

АВТОМОДЕЛЬНЫЙ КОЛЛАПС ИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ СФЕРЫ
 Изотермикалык сферадагы автомоделдик коллапс
 Selfsimilar collapse of an isothermal sphere

Аннотация: выполнено качественное исследование автомодельного коллапса идеальной изотермической жидкости в слабом поле тяготения. Найдены новые типы физически интересных движений жидкости.

Аннотация: тартылуусу начар болгон талаадагы идеалдык изотермикалык суюктуктун автомоделдик коллапсын изилдөө сапаттуу жүргүзүлдү. Суюктуктун кыймылынын физикалык жактан кызыктуу болгон жаңы типтери табылды.

Annotation: the qualitative investigation of the selfsimilar collapse of an isothermal perfect fluid in a weak gravitational field is performed. New types of physically interesting motions of the fluid are found.

Ключевые слова: изотермическая жидкость; автомодельные движения.

Негизги сөздөр: изотермикалык суюктук; автомоделдик кыймылдар.

Keywords: isothermal fluid; selfsimilar motions.

1. Введение

Проблема гравитационного коллапса различных типов материи относится к основным задачам астрофизики и теории гравитации. В нерелятивистском случае из литературы известен целый ряд коллапсирующих решений, включая случай коллапса жидкости, описываемой политропным уравнением состояния $p \sim \rho^\gamma$, где ρ и p есть плотность и давление жидкости, а γ – некоторая константа. Случай $\gamma = 1$ соответствует так называемому изотермическому газу, гравитационный коллапс которого – хорошо изученная проблема. В частности, имеется ряд работ, посвященных рассмотрению автомодельного движения изотермического газа. Укажем некоторые из них.

При рассмотрении коллапса большое значение уделяется выбору начальных условий. Ларсон [1] и Пентсон [2] выбирали нулевую начальную скорость и однородное распределение жидкости. Такие условия обеспечивают гомологичный поток в центральную область системы. Такое решение предполагает наличие на большом расстоянии или, эквивалентно, при $t \rightarrow 0$ направленного внутрь потока, движущегося со скоростью в 3,3 раза больше скорости звука и с плотностью, меняющейся $\sim r^{-2}$. Это дает плотность, в 4,4 раза большую, чем у соответствующей статической конфигурации. Шу [3] критикует эти решения и предлагает новые автомодельные решения, у которых нет подобных проблем. Он предполагает, что начальный профиль распределения плотности есть $p \sim r^{-2}$. Такая сфера квазистатична, находясь в неустойчивом гидростатическом равновесии. Шу показал, что в этом случае облако газа коллапсирует начиная с центра, и волна коллапса направлена наружу (так называемое решение с расширяющейся волной). Хантер [4] продолжил работу в этом направлении и нашел новый класс автомодельных решений, который включает решения Шу как подкласс. Он рассмотрел различные изначально нестабильные сферы и исследовал, может ли их коллапс хорошо описываться автомодельными решениями.

В этой связи представляет интерес рассмотреть качественную картину коллапса изотермической сферы, что и будет сделано в данной статье. Наша цель состоит в рассмотрении общих свойств коллапсирующих решений и в выявлении возможных условий их реализации.

2. Общие уравнения

Мы будем рассматривать систему, состоящую из идеальной изоэнтропической жидкости с лагранжианом $L_m = p$ [5]. Соответствующий тензор-энергии импульса есть:

$$T_i^k = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) c^2 u_i u^k - \delta_i^k p \quad (1)$$

где ρ и p – плотность массы и давление жидкости, u^i – 4-скорость. Выберем метрику в ньютоновском приближении в форме

$$ds^2 = \left(1 + 2 \frac{\psi}{c^2} \right) c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (2)$$

где $d\Omega^2$ есть метрика на единичной 2-сфере, а Ψ – ньютоновский гравитационный потенциал. Используя эту метрику и учитывая выражения для компонента 4-скорости

$$u_0 = \frac{\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad u_1 = \frac{g_{11}}{\sqrt{g_{00}}} \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

где v есть обычная 3-мерная скорость, можно получить следующие компоненты тензора энергии-импульса (1):

$$T_0^0 = f\rho c^2, \quad T_1^1 = -(\rho v^2 + p), \quad (3) \quad T_2^2 = T_3^3 = -p, \quad T_0^1 = -T_1^0 = \rho v c \quad (4)$$

