УДК: 517.956

ҮЧҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕНИН ОҢ ЖАГЫН АНЫКТОО

Турсунов Д. А., ф.-м.и.д., проф., dtursunov@oshsu.kg
Мамытов Айтбай Омонович, ф.-м.и.к., доцент,
Назарали кызы Сабина, окутуучу,

***Аннотация**: Макалада үчүнчү тартиптеги жекече туундулууу дифференциалдык теңдемелердин бир классы үчүн тескери маселелердин чечилишин жетиштүү шарттары изилденет. Изилдөөнүн максаты – үчүнчү тартиптеги жекече туундулууу дифференциалдык теңдемелердин бир классы үчүн тескери маселелердин чечилишин далилдөө. Тескери маселелер табияттагы кубулуштарды таануу процессинде маанилүү роль ойнойт, ал эми интегралдык теңдемелердин аппараты физикада, механикада, башкаруу теориясында жана колдонмо математикада кеңири колдонулат.*

***Негизги сөздөр:** тескери маселе, баштапкы шарт, чектик шарт, дифференциалдык теңдеме, Гриндин функциясы, резольвента, Вольтерранын экинчи түрдөгү интегралдык теңдемелеринин системасы.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРАВОЙ ЧАСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Турсунов Д.А., к.м.н., проф., dtursunov@oshsu.kg
Мамытов Айтбай Омонович, к.м.н., доцент,
Назарали кызы Сабина, учительница,

***Аннотация:** В статье исследуется достаточные условия решения обратных задач для одного класса дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка. Целью исследования является доказательство разрешимости обратных задач для одного класса дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка. Обратные задачи играют важную роль в процессе распознавания природных явлений, а аппарат интегральных уравнений широко используется в физике, механике, теории управления и прикладной математике.*

***Ключевые слова:** обратная задача, начальные условия, граничные условия, дифференциальное уравнение, функция Грина, резольвента, система интегральных уравнений Вольтерра второго рода.*

DEFINITION OF THE RIGHT SIDE OF A THIRD ORDER DIFFERENTIAL EQUATION

Tursunov D.A., candidate of medical sciences, professor, dtursunov@oshsu.kg
Mamytov Aitbay Omonovich, Candidate of Medical Sciences, Associate Professor,
Nazarali's daughter Sabina, a teacher,

***Abstract:** The article investigates sufficient conditions for solving inverse problems for one class of third-order partial differential equations. The aim of the study is to prove the solvability of inverse problems for one class of third-order partial differential equations. Inverse problems play an important role in the process of recognizing natural phenomena, and the apparatus of integral equations is widely used in physics, mechanics, control theory, and applied mathematics.*

***Key words:** inverse problem, differential equation, integral-differential equation, Green's function, resolvent, system of integral equations of Volterra's of the second kind.*

Төмөнкү тескери маселени изилдейбиз

$$u_t(t,x) = a_0 u_{txx}(t,x) + a_1 u_{xx}(t,x) + a_2(t,x) u_x(t,x) + a_3(t,x) u(t,x) + \varphi(t) f(t,x) + F(t,x),\ (t,x) \in \Omega \quad (1)$$

$$u(0,x) = \psi(x),\ 0 \le x \le 1, \quad (2)$$

$$u(t,0) = u(t,1) = 0, \quad 0 \le t \le T, \quad (3)$$

$$u(t,x_0) = g(t), \quad t \in [0,T],\ x_0 \in (0,1), \quad (4)$$

мында $\Omega=\{(t,x)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le t\le T\}$, $0<T\in\mathbf{R}$, a_0, a_1, x_0 – белгилүү турактуу сандар, $a_2(t,x)$, $a_3(t,x)$ $f(t,x)$, $F(t,x)$, $\psi(x)$, $g(t)$ – белгилүү функциялар, $\varphi(t)$ жана $u(t,x)$ – функциялары белгисиз;

(1) – төртүнчү тартиптеги сызыктуу бир тектүү эмес жекече туундулуу дифференциалдык теңдеме;

(2) – баштапкы шарт;

(3) – бир тектүү чек аралык шарттар;

(4) – изделүүчү $u(t,x)$ функциясына кошумча шарт, б.а. $x=x_0$ чекитинде белгисиз $u(t,x)$ функциянын изи.

