УДК 517.956

ОРОМ ТИБИНДЕГИ ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРГЕ ЛАПЛАСТЫН ӨЗГӨРТҮП ТҮЗҮҮСҮН КОЛДОНУУ

Турсунов Д. А., ф.-м.и.д., профессор, dtursunov@oshsu.kg
Нурланбеков Т.Н., магистр
Жаанова А. Ш., магистр, ОшМУ,

***Аннотация**: Макалада ором тибиндеги интегралдык теңдемелерди Лапластын өзгөртүп түзүүсүнүн жардамында чыграуу изилденген. Физиканын, техниканын жана башка илимдердин көпчүлүк проблемаларынын математикалык моделдери ором тибиндеги интегралдык теңдемелер аркылуу баяндалат. Ошондуктан ором тибиндеги интегралдык теңдемелерди изилдөө математиканын актуалдуу маселелеринин бири. Ором тибиндеги интегралдык теңдемелерди чыгаруунун бир нече методдору бар. Биз ором тибиндеги интегралдык теңдемелерди изилдөөдө Лапластын өзгөртүп түзүүсүн колдонууну сунуштайбыз. Макалада конкретүү мисалдар менен бул методдун артыкчылыктары далилденет.*

***Негизги сөздөр**: ором тибиндеги интегралдык теңдеме, Лапластын өзгөртүп түзүүсү, интегралдык теңдеменин ядросу, Вольтерранын интегралдык теңдемеси, оригинал функция, функциянын элеси, тескери өзгөртүп түзүү, ором, ядро, интегралдык катыш.*

ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА К ИНТЕГРАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ ТИПА СВЕРТКИ

Турсунов Д. А., д.п.н., профессор
Нурланбеков Т. Н., мастер
Жаанова А. Ш., мастер, ОшГУ, dtursunov@oshsu.kg

***Аннотация:** В статье исследуется решение интегральных уравнений типа свертки с помощью преобразования Лапласа. Математические модели многих задач физики, техники и других наук описываются интегральными уравнениями типа свертки. Поэтому исследование интегральных уравнений типа свертки является одной из актуальных задач математики. Существует несколько способов решение интегральных уравнений типа свертки. Мы предлагаем использовать преобразование Лапласа при исследовании интегральных уравнений типа свертки. В статье на конкретных примерах доказывается преимущества данного метода.*

***Ключевые слова**: интегральное уравнение типа свертки, преобразование Лапласа, ядро интегрального уравнения, интегральное уравнение Вольтерра, оригинал функции, изображение функции, обратное преобразование, свертка, ядро, интегральное соотношение.*

APPLICATION OF THE LAPLACE TRANSFORM TO CONVOLUTION TYPE INTEGRAL EQUATIONS

Tursunov D. A., Doctor of Pedagogy, Professor
Nurlanbekov T. N., master
Zhananova Aisalkyn Sheralievna, master
OshSU, dtursunov@oshsu.kg

***Annotation:** The article investigates the solution of integral equations of the convolution type using the Laplace transform. Mathematical models of many problems in physics, engineering and other sciences are described by integral equations of the convolution type. Therefore, the study of integral equations of the convolution type is one of the topical problems of mathematics. There are several ways to solve convolution-type integral equations. We propose to use the Laplace transform in the study of integral equations of the convolution type. The article proves the advantages of this method using specific examples.*

***Keywords:** convolution-type integral equation, Laplace transform, integral equation kernel, Volterra integral equation, function original, function image, inverse transformation, convolution, kernel, integral relation.*

Киришүү

Ором (свертка) тибиндеги интегралдык теңдемелер физиканын, техниканын ж.б. илимдердин маселелеринин математикалык моделдеринде кездешет [1]-[5]. Ором тибиндеги интегралдык теңдемелердин чыгарылышын тургузууда ар түрдүү методдор колдонулат. Бул методдордун арасынан эң кеңири таралганы – Лапластын өзгөртмөсүн колдонуп чыгаруу. Ошондуктан алгач Лапластын өзгөтмөсү боюнча маалымат беребиз.