Далее, воспользовавшись законом сохранения $T_{i;k}^k = 0$, получим следующие два уравнения:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{2}{r} \rho v = 0 \quad (5) \quad \text{и} \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0 \quad (6)$$

Далее, вводя функцию массы, содержащейся внутри сферического объема около центра симметрии

$$\partial M / \partial r = 4\pi r^2 \rho \quad (7)$$

уравнение неразрывности (5) можно переписать в следующем виде:

$$\partial M / \partial t + 4\pi r^2 \rho v = 0$$

Тогда, подставляя в уравнение Пуассона $\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) = 4\pi G \rho$

выражение для массы (7), получим уравнение для ньютоновского потенциала:

$$\partial \Psi / \partial r = GM / r^2.$$

Подставляя это выражение в (6), выпишем в окончательном виде уравнения, описывающие динамику рассматриваемой системы:

$$\frac{\partial M}{\partial t} + 4\pi r^2 \rho v = 0, \quad (8) \quad \frac{\partial M}{\partial r} = 4\pi r^2 \rho, \quad (9) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{GM}{r^2}, \quad (10)$$

Здесь $M = M(r, t)$ есть полная масса внутри радиуса r в момент времени t . Эти уравнения инвариантны относительно замены направления времени $t \rightarrow -t$, $v \rightarrow -v$, что позволяет рассматривать только диапазон $0 < t < \infty$.

В случае политропного уравнения состояния с индексом политропы γ

$$p = K \rho^\gamma, \quad (11)$$

где K есть некоторая произвольная положительная константа, система (8)-(10) допускает введение автомодельных переменных, задаваемых в форме:

$$x = \frac{r}{\sqrt{kt^n}}, \quad v(r, t) = \sqrt{kt^{n-1}} u(x), \quad \rho(r, t) = \frac{\alpha(x)}{4\pi G t^2},$$

$$p(r, t) = \frac{k}{4\pi G} t^{2n-4} [\alpha(x)]^\gamma, \quad M(r, t) = \frac{k^{\frac{3}{2}} t^{3n-2}}{(3n-2)G} m(x), \quad (12)$$

где k есть некоторая размерная константа, а n – безразмерная константа. Переписывая уравнения (8) и (9) с использованием этих безразмерных автомодельных переменных, получим алгебраическое выражение на $m(x)$ через $\alpha(x)$ и $u(x)$:

$$m(x) = x^2 \alpha(nx - u). \quad (13)$$

Далее, уравнение (10) дает:

$$\gamma \alpha^{\gamma-2} \frac{d\alpha}{dx} - (nx - u) \frac{du}{dx} = -(n-1)u - \frac{nx - u}{3n-2} \alpha. \quad (14)$$

Продифференцировав теперь (13) по x и учитывая (9), получим:

$$(nx - u) \frac{d\alpha}{dx} - \alpha \frac{du}{dx} = -2 \frac{x-u}{x} \alpha \quad (15)$$

Из уравнения (11) и (12) видно, что используемые здесь автомодельные переменные допускают следующую зависимость:

$$K = k(4\pi G)^{\gamma-1} t^{2(n+\gamma-2)} \quad (16)$$

Здесь мы будем рассматривать случай, когда $\gamma = 1$. Учитывая это и требуя, чтобы параметр K из (16) был независим от времени [т.е. чтобы

$(n + \gamma - 2) = 0$, необходимо положить $n = 1$. Тогда уравнения (14) и (15) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{da}{dx} = \frac{\alpha}{(x-u)^2 - 1} \left[\alpha - 2 \frac{x-u}{x} \right] (x-u) \quad (17)$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{(x-u)^2 - 1} \left[\alpha(x-u) - \frac{2}{x} \right] (x-u) \quad (18)$$

Таким образом, система (17)-(18) сводится к задаче о движении изотермальной жидкости, рассмотренной в [3]. В следующем разделе мы выполним качественный анализ этой системы.