Маселенин коюлушу: (1)- теңдемени жана (2)-(4) шарттарды канааттандырган $u\in C^{1,2}(\bar{\Omega})$, $\varphi\in C[0,T]$ функцияларын табуу.

Төмөнкү шарттар орун алат деп эсептейбиз:

Ш1. $a_2,\ a_3,\ f, F\in C(\Omega)$, $\psi\in C^2[0,1]$, $g\in C^2[0,T]$.

Ш2. $0<a_0,\ a_1<0,\ \psi(0)=\psi(1)=0,\ g(0)=\psi(x_0)$.

Маселенин чыгарылышы. Белгилөө кийирип алабыз [1]-[6]:

$$v(t,x)=u_t(t,x), \tag{5}$$

жана (5)- барабардыкты t өзгөрүлмөсү боюнча 0 дон t га чейин интегралдайбыз:

$$u(t,x)=\int_0^t v(s,x)ds+u(0,x),$$

жогоруда (2)- деги $u(0,x)=\psi(x)$ шарттын эске алып, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$u(t,x)=\int_0^t v(s,x)ds+\psi(x). \tag{6}$$

(5)- белгилөөнү эске алып, (1)- дифференциалдык теңдемени төмөнкү көрүнүштө жазып алабыз:

$$\begin{gathered} v(t,x)=a_0v_{xx}(t,x)+a_1u_{xx}(t,x)+a_2(t,x)u_x(t,x)+a_3(t,x)u(t,x)+ \\ +\varphi(t)f(t,x)+F(t,x),\ \ (t,x)\in\Omega \end{gathered} \tag{7}$$

(6)-ны x өзгөрүлмөсү боюнча дифференцирлейбиз:

$$u_x=\int_0^t v_x(s,x)ds+\psi'(x),\quad u_{xx}=\int_0^t v_{xx}(s,x)ds+\psi''(x).$$

Алынган туюнтмаларды жана (6)-ны (7)ге алып барып коебуз:

$$\begin{gathered} v(t,x)=a_0v_{xx}(t,x)+a_1\left(\int_0^t v_{xx}(s,x)ds+\psi''(x)\right)+a_2(t,x)\left(\int_0^t v_x(s,x)ds+\psi'(x)\right)+ \\ +a_3(t,x)\left(\int_0^t v(s,x)ds+\psi(x)\right)+\varphi(t)f(t,x)+F(t,x). \end{gathered}$$

же

$$\begin{gathered} v_{xx}(t,x)=-\frac{1}{a_0}\int_0^t (a_1v_{xx}(s,x)+a_2(t,x)v_x(s,x)+a_3(t,x)v(s,x))ds- \\ -\frac{\varphi(t)f(t,x)}{a_0}+\frac{1}{a_0}v(t,x)+F_1(t,x). \end{gathered} \tag{8}$$

мында $F_1(t,x)=-\dfrac{a_1}{a_0}\psi''(x)-\dfrac{a_2(t,x)}{a_0}\psi'(x)-\dfrac{a_3(t,x)}{a_0}\psi(x)-\dfrac{F(t,x)}{a_0}$.

1-лемма. $K(t,s)=\gamma,\ \gamma=const$ ядронун резольвентасы $R(t,s)=e^{\gamma(t-s)}$, $(t,s)\in\Omega$ болот.

Далилдөө. Лемманы далилдөө үчүн төмөнкү барабардыктын орун алышын далилдөө жетиштүү

$$R(t,s)=\int_s^t K(t,\tau)R(\tau,s)d\tau+K(t,s),\ (t,s)\in\Omega.$$

Барабардыктын оң жагын жазып алабыз:

$$\int_s^t K(t,\tau)R(\tau,s)d\tau + K(t,s) = \int_s^t \gamma e^{\gamma(\tau-s)}d\tau + \gamma = e^{\gamma(t-s)} - \gamma + \gamma = R(t,s).$$

1-лемма далилденди.