Лапластын өзгөтмөсү

1-аныктама. Оригинал функция деп төмөнкү шарттарды канааттандырган t чыныгы аргументүү $f(t)$ комплекстик маанилүү каалагандай функцияны айтабыз: 1) $f(t)$ функциясы t огунун каалагандай чектүү интервалында интегралданууучу; 2) t аргументтин бардык терс маанилеринде $f(t)$ функциясынын мааниси нолго барабар, б.а. $\forall\ t\ (t<0)$: $f(t)=0$; 3) $f(t)$ функциясы көрсөткүчтүү функциядан тез өспөйт, б.а. $0<M$ жана $0\le S_0$ турактуулары табылып каалагандай t лар үчүн төмөнкү барабарсыздык орун алат: $\left|f(t)\right|<Me^{S_0 t}$.

1-мисал. $f(t)=\begin{cases} e^{2t}\sin 3t, & t>0, \\ 0, & t<0, \end{cases}$ функциясы оригинал функция болобу деген суроого жооп беребиз. Жогорудагы үч шартты текшеребиз.

1-шарт. f(t) функциясы t огунун каалагандай чектүү интервалында интегралданууучу экендигин далилдейбиз:

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{2t}\sin 3t dt=-\frac{1}{13}\left[e^{2t_2}\left(3\cos 3t_2-2\sin 3t_2\right)-e^{2t_1}\left(3\cos 3t_1-2\sin 3t_1\right)\right]$$

болгондуктан f(t) функциясы t огунун каалагандай чектүү интервалында интегралданууучу болот.

2- шарттын аткарылышын байкоо кыйын эмес.

Каалагандай t лар үчүн $\left|e^{2t}\sin 3t\right|<e^{2t}$ барабарсыздык орун алгандыгы үчүн 3-шарт дагы аткарылат.

Демек, f(t) функциясы оригинал функция болот экен.

2-мисал. Эң жөнөкөй оригинал функцияга Хевисайддин бирдик функциясы деп аталуучу функция мисал боло алат, ал функция төмөнкүдөй аныкталат: эгерде $t>0$ болсо, анда $\eta(t)=1$; а эгерде $t<0$ болсо, анда $\eta(t)=0$.

2-аныктама. $f(t)$ функциясынын Лаплас боюнча элеси (изображение) деп төмөнкү барабардык менен аныкталган комплекстик өзгөрүлмөлү $F(p)$ функциясын атайбыз: $F(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$, мында $p=s+i\sigma$.

Адабияттарда төмөнкүдөй белгилөө кабыл алынган:

эгерде $F(p)$ функциясы $f(t)$ функциясынын элеси болсо, анда $F(p)\to f(t)$ же $f(t)\leftarrow F(p)$ же $L\{f(t)\}=F(p)$ жазылат.

3-мисал. η(t) – Хевисайддын функциясынын Лаплас боюнча элесин 1/p болот. Чындыгында

$$L\{\eta(t)\}=\int_0^\infty e^{-pt}dt=\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-pt}dt=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{p}e^{-pt}\Bigg|_0^b=-\frac{1}{p}\lim_{b\to\infty}\left(e^{-pb}-e^0\right)=\frac{1}{p}.$$

Демек, $\frac{1}{p}\to\eta(t)$.

Вольтерранын экинчи түрдөгү интегралдык теңдемесин карайлы:

$$f(t)=g(t)+\lambda\int_0^t f(\tau)K(t-\tau)d\tau \qquad (1)$$

мында $g(t)$, $K(t)$ функциялары жетишерлик даражада жылма жана

$|g(t)|\le M_1e^{a_1t}$, $|K(t)|\le M_2e^{a_2t}$, $t\to\infty$, $0<M_1, M_2, a_1, a_2$ – const.

3-аныктама. $f(t)$, $g(t)$ функцияларынын орому (сверткасы) деп, $f*g=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ барабардык менен аныкталган функцияны айтабыз.

