v_\alpha(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha) \cdot \lambda^{-1} \varepsilon^{\frac{3}{2}} \kappa^{\frac{1}{2}} + \dots$$

$$w(x, y, z, \varepsilon) \approx w_\alpha(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha) \cdot \varepsilon^{\frac{1}{2}} \kappa^{\frac{1}{2}} + \dots$$

$$\rho(x, y, z, \varepsilon) \approx \rho_\alpha(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha) + \dots \quad (1.5)$$

$$H(x, y, z, \varepsilon) \approx H_\alpha(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha) + \dots$$

$$P(x, y, z, \varepsilon) \approx (\gamma \mu_\infty^2 \rho^{-1} + \varepsilon \kappa \rho_\alpha(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha)) + \dots$$

Подстановка этих разложений в систему уравнений Навье – Стокса и совершение предельного перехода при  $Ge \rightarrow \infty, Re \rightarrow \infty$  приводят к модифицированной системе уравнений Эйлера для трехмерного возмущенного течения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho_\alpha u_\alpha)}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial(\rho_\alpha v_\alpha)}{\partial y_\alpha} + \frac{\partial(\rho_\alpha w_\alpha)}{\partial z_\alpha} &= 0 \\ u_\alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} + v_\alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial y_\alpha} + w_\alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial z_\alpha} &= 0 \\ \beta \left[ u_\alpha \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha} + v_\alpha \frac{\partial v_\alpha}{\partial y_\alpha} + w_\alpha \frac{\partial v_\alpha}{\partial z_\alpha} \right] + u_\alpha^2 + \frac{1}{\rho_\alpha} \frac{\partial \rho_x}{\partial y_\alpha} &= 0 \\ \left[ u_\alpha \frac{\partial w_\alpha}{\partial x_\alpha} + v_\alpha \frac{\partial w_\alpha}{\partial y_\alpha} + w_\alpha \frac{\partial w_\alpha}{\partial z_\alpha} \right] + \frac{1}{\rho_\alpha} \frac{\partial \rho_x}{\partial z_\alpha} &= 0 \\ u_\alpha \frac{\partial H_\alpha}{\partial x_\alpha} + v_\alpha \frac{\partial H_\alpha}{\partial y_\alpha} + w_\alpha \frac{\partial H_\alpha}{\partial z_\alpha} &= 0 \\ \beta &= \frac{\varepsilon^2}{\lambda^2} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Отличие системы уравнений (1.6) от обычной системы уравнений Эйлера состоит в наличии члена в уравнении для поперечного импульса, учитывающего влияние центробежных сил.

Другая особенность связана с отсутствием градиента давления в уравнении продольного импульса. Из второго уравнения системы (1.6) следует тогда сохранение продольной составляющей вектора скорости вдоль линии тока. Аналогичным первым интегралом обладает и уравнение для полной энтальпии. Для возмущений малой амплитуды решение системы уравнений (1.6) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} u(x) &= u_0(y_\alpha) + \tau u_\alpha(y_\alpha) \sin z_\alpha \exp(\alpha x_\alpha) + \dots \\ v_\alpha &= \tau v_\alpha(y_\alpha) \exp(\alpha x_\alpha) \sin z_\alpha + \dots \\ w_\alpha &= \tau w_\alpha(y_\alpha) \exp(\alpha x_\alpha) \cos z_\alpha + \dots \\ H_\alpha &= H_0(y_\alpha) \tau G_0(y_\alpha) \exp(\alpha x_\alpha) \sin z_\alpha + \dots \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned}\rho_\alpha &= r_0(y_\alpha) + \tau R_\alpha(y_\alpha) \exp(\alpha x_\alpha) \sin z_\alpha + \dots \\ P_\alpha &= P_0(y_\alpha) + \tau P_\alpha(y_\alpha) \exp(\alpha x_\alpha) \sin z_\alpha + \dots \\ \tau &\ll 1\end{aligned}$$

