УДК 532.546

ОБТЕКАНИЕ ПРОНИЦАЕМОГО ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Ж.С.САЛАМАТОВ
E.mail. ksucta@elcat.kg

Айландыруудан пайда болгон жана бетинин бир жагынан экинчи жагына суюктукту =тк=зъп жиберъчъ нерсе аркылуу агып =тк=н идеалдык кысылбоочу суюктуктун потенциалдык агымы ж=нънд=ъ гидродинамикалык маселе каралат . Суюктук горизонталдык октун багыты боюнча агат деп эсептелинет.

Рассматривается обтекание проницаемого тела вращения неограниченным потенциальным потоком несжимаемой жидкости параллельно горизонтальной оси.

The hydrodynamical problem about aflow of the nontight flat body limited by the contour (L), unlimited stream an ideal incompressible liqnid in Parallel axis ox is considered.

Обтекание считается безотрывным установившимся и потенциальным. Скорость жидкости на бесконечности V_{00}.

По принципу суперпозиций потенциал скоростей $\Phi(z,r)$ течения представим в следующем виде (можно рассмотреть функцию тока):

$$\Phi(z,r) = \varphi_\infty(z,r) + \varphi_1(z,r) = V_\infty z + \varphi_1(z,r), \qquad (1)$$

где z,r – цилиндрические координаты, первое слагаемое характеризует невозмущенный поток, а второе – дополнительное течение, возникающее в результате обтекания тела, причем скорость этого течения стремится к нулю при удалении в бесконечность:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial r} = 0, (z,r) \in \infty.$$

Внешнюю часть области по отношении контура (L), ограничивающего теловращение, назовем первой и обозначим через (Ω_1), а внутреннюю часть, заключенную контуром (L), назовем второй областью и обозначим через (Ω_2). Все величины, относящиеся к этим областям, снабжаются соответственно индексами 1 и 2. Например, $\varphi_1(z,r), \psi_1(z,r)$ есть потенциал скоростей и функция тока в первой области (рис.1).

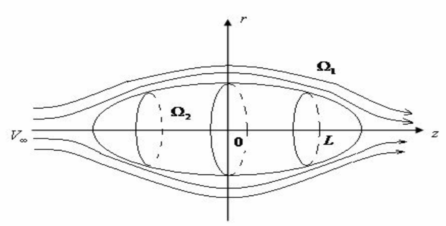

Рис. 1.Схема обтекания

Во внешней области (Ω_1) течение потенциальное, жидкость набегает на контур (L) и частично обтекает его безотрывно, частично просачивается через контур (L) в область (Ω_2).

Предположим, что перепад давления P через контур (L) связан со скоростью проницания V_n равенством (1):

$$\Delta P = P_2 - P_1 = \frac{\rho}{2m^2} \cdot V_n^{\ 2},$$

(2)

где V_n – нормальная составляющая скорости через контур (L), ρ – плотность жидкости, m – параметр, зависящий от свойства тела.

В данной задаче для потенциала скоростей возмущенного потока $\varphi_1(z,r)$ краевая задача ставится следующим образом:

$$\Delta\varphi_1 = \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} = 0,\, z, r \in \Omega_1,$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} = -V_1\cos(r,x) + V_n,\, z, r \in L,$$

(3)

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial r} = 0,\, z, r \in \infty.$$

Поставленную задачу (3) будем решать методом гидродинамических особенностей. С этой целью вдоль контура теловращения (L) разместим непрерывным образом кольцевые вихри, интенсивность которых $\gamma(l)$, здесь l – дуговая координата вдоль контура L.Функцию $\gamma(l)$ подберем так, чтобы выполнялось граничное условие на контуре (L). При этом уравнение Лапласа (3) и условие затухание скоростей возмущения на бесконечности будут удовлетворяться автоматически.

Всюду в области (Ω_1) имеет место интеграл Бернулли, согласно которому перепад давления в каждой точке $M(z,r) \in L$ имеет место следующее граничное условие:

$$\Delta P = P_2 - P_1 = \frac{\rho}{2}\left(V_1^{\ 2} - V_2^{\ 2}\right) = \frac{1}{2}(V_1 - V_2)(V_1 + V_2).$$

(4)

Согласно общим свойствам вихревого слоя, при переходе с одной стороны вихревого слоя на другую нормальная составляющая индуцированных скоростей изменяется непрерывным образом, а касательная – испытывает скачок непрерывности, и имеют место следующие равенства /2/:

$$V_2 = \frac{1}{2}\gamma(z) + \frac{\partial\Phi}{\partial l},\, V_1 = -\frac{1}{2}\gamma(z) + \frac{\partial\Phi}{\partial l}.$$

(5)

Подставляя равенства (5) в (4), имеем

$$\Delta P = \rho\gamma(z) \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial l}.$$

(6)

С другой стороны, если учесть равенство (2), то

$$V_n = m \cdot \sqrt{2\gamma(z)\frac{\partial\Phi}{\partial l}}.$$

(7)

Это равенство выполняется вдоль контура (L) и является граничным условием рассматриваемой задачи. В этом равенстве содержатся нормальная составляющая скорости $V_n = \dfrac{\partial\Phi}{\partial n}$ и погонная интенсивность кольцевых вихрей $\gamma(z)$. Следовательно, нужно иметь еще одно уравнение для этих величин. Поэтому вычислим:

$$V_n = \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n}\left(\varphi_\infty z + \varphi_1(z,r)\right) = V_\infty \cdot \cos(n^\wedge z) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dn} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \cdot \frac{dr}{dn} =$$
$$= V_\infty \cdot \frac{dz}{dn} - V_{1z} \cdot \frac{dr}{dl} + V_{1r} \cdot \frac{dz}{dl} = V_\infty \frac{-r'}{\sqrt{1+r'^2}} - V_{1z} \frac{r'}{\sqrt{1+r'^2}} + V_{1r} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+r'^2}}.$$
(8)