Ошондуктан (1)- ором тибиндеги интегралдык теңдемеге мисал боло алат. (1)- ором тибиндеги интегралдык теңдемеге Лапластын өзгөртүп түзүүсүн колдонобуз. Мейли $L\{f(t)\}=F(p),\ L\{g(t)\}=G(p)$ болсун, анда (1)- теңдеме $F(p)=G(p)+\lambda K(p)F(p)$ көрүнүшкө келет.

Бул барабардыктан изделүүчү $F(p)$ны табабыз: $F(p)=\dfrac{G(p)}{1-\lambda K(p)}$.

Бул элестин оригиналы (1)- интеградык теңдеменин чечими болот, б.а.

$$f(t)=L^{-1}\{F(p)\}=L^{-1}\left\{\frac{G(p)}{1-\lambda K(p)}\right\}.$$

4-мисал. $u(t)=1-4\int\limits_0^t u(\tau)(t-\tau)d\tau$, мында $u(t)$ изделүүчү функция.

Чыгаруу. Интегралдык теңдеменин ядросу $K(t-\tau)=t-\tau$.

Мейли $L\{u(t)\}=F(p)$ болсун, $L\{1\}=p^{-1}$, $L\{t\}=p^{-2}$ экендиги бизге белгилүү. Анда интегралдык теңдемеге Лапластын өзгөртүп түзүүсүн колдонобуз:

$$F(p)=\frac{1}{p}-\frac{4}{p^2}F(p)\Rightarrow F(p)\left(1+\frac{4}{p^2}\right)=\frac{1}{p}\Rightarrow F(p)=\frac{p}{p^2+4}.$$

$$u(t)=L^{-1}\{F(p)\}=L^{-1}\left\{\frac{p}{p^2+4}\right\}=\cos 2t.$$

Демек, ором тибиндеги интегралдык теңдеменин чечими $u(t)=\cos 2t$ болот.

5-мисал. Ором тибиндеги $u(t)=t-\int\limits_0^t u(\tau)e^{t-\tau}\,d\tau$ интегралдык теңдемени карайлы.

Интегралдык теңдеменин ядросу $K(t-\tau)=e^{t-\tau}$.

Мейли $L\{u(t)\}=F(p)$ болсун, $L\{e^t\}=\dfrac{1}{p-1}$, $L\{t\}=\dfrac{1}{p^2}$ экендиги бизге белгилүү. Анда интегралдык теңдемеге Лапластын өзгөртүп түзүүсүн колдонобуз:

$$u(t)=t-\int\limits_0^t u(\tau)e^{t-\tau}\,d\tau\Rightarrow F(p)=\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p-1}F(p),$$

$$F(p)\left(1+\frac{1}{p-1}\right)=\frac{1}{p^2},\ F(p)=\frac{p-1}{p^3}=\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^3}$$

$$u(t)=L^{-1}\{F(p)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{p^2}\right\}-\frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{2}{p^3}\right\}=t-\frac{1}{2}t^2.$$

Демек, $u(t)=t-\dfrac{1}{2}t^2$ жооп болот.

6-мисал. Интегралдык теңдемени чыгаргыла $\varphi(x)=\sin x+2\int\limits_0^x\cos(x-t)\varphi(t)\,dt$.

Чыгаруу:

$$\Phi(p)=\frac{1}{p^2+1}+2\frac{p}{p^2+1}\Phi(p),\ \Phi(p)\left(1-\frac{2p}{p^2+1}\right)=\frac{1}{p^2+1},\ \ \Phi(p)\frac{p^2+1-2p}{p^2+1}=\frac{1}{p^2+1},$$

$$\Phi(p)\frac{(p-1)^2}{p^2+1}=\frac{1}{p^2+1},\ \Phi(p)=\frac{1}{(p-1)^2}\quad\Rightarrow\ \varphi(x)=xe^x.$$

Биринчи түрдөгү ором тибиндеги интегралдык теңдемелер

Биринчи түрдөгү ором тибиндеги интегралдык теңдемеге Лапластын өзгөртүп түзүүсүн колдонобуз: $\int_0^t k(t-\tau)u(\tau)d\tau = f(t)$.