3. Качественное исследование системы

Для выполнения качественного анализа, перепишем уравнения (17)-(18) с использованием новой функции $v = (x-u)$ в следующем виде (выше мы уже использовали символ v для обозначения 3-скорости. Но это не должно приводить к путанице):

$$\frac{da}{dx} = \frac{1}{v^2 - 1} \left[\alpha - 2 \frac{v}{x} \right] v \quad (19) \quad \frac{dv}{dx} = \frac{(1-\alpha)v^2 + 2v/x - 1}{v^2 - 1} \quad (20)$$

(Отметим, что эти уравнения инвариантны относительно замены переменных $x \rightarrow -x$, $v \rightarrow -v$, $\alpha \rightarrow \alpha$.) Для этой системы не выполняются условия Липшица, т.е. расходятся производные по α и v от правых частей при $v = \pm 1$. Это указывает на наличие у системы линии в пространстве x, α, v , все точки которой являются особыми. Для исследования этих особых точек, перепишем систему (19)-(20), параметризовав ее через новую переменную s :

$$dx/ds = v^2 - 1 = P(x, \alpha, v), \quad (21)$$

$$d\alpha/ds = \alpha(\alpha - 2 \cdot v/x)v = Q(x, \alpha, v), \quad (22)$$

$$dv/ds = (1-\alpha)v^2 + 2v/x - 1 = S(x, \alpha, v). \quad (23)$$

Эта система описывает поведение траекторий в трехмерном фазовом пространстве $n = 3$. При этом будет иметься $n + 2$ топологически различных картинок: одна соответствует обыкновенной точке, а 4 – различным типам особых точек (6). Для их исследования, приравнивая правые части системы (21)-(23) нулю, находим уравнение особой линии в виде:

$$\alpha_0 = 2 \frac{v_0}{x_0}, \quad v_0 = \pm 1 \quad (24)$$

Причем, исходя из физического смысла переменной α , которая, будучи представителем плотности массы, должна быть положительной, необходимо, чтобы $v_0 = 1$ при $x_0 > 0$ или $v_0 = -1$ при $x_0 < 0$. Для выяснения типа точек этой особой линии составим соответствующее характеристическое уравнение

$$\lambda(\lambda^2 - 2\lambda - \alpha_0^2 + 2\alpha_0) = 0,$$

имеющее три корня:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \alpha_0, \quad \lambda_3 = 2 - \alpha_0. \quad (25)$$

Отсюда видно, что тип особых точек будет зависеть от величины α_0 . Кроме того, поскольку один из корней равен нулю, то такое состояние равновесия является сложным, и его рассмотрение требует дополнительного исследования. Для этого разложим сначала правые части системы (21)-(23) в ряд по степеням $(x-x_0)$, $(\alpha-\alpha_0)$, $(\nu-\nu_0)$, путем введения новых переменных $\xi = x - x_0$, $\eta = \alpha - \alpha_0$, $\theta = \nu - \nu_0$.

Тогда, учитывая значения x_0, α_0, ν_0 из (24) на особой линии, будем иметь:

$$\frac{d\xi}{ds} = 2\theta + f, \quad \frac{d\eta}{ds} = \frac{\alpha_0^3}{2}\xi + \alpha_0\eta - \alpha_0^2\theta + g, \quad (27)$$

$$d\theta/ds = (\alpha_0^2/2)\xi - \eta + (2 - \alpha_0)\theta + k, \quad (28)$$

$$\text{где } f = \theta^2, \quad (29) \quad g = \eta^2 + (1/2)\alpha_0^2\xi\eta - (1/4)\alpha_0^2(\alpha_0\xi - 2\theta)^2, \quad (30)$$

$$k = 1/4[\alpha_0^3\xi^2 - 2\alpha_0^2\xi\theta - 4(\alpha_0 - 1)\theta^2 - 8\eta\theta]. \quad (31)$$

Далее, следуя методике исследования сложных состояний равновесия, изложенной в (7), применим к системе (26)-(28) неособое линейное преобразование

$$e = p_{11}\xi + p_{12}\eta + p_{13}\theta, \quad y = p_{21}\xi + p_{22}\eta + p_{23}\theta, \quad w = p_{31}\xi + p_{32}\eta + p_{33}\theta,$$

с помощью которого эта система может быть приведена к более простому («каноническому») виду:

$$de/ds = \lambda_1 e + \bar{f}(e, y, w), \quad (32) \quad dy/ds = \lambda_2 y + \bar{g}(e, y, w), \quad (33)$$

$$dw/ds = \lambda_3 w + \bar{k}(e, y, w), \quad (34)$$

где функции $\bar{f}, \bar{g}, \bar{k}$ получаются из функций f, g, k после применения вышеуказанного неособого преобразования, а величины коэффициентов λ_i берутся из (25). Общий подход к исследованию типа особых точек, описываемых системой (32)-(34), состоит в поиске решений для правых частей второго и третьего уравнений путем их разложения в ряд Тэйлора [7]. Тогда имеем:

$$\lambda_2 y + \bar{g} = 0, \quad \lambda_3 w + \bar{k} = 0. \quad (35)$$

Решения этих алгебраических уравнений ищем в виде рядов по степеням e : $y = a_1 e + b_1 e^2 + c_1 e^3$, $w = a_2 e + b_2 e^2 + c_2 e^3$, откуда находим следующие выражения:

$$y = \alpha_0 / \alpha_2^2 e^2 \equiv \varphi_1(e), \quad w = \alpha_0 / \alpha_2^3 e^2 \equiv \varphi_2(e).$$