Приравнивая (7) и (8). получаем следующее интегральное уравнение относительно $\gamma(z)$:

$$m \cdot \sqrt{2\gamma(z)\frac{\partial \Phi}{\partial l}} = -V_\infty r' \cdot \sqrt{1+r'^2} - V_{1z} \cdot \frac{r'}{\sqrt{1+r'^2}} + V_{1r} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+r'^2}}. \qquad (9)$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial l} = \frac{\partial (V_\infty z + \varphi_1)}{\partial l} = V_\infty \cdot \frac{dz}{dl} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dl} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \cdot \frac{dr}{dl} =$$
$$= V_\infty \cdot \frac{dz}{dl} + V_{1z} \cdot \frac{dz}{dl} + V_{1r} \cdot \frac{dr}{dl} = (V_\infty + V_{1z} + V_{1r} \cdot r') \cdot \frac{dz}{dl},$$

равенство (9) можно представить в виде

$$\sqrt[4]{1+r'^2} \cdot m\sqrt{2\gamma(z)(V_\infty + V_{1z} + V_{1r} \cdot r')} = (-V_\infty \cdot r' + V_{1r} - V_{1z} \cdot r'). \qquad (10)$$

Отметим, что составляющие скорости V_{1z} и V_{1r} выражаются через функции $\gamma(z)$. Функция тока $\psi_1(z,r)$, индуцированная в произвольной точке $M(z,r)$ от системы кольцевых вихрей, расположенных вдоль контура (L), определяется равенством

$$\psi_1(M) = -\frac{r}{4\pi} \iint_{(s)} \frac{\gamma(P)\cos\theta dS}{R(P,Q)}. \qquad (11)$$

Здесь $M(z,r)$ – произвольная точка в области (Ω_1), $P(\xi,\eta)$ – переменная точка поверхности (S), расположенная на меридиональной плоскости, где размещена система координат *zor,* т.е. на плоскости $\theta = 0$.

$Q(\xi,\eta)$ – переменная точка вихревого кольца отстоящего от начала координат на расстоянии ξ, $dS = \eta d\theta dl$.

Расстояние между точками $M(z,r)$ и $Q(\xi,\eta)$ определяется равенством

$$R(M,Q) = \left[(z-\xi)^2 + r^2 + \eta^2 - 2r\cos\theta\right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (12)$$

Составляющие скорости V_{1z}, V_{1r} связаны с функцией тока $\psi(z,r)$ соотношениями

$$V_{1z} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial r}, V_{1r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial z}. \qquad (13)$$

Результаты интегрирования по переменной θ дают:

$$V_{1z} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{l_0} \gamma(\xi) \frac{\left[(\xi - z)^2 + (\eta - r)^2\right]K(k) - \left[(\xi - z)^2 + r^2 - \eta^2\right]E(k)}{\left[(\xi - z)^2 + (\eta - r)^2\right] \cdot \sqrt{(\xi - z)^2 + (\eta + r)^2}} dl',$$
(14)
$$V_{1r} = \frac{1}{2\pi r} \int_0^{l_0} \gamma(\xi) \frac{(\xi - z)\left[(\xi - z)^2 + (\eta - r)^2\right]K(k) - \left[(\xi - z)^2 + r^2 + \eta^2\right]E(k)}{\left[(\xi - z)^2 + (\eta - r)^2\right] \cdot \sqrt{(\xi - z)^2 + (\eta + r)^2}} dl',$$

$$dl = \left[(dz)^2 + (dr)^2\right], \frac{dz}{dn} = -\frac{dr}{dl}, \frac{dr}{dn} = \frac{dz}{dl}.$$

(15)

$dl' = \left[(d\xi)^2 + (d\eta)^2\right], l_0$ – длина верхней части контура (L).

Подставляя значения V_{1r} и V_{1r} в равенство (10), получаем линейное интегральное уравнение Фредгольма 2-рода для функции $\gamma(\xi)$, которое решается численно.

Таким образом, в данной задаче в рамках принятой схемы обтекания решение в области (Ω_1) не зависит от особенностей течения жидкости во внутренней области (Ω_2).

Следует отметить, что при обходе по контуру (L) текущая точка $Q(\xi,\eta)$ один раз совпадает с фиксированной точкой контура (z,r). Поэтому при $z=\xi, r=\eta$ подынтегральные функции имеют особенности, что видно из равенства (14) в явном виде. Следовательно, интегралы понимаются в смысле главного его значения. Эти особенности легко устраняются, если функцию $\eta(\xi)$ разложить по степеням разности $(\xi - z)$, а полные эллиптические интегралы – по степеням дополнительного модуля k', т.е. если воспользоваться равенствами:

$$E(K) = 1 + 0(k'^2), K(k) = \ln\frac{4}{k'} + 0(k'^2),$$

$$k = \frac{2\sqrt{r\eta}}{\left[(z-\xi)^2 + (r+\eta)^2\right]^{\frac{1}{2}}}, k' = \sqrt{1-k^2}.$$

$$\eta(\xi) = r(z) + r'(k)(\xi - z) + O(\xi - k)^2.$$

Список литературы

1. Рахматуллин Х.А. Обтекание проницаемого тела. //Вестник МГУ. – 1950.
2. Смирнов В.И. .Высшая математика. Т. IV. – М., 1953.