Эгерде $L\{u(t)\} = U(p),\ L\{f(t)\} = F(p), L\{k(t)\} = K(p)$ деп алсак анда интегралдык теңдеме төмөнкү көрүнүшкө келет:

$$\int_0^t k(t-\tau)u(\tau)d\tau = f(t) \Rightarrow K(p)U(p) = F(p).$$

Бул жерден $U(t)$ табабыз: $U(p) = \dfrac{F(p)}{K(p)}$.

Ушул элестин оригиналын тапсак, биринчи түрдөгү интегралдык теңдеменин чечимин тапкан болобуз.

7-мисал. $\int_0^t cos(t-\tau)u(t) = t + t^2$ биринчи түрдөгү ором тибиндеги интегралдык теңдеменин чечимин табабыз: $\int_0^t cos(t-\tau)u(t) = t + t^2 \Rightarrow \dfrac{p}{p^2+1}U(p) = \dfrac{1}{p^2} + \dfrac{2}{p^3}$

$$U(p) = \frac{1}{p} + \frac{2}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \frac{2}{p^4}$$

$$u(t) = L^{-1}\{U(p)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{2}{p^2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{p^3}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{2}{p^4}\right\}$$

Жооп: $u(t) = 1 + 2t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3$.

Ором тибиндеги интегралдык теңдемелердин системасы

Вольтерранын ором тибиндеги интегралдык теңдемелеринин системасын карайлы

$$\varphi_j(t) = f_j(t) + \sum_{i=1}^{s}\int_0^t K_{ji}(t-\tau)\varphi_i(\tau)d\tau,\ \ j = 1,2,...,s$$

Мейли $L\{\varphi_j(t)\} = \Phi_j(p),\ L\{f_j(t)\} = F_j(p), L\{k_{ji}(t)\} = K_{ji}(p)$

болсун, анда интегралдык теңдемелердин системасы төмөнкү көрүнүшкө келет:

$$\Phi_j(p) = F_j(p) + \sum_{i=0}^{s} K_{ji}(p)\Phi_k(p),\quad j = 1,2,...,s$$

Бул $\Phi_j(p)$ ге карата сызыктуу теңдемелердин системасы. Системасы чыгарып $\Phi_j(p)$ лерди аныктап, анан алардын оригиналдарын тургузсак интегралдык теңдемелердин системасын чыгарган болобуз.

8-мисал. Төмөнкү интегралдык теңдемелеринин системасын карайлы

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = t + \int_0^t e^{-(t-\tau)}\varphi_1(\tau)d\tau + \int_0^t (t-\tau)\varphi_2(\tau)d\tau \\ \varphi_2(t) = 1 + \int_0^t sh(t-\tau)\varphi_1(\tau)d\tau - \int_0^t e^{t-\tau}\varphi_2(\tau)d\tau \end{cases}$$

Чыгаруу. Лапластын өзгөртүп түзүүсүн колдонуп, элестер үчүн төмөнкү катыштарды алабыз:

$$\begin{cases} \Phi_1(p) = \dfrac{1}{p^2} + \dfrac{1}{p+1}\Phi_1(p) + \dfrac{1}{p^2}\Phi_2(p), \\ \Phi_2(p) = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p^2-1}\Phi_1(p) - \dfrac{1}{p-1}\Phi_2(p). \end{cases}$$

Пайда болгон сызыктуу теңдемелердин системасына Крамердин эрежесин колдонуп чыгарабыз:

$$\begin{cases} \Phi_1(p)\left(1 - \dfrac{1}{p+1}\right) - \dfrac{1}{p^2}\Phi_2(p) = \dfrac{1}{p^2} \\ -\dfrac{1}{p^2-1}\Phi_1(p) + \Phi_2(p)\left(1 + \dfrac{1}{p-1}\right) = \dfrac{1}{p} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{p}{p+1}\Phi_1(p) - \dfrac{1}{p^2}\Phi_2(p) = \dfrac{1}{p^2}, \\ -\dfrac{1}{p^2-1}\Phi_1(p) + \dfrac{p}{p-1}\Phi_2(p) = \dfrac{1}{p}, \end{cases}$$ аныктагычтарды