Ограничиваясь нулевым и первым приближением из (1.6) и (1.7) можно получить систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho_0} P_0' &= -u_0^2 \\ \alpha u_0 w_\alpha + \frac{R_\alpha}{\rho_0} &= 0 \\ \alpha u_0 G_\alpha + v_\alpha H_0' &= 0 \\ H_0 &= \frac{\gamma-1}{\rho_0 \mu_\infty^2} + \frac{u_0^2}{2} \\ G_\alpha &= -\left(1/\left(\frac{1}{\gamma}-1\right)\mu_\infty^2\right) R_\alpha/\rho_0^2 + u_0 u_\alpha \\ \rho_0 &= \mu_0^2 (u_0^2 \mu_\infty^2) \rho_0 = \rho_0' v_1(\alpha u_0) \\ (u)' &= \frac{\partial}{\partial y} \\ \alpha \rho_0 u_\alpha + \alpha u_\alpha R_\alpha + \rho_0 v_\alpha' + v_\alpha \rho_0' - \rho_0 w_\alpha &= 0 \\ \alpha u_0 u_\alpha + v_\alpha u_0' &= 0 \\ \beta[\alpha u_0 u_\alpha + 2u_0 u_\alpha] + \frac{1}{\rho_0} P_\alpha u_0' - \frac{R_\alpha}{\rho_0^2} \rho_0' &= 0\end{aligned}\tag{1.8}$$

(1.9)

где

Если ввести новую переменную  $z = \frac{u_0}{u_0'}$ , то тогда можно свести систему (1.8) к одному дифференциальному уравнению:

$$z'' + 2z' \left(\frac{\mu_0'}{\mu_0}\right) + z \left(-\beta + 2\left(\frac{\mu_0'}{\mu_0 \alpha^2}\right)\right) = 0\tag{1.10}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned}v_1(0) &= 0; & v_1(\infty) &= 0 \\ z(\infty) &= 0, & z(0) &= const.\end{aligned}\tag{1.11}$$

Это уравнение представляет собой задачу на собственные значения. Существует два пути решения уравнения (1.10) с граничными условиями (1.11): поиск собственных значений матрицы, получающейся при разностном представлении уравнения (1.10) второй путь, как результат решения дифференциального уравнения методом Рунге-Кутты.

На рис. 1 и 2, представлены профили скорости  $z$  для различных значений  $g$ ,  $\mu_\infty$ ,  $\gamma$ .

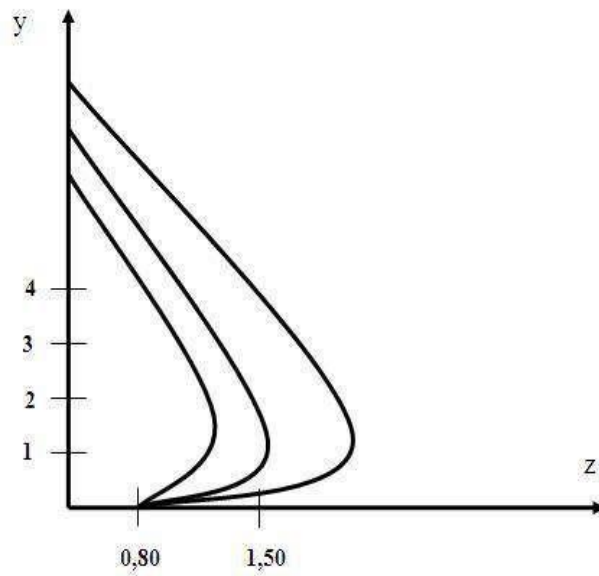


Рис.1. График распределения скорости  $z$  при

$$\begin{aligned} &\mu=0,2, g=2,5, \gamma=1,8 \alpha=15, \beta=0,01 \\ &\mu=0,2, g=0,6, \gamma=1,8 \alpha=15, \beta=0,01 \\ &\mu=0,2, g=2,0, \gamma=1,8 \alpha=3,5, \beta=0,01 \end{aligned}$$