(8)ге 1-лемманы колдонобуз:

$$v_{xx}(t,x) = -\int_0^t R(t,\tau)\left(\frac{a_2(\tau,x)}{a_0}\int_0^\tau v_x(s,x)ds + \frac{a_3(\tau,x)}{a_0}\int_0^\tau v(s,x)ds + \right.$$

$$\left. + \frac{\varphi(\tau)f(\tau,x)}{a_0} - \frac{1}{a_0}v(\tau,x) - F_1(\tau,x) \right)d\tau -$$

$$-\frac{a_2(t,x)}{a_0}\int_0^t v_x(s,x)ds - \frac{a_3(t,x)}{a_0}\int_0^t v(s,x)ds - \frac{\varphi(t)f(t,x)}{a_0} + \frac{1}{a_0}v(t,x) + F_1(t,x).$$

же $v_{xx}(t,x) - \frac{1}{a_0}v(t,x) = -\frac{1}{a_0}\int_0^t R(t,\tau)\left(a_2(\tau,x)\int_0^\tau v_x(s,x)ds + a_3(\tau,x)\int_0^\tau v(s,x)ds + \right.$

$$\left. + \varphi(\tau)f(\tau,x) - v(\tau,x) \right)d\tau -$$

$$-\frac{a_2(t,x)}{a_0}\int_0^t v_x(s,x)ds - \frac{a_3(t,x)}{a_0}\int_0^t v(s,x)ds - \frac{\varphi(t)f(t,x)}{a_0} + F_2(t,x), \qquad (9)$$

мында $R(t,s) = e^{-\frac{a_1}{a_0}(t-s)}$, $(t,s)\in\Omega$, $\quad F_2(t,x) = \int_0^t R(t,\tau)F_1(\tau,x)d\tau + F_1(t,x)$.

(3)- жана (5)- ден төмөнкүнү алабыз:

$$v(t,0) = v(t,1) = 0, \quad 0 \le t \le T. \qquad (10)$$

Жардамчы лемманы келтиребиз.

2-лемма. Бир тектүү $y''(x)-k^2y(x)=0$ (биздин учурда $k^2 = 1/a_0$), дифференциалдык теңдеме эки сызыктуу көз каранды эмес

$$y_1(x)=\mathrm{sh}(kx) \text{ жана } y_2(x)=\mathrm{sh}(kx-k)$$

чыгарылыштарга ээ, алардын вронскианы $W(y_1, y_2)=k\,\mathrm{sh}(k)$ га барабар.

Сызыктуу көз каранды эмес $y_1(x)=\mathrm{sh}(kx)$ жана $y_2(x)=\mathrm{sh}(kx-k)$ чыгарылыштар үчүн $y_1(0)=0$ жана $y_2(1)=0$ катыштар орун алышын байкоо кыйын эмес. Ошондуктан төмөнкү чектик маселенин чыгарылышын $y''(x)-k^2y(x)=f(x)$, $0<x<1$, $y_1(0)=0$ и $y_2(1)=0$.

Гриндин функциясынын жардамында төмөнкү көрүнүштө жазууга болот:

$$y(x) = \int_0^1 G(x,\xi)f(\xi)d\xi,$$

мында $G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{sh(kx-k)sh(k\xi)}{ksh(k)}, & 0\le\xi\le x\le 1, \\ \dfrac{sh(kx)sh(k\xi-k)}{ksh(k)}, & 0\le x\le\xi\le 1,\ 0<k. \end{cases}$