Подставляя эти выражения в функцию \bar{f} , имеем:

$$\psi(e) \equiv f[e, \varphi_1(e), \varphi_2(e)] = \frac{\alpha_0^2}{16\alpha_1^2} \left(\frac{2}{\alpha^3} - 1 \right)^2 e^4.$$

В приведенных выше выражениях введены обозначения $\alpha_1 = \alpha_0 - 1$, $\alpha_2 = \alpha_0 - 2$. Следуя [7], поведение решений в окрестности рассматриваемых особых точек будет определяться величиной показателя степени m у e и знаком коэффициента

$$\Delta_m = \frac{\alpha_0^2}{16\alpha_1^2} \left(\frac{2}{\alpha^3} - 1 \right)^2$$

перед e . Очевидно, что в нашем случае Δ_m будет всегда положительным, а $m = 4$. Это соответствует сложному состоянию равновесия, имеющему один узловой сектор и два седловых. Учитывая, что коэффициенты перед y и w из (35) есть

$$b_y \equiv \lambda_2 = \alpha_0 > 0, \quad b_w \equiv \lambda_3 = 2 - \alpha_0$$

будем иметь два типа поведения фазовых кривых в окрестности особых точек:

- (i) При $\alpha_0 < 2$. В этом случае $b_y \Delta_m > 0$, $b_w \Delta_m > 0$, а значит узловой сектор расположен справа от осей y и w . Поведение фазовых кривых в этом случае показано на рис.1, точка D .
- (ii) При $\alpha_0 > 2$. В этом случае $b_y \Delta_m > 0$, $b_w \Delta_m < 0$, а значит узловой сектор расположен слева от оси w и справа от оси y . Поведение фазовых кривых в этом случае показано на рис.1, точка

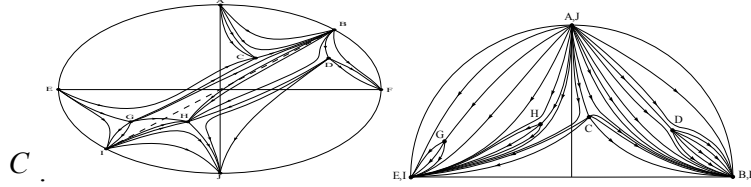


Рис. 1. Фазовые траектории для переменных V (левый рисунок) и α (правый рисунок).

Аналогичным образом можно провести исследование фазовых траекторий системы (21)-(23) на бесконечности по осям x, α, v , воспользовавшись для этого известным методом отображения фазового пространства на сферу Пуанкаре [7].

Полученные в результате фазовые портреты на плоскости (v, x) и (α, x) представлены на рис.1. В табл. 1 показаны значения функций v, α в различных точках фазового пространства. Отметим, что все особые точки соответствуют сложным состояниям равновесия, когда некоторые или все корни характеристического уравнения равны нулю. Анализ такого рода особых точек выполняется аналогично анализу, описанному выше.

Таблица 1. Значения переменных x, v, α в особых точках ($A \dots J$) системы (21)-(23).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
x	0	$+\infty$	< 1	> 1	$-\infty$	$+\infty$	< -1	> -1	$-\infty$	0
v	$+\infty$	$+\infty$	+1	+1	-1	+1	-1	-1	$-\infty$	$-\infty$
α	$+\infty$	0	> 2	< 2	0	0	< 2	> 2	0	$+\infty$