эсептейбиз: $\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{p}{p+1} & -\dfrac{1}{p^2} \\ -\dfrac{1}{p^2-1} & \dfrac{p}{p-1} \end{vmatrix} = \dfrac{p^2+1}{p^2}$; $\quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{p^2} & -\dfrac{1}{p^2} \\ \dfrac{1}{p} & \dfrac{p}{p-1} \end{vmatrix} = \dfrac{p^2+p-1}{p^3(p-1)}$;

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{p}{p+1} & \dfrac{1}{p^2} \\ -\dfrac{1}{p^2-1} & \dfrac{1}{p} \end{vmatrix} = \frac{p^3-p^2+1}{p^2(p^2-1)}.$$

Булардын жардамында Φ_1 жана Φ_2 лерди аныктайбыз:

$$\Phi_1(p) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{p^2+p-1}{p^3(p-1)} : \frac{p^2+1}{p^2} = \frac{p^2+p-1}{p(p-1)(p^2+1)};$$

$$\Phi_2(p) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{p^3-p^2+1}{p^2(p^2-1)} : \frac{p^2+1}{p^2} = \frac{p^3-p^2+1}{(p+1)(p-1)(p^2+1)}.$$

$$\varphi_1(t) = L^{-1}\{\Phi_1(p)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\} + \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{p-1}\right\} + \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{p^2+1}\right\} - \frac{3}{2}L^{-1}\left\{\frac{p}{p^2+1}\right\}$$

$$\varphi_2(t) = L^{-1}\{\Phi_2(p)\} = \frac{1}{4}L^{-1}\left\{\frac{1}{p^2-1}\right\} + \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{p}{p^2+1}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{p^2+1}\right\}$$

$$\varphi_1(t) = 1 + \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}\sin t - \frac{3}{2}\cos t\,,\quad \varphi_2(t) = \frac{1}{2}(\cos t + \operatorname{ch} t) - \sin t\,.$$

Жооп: $\begin{cases} \varphi_1(t) = 1 + \dfrac{1}{2}e^t + \dfrac{1}{2}\sin t - \dfrac{3}{2}\cos t \\ \varphi_2(t) = \dfrac{1}{2}(\cos t + \operatorname{ch} t) - \sin t. \end{cases}$

Корутунду. Ором тибиндеги интегралдык теңдемелерди чыгарууда Лапластын өзгөртүп түзүүсүн колдонуу бир топ ыңгайлуу жана теңдеменин чыгарылышын тургузуу салыштырмалуу оңой экен. Ором тибиндеги интегралдык теңдемеге Лапластын өзгөртүп түзүүсүн колдонгонубузда биз алгебралык теңдемени алат экенбиз. Алгебралык теңдемени чыгарып, анын чыгарылышын тапкан соң, кайра алгачкы элес аркылуу интегралдык теңдеменин чыгарылышын жазып коет экенбиз.

Адабияттар:

1. Варданян Р.С. О решении одного класса интегральных уравнений типа свертки / Р.С. Варданян, Н.Б. Енгибарян − Ереван: журнал, 1989. − С. 1291 − 1300.
2. Вахрамеева А.В. Уравнение свертки в гильбертовых пространствах последовательностей с весом: автореф. дис. на соискание учебной степени канд. ф.-м. н.: спец. 01.01.01 "Математический анализ" / Вахрамеева Анна Владимировна − Уфа, 2007. − 20 с.
3. Гахов Ф.Д. Уравнения типа свертки / Ф.Д. Гахов, Ю.И. Черский − М.: Наука, 1978. − 298 с.
4. Комарницкий А.Л. Решение интегральных уравнений типа свертки в некоторых пространствах функций / А.Л. Комарницкий // Изв. Вузов. Математика. 1997. −№9. − С. 83−85.
5. Манжиров А.В. Методы решения интегральных уравнений / А.В. Манжиров, А.Д. Полянин − М.: Факториал, 1999.