(9)- жана (10)- маселеге 1- лемманы колдонобуз:

$$v(t,x) = -\frac{1}{a_0}\int_0^1 G(x,\xi)\left(\int_0^t R(t,\tau)\left(a_2(\tau,\xi)\int_0^\tau v_\xi(s,\xi)ds + a_3(\tau,\xi)\int_0^\tau v(s,\xi)ds + \right.\right.$$

$$+ \varphi(\tau)f(\tau,x) - v(\tau,x) \Big)d\tau + a_2(t,\xi)\int_0^t v_\xi(s,\xi)ds +$$

$$\left. + a_3(t,\xi)\int_0^t v(s,\xi)ds + \varphi(t)f(t,\xi) + a_0F_2(t,\xi) \right)d\xi. \qquad (11)$$

(11)ди төмөнкү көрүнүштө жазып алабыз:

$$v(t,x)=-\frac{1}{a_0}\int_0^1 G(x,\xi)\left(\int_0^t R(t,\tau)a_2(\tau,\xi)\int_0^\tau v_\xi(s,\xi)dsd\tau+\right.$$

$$\int_0^t R(t,\tau)a_3(\tau,\xi)\int_0^\tau v(s,\xi)dsd\tau+\int_0^t R(t,\tau)\varphi(\tau)f(\tau,x)d\tau-\int_0^t R(t,\tau)v(\tau,x)\,\mathrm{d}\,\tau+$$

$$\left.+a_2(t,\xi)\int_0^t v_\xi(\mathrm{s},\xi)ds+a_3(t,\xi)\int_0^t v(\tau,\xi)d\tau+\varphi(t)f(t,\xi)+a_0F_2(t,\xi)\right)d\xi,$$

эми Дирихленин формуласын колдонобуз:

$$v(t,x)=-\frac{1}{a_0}\int_0^1 G(x,\xi)\left(\int_0^t\int_\tau^t R(t,\tau)a_2(\tau,\xi)d\tau v_\xi(s,\xi)ds+\right.$$

$$\int_0^t\int_\tau^t R(t,\tau)a_3(\tau,\xi)d\tau v(s,\xi)ds-\int_0^t R(t,\tau)v(\tau,\xi)\,\mathrm{d}\,\tau+a_2(t,\xi)\int_0^t v_\xi(\mathrm{s},\xi)ds+$$

$$\left.+a_3(t,\xi)\int_0^t v(\tau,\xi)d\tau+\varphi(t)f(t,\xi)+a_0F_2(t,\xi)\right)d\xi. \qquad (12)$$

Эгерде төмөнкүдөй белгилөө киирип алсак:

$$K_1(t,x,\xi,\mathrm{s})=-\frac{1}{a_0}G(x,\xi)a_2(t,\xi)+\int_\tau^t R(t,\tau)a_2(\tau,\xi)d\tau,$$

$$K_2(t,x,\xi,\mathrm{s})=-\frac{1}{a_0}G(x,\xi)\left(a_3(t,\xi)-\int_s^t R(t,\tau)a_2(\tau,\xi)d\tau\right),$$

$$m(t,x)=-\frac{1}{a_0}\int_0^1 G(x,\xi)f(t,\xi)d\xi,\quad F_3(t,x)=\int_0^1 G(x,\xi)F_2(t,\xi)d\xi,$$

анда (12):

$$v(t,x)=\int_0^t\int_0^1\left(K_1(t,x,\xi,s)v_\xi(s,\xi)+K_2(t,x,\xi,s)v(s,\xi)\right)d\xi ds+m(t,x)\varphi(t)+$$

$$+\int_0^t R(t,s)m(s,x)\varphi(s)ds+F_3(t,x), \qquad (13)$$

көрүнүшкө келет.