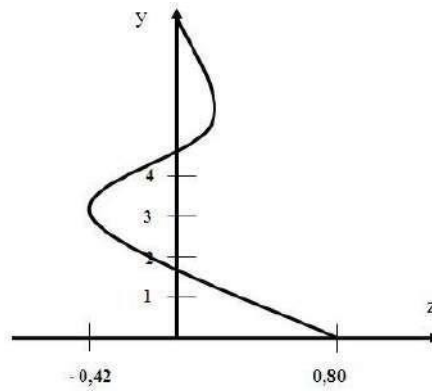


Рис.2. График распределения скорости  $z$  при  
 $\mu=1,4, g=1,4, \gamma=1,8 \alpha=15, \beta=0,01$

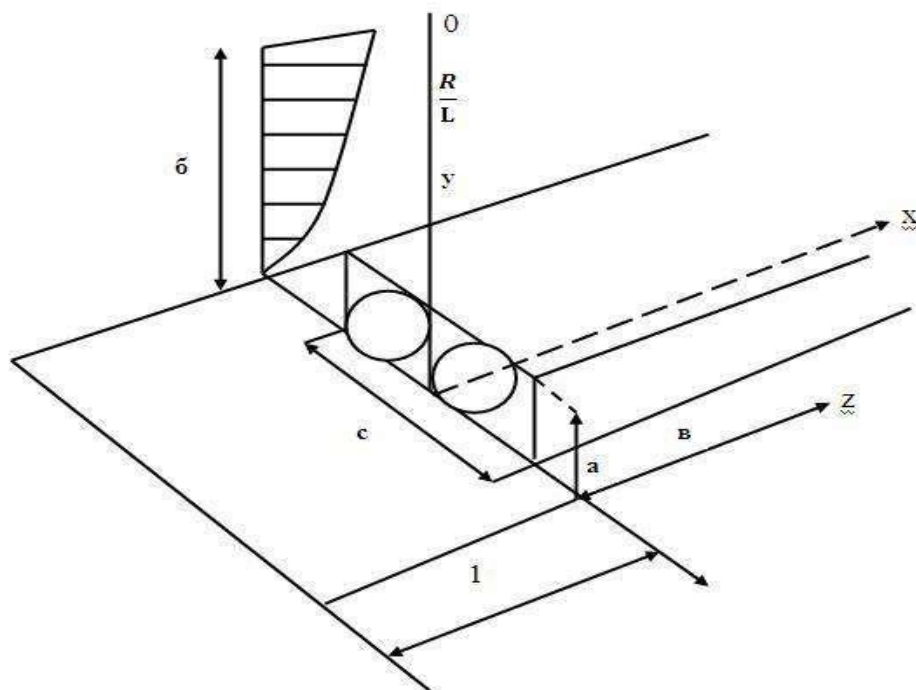


Рис.3. Схема исследуемого течения

Данные результаты, полученные при моделировании гиперзвуковых течений, достаточно хорошо совпадают с экспериментальными данными, полученными, в том числе в работе [4] и позволяют использовать метод сращиваемых асимптотических разложений для широкого спектра задач в пограничном слое жидкости и газа.

**Список цитируемых источников**

2. Ершин Ш.А. Гидроаэродинамика. Алматы, 2013 г.
3. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике. Москва, изд-во Мир, 1967 г.
4. Peerhossaini Н. On the subject of Gortler vortices. Lecture notes in Physics, 1984, ed. S. Zaleski, pp. 376 – 384.
5. Бийбосунов А.И. Неустойчивость в поле центробежных сил при обтекании вогнутой поверхности потоком вязкой сжимаемой жидкости. Материалы Международной научно-практической конференции «Проблемы механики и прикладной математики», г.Бишкек, 1995 г.

**Рецензенты:** Кабаева Г.Дж. - доктор физико-математических наук, профессор КГТУ им. И. Раззакова,  
Орозобекова А.К. – кандидат физико-математических наук, доцент КГУСТА им. Н. Исанова