Жирная штриховая прямая BI на рис.1 соответствуют точному аналитическому решению уравнения (19)-(20) в статическом случае

$$v = x, \quad \alpha = 2/x^2.$$

Это решение пересекает особую линию (24) в точке $x_0 = 1$, т.е. является предельным вариантом сепаратрис IG, GC и CB . Прямая BI делит фазовую плоскость пополам: слева от нее величина скорости $u = x - v$ будет всегда отрицательной, а справа – положительной. Решения, лежащие внутри сектора ACB , описывают коллапсирующие конфигурации, рассмотренные в (3). Эти решения выходят из особой точки B с нулевой начальной скоростью u и плотностью $\alpha \rightarrow 0$ с последующим переходом в точку A двумя путями: либо по сепаратрисам BC, CA через особую точку C , либо без прохождения через нее. Также возможен вариант выхода из точки B по сепаратрисе BC с последующим переходом в точку A по узловым траекториям CA . Отметим здесь, что поскольку точка C является лишь одной из точек особой линии (24), то количество особых точек типа C бесконечно. Соответственно, наряду с траекториями, лежащими в секторе ACB , имеется целый набор фазовых траекторий, идущих по сепаратрисам BCA и описывающих коллапс конфигурации.

Теперь покажем, где на полученной фазовой плоскости расположены решения, рассмотренные в (3). Пользуясь введенной в (3) терминологией, назовем решения с положительными производными $d(-u)/dx$ как плюс-решения, а с отрицательными – минус-решения. Тогда можно ввести в рассмотрение следующие типы движения:

(I) Кривые, лежащие внутри сектора ACB и проходящие из критической точки B в критическую точку A , соответствуют, по

классификации [3], плюс-решениям без критических точек, поскольку на своем пути (при $x \neq 0, \infty$) они не проходят через критическую точку (см. тонкие сплошные линии на рис. 2 из (3)).

(II) Часть тонкой штриховой линии, соединяющей критические точки B и H и лежащей выше толстой штриховой прямой BI , т.е. когда $u < 0$, соответствует плюс-решениям с критическими точками (см. штриховые линии на рис. 2 из [3]). Траектории такого типа стартуют при некотором конечном x и асимптотически выходят на постоянное значение $-u$ при больших x в критической точке B . Согласно (3) такие решения могут быть потенциально полезными при описании самогравитирующего ветра.

(III) Часть точечной линии, соединяющей критические точки G и H и лежащей ниже толстой штриховой прямой BI , соответствует минус-решениям с критическими точками. (Отметим, что поскольку в этой части фазовой плоскости $x < 0$, т.е. $t < 0$, и $u > 0$, то эти решения можно интерпретировать как обращенные во времени двойники решений с $t, x > 0$ и $u < 0$.) Траектории такого типа стартуют при некотором $|x| \leq 1$ с $u = -0$ с последующим переходом через критическую точку H в критическую точку J при $|x| \rightarrow 0, u \rightarrow -\infty$.

Помимо указанных выше типов движения, рассматриваемые уравнения допускают и другие виды физически интересных движений:

(i) Траектории, идущие по сепаратрисам BDH с проходом через критическую точку D при $x > 0$ и стремящиеся затем к центру конфигурации при $x = 0$, имея при этом конечную скорость $u = |v|$. Такие траектории соответствуют движению по параболическим (или гиперболическим) траекториям, которые описывают расширение с начальной положительной и конечной скоростью u , которая асимптотически (при $x \rightarrow +\infty$) стремится к 0 (или постоянному положительному значению) в точке B .

(ii) Траектории, лежащие левее сепаратрис BDH и правее линии BI , имеют аналогичный (i)-му пункту тип движения, но уже без прохода через критическую точку при $x > 0$.

(iii) Часть траекторий, лежащих правее BDH и имеющих конечную положительную скорость u при $x \rightarrow 0$ и переходом через особую точку D на асимптотику $x \rightarrow +\infty$ с конечной положительной скоростью u в точке B .

Эти три типа решений, будучи решениями, описывающими расширяющиеся конфигурации, дополняют плюс-решения с критическими точками из (II), причем они могут как проходить, так и не проходить через особую точку.

Литература

1. Larson R. B. Numerical calculations of the dynamics of collapsing proto-star // Mon. Not. R. Astron. Soc. 1969. V. 145. P.271.
2. Penston M. V. Dynamics of self-gravitating gaseous spheres-III. Analytical results in the free-fall of isothermal cases // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 1969. V. 144. P.425.
3. Shu F. H. Selfsimilar collapse of isothermal spheres and star formation // Astrophys. J. 1977. V. 214. P.488.
4. Hunter C. // Astrophys. J. 1977. V. 218. P.834.
5. Stanukovich K.P. // Soviet Physics Doklady, 1964. V. 9. P.63.
6. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуваев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1976. 384 с.
7. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1976. 496 с.