Эгерде $x=x_0$ деп алсак, анда (13):

$$v(t,x_0)=\int_0^t\int_0^1\left(K_1(t,x_0,\xi,s)v_\xi(s,\xi)+K_2(t,x_0,\xi,s)v(s,\xi)\right)d\xi ds+m(t,x_0)\varphi(t)+$$

$$+\int_0^t R(t,s)m(s,x_0)\varphi(s)ds+F_3(t,x_0),$$

$$m(t,x_0)\varphi(t)+\int_0^t R(t,s)m(s,x_0)\varphi(s)ds=$$

же (14)

$$=g''(t)-\int_0^t\int_0^1\left(K_1(t,x_0,\xi,s)v_\xi(s,\xi)+K_2(t,x_0,\xi,s)v(s,\xi)\right)d\xi ds-F_3(t,x_0).$$

(13)тү x өзгөрүлмөсү боюнча дифференцирлейбиз:

$$v_x(t,x)=\int_0^t\int_0^1\left(\frac{\partial K_1(t,x,\xi,s)}{\partial x}v_\xi(s,\xi)+\frac{\partial K_2(t,x,\xi,s)}{\partial x}v(s,\xi)\right)d\xi ds+$$
$$+m_x(t,x)\varphi(t)+\int_0^t R(t,s)m_x(s,x)\varphi(s)ds+\frac{\partial F_3(t,x)}{\partial x}. \qquad (15)$$

Натыйжада биз, үч белгисиздүү $\varphi(t), v(t,x), v_x(t,x)$, үч (13), (14) жана (15) Вольтерранын сызыктуу интегралдык теңдемелеринин системасын алдык.

Ш$_3$. Айталы төмөнкү барабарсыздык аткарылсын

$$m(t,x_0)=-\frac{1}{a_0}\int_0^1 G(x_0,\xi)f(t,\xi)d\xi\neq 0,\ \forall t\in[0,T].$$

Төмөнкү теорема орун алат

1- теорема. Эгерде **Ш**$_1$, **Ш**$_2$ жана **Ш**$_3$ шарттары аткарылса, анда (13), (14) жана (15) Вольтерранын сызыктуу интегралдык теңдемелеринин системасынын $\varphi(t), v(t,x), v_x(t,x)$ чыгарылышы жетишээрлик кичине $T>0$ үчүн $C^{1,2}(\Omega)\times C[0,T]$ мейкиндигинде жашайт жана жалгыз болот.

Чындыгында, (13), (14) жана (15) системаны төмөнкү көрүнүштө жазып алабыз:

$$\begin{cases} v(t,x)=A_1[v,v_x,\varphi]+m(t,x)\varphi(t)+F_3(t,x),\\ \varphi(t)=A_2[v,v_x,\varphi]+\dfrac{g''(t)-F_3(t,x_0)}{m(t,x_0)},\\ v_x(t,x)=A_3[v,v_x,\varphi]+m_x(t,x)\varphi(t)+\dfrac{\partial F_3(t,x)}{\partial x}.\end{cases}$$

мында $A_1[v,v_x,\varphi]\equiv\int_0^t\int_0^1 K_2(t,x,\xi,s)v(s,\xi)d\xi ds+\int_0^t\int_0^1 K_1(t,x,\xi,s)v_\xi(s,\xi)d\xi ds+$

$$+\int_0^t R(t,s)m(s,x)\varphi(s)ds,$$

$$A_2[v,v_x,\varphi]\equiv-\frac{1}{m(t,x_0)}\int_0^t\int_0^1 K_2(t,x_0,\xi,s)v(s,\xi)d\xi ds-\frac{1}{m(t,x_0)}\int_0^t\int_0^1 K_1(t,x_0,\xi,s)v_\xi(s,\xi)d\xi ds-$$

$$-\frac{1}{m(t,x_0)}\int_0^t R(t,s)m(s,x_0)\varphi(s)ds,$$

$$A_3[v,v_x,\varphi]\equiv\int_0^t\int_0^1\frac{\partial K_2(t,x,\xi,s)}{\partial x}v(s,\xi)d\xi ds+\int_0^t\int_0^1\frac{\partial K_1(t,x,\xi,s)}{\partial x}v_\xi(s,\xi)d\xi ds+$$

$$+\int_0^t R(t,s)m_x(s,x)\varphi(s)ds.$$

(13), (14) жана (15) Вольтерранын сызыктуу интегралдык теңдемелеринин системасынын $\varphi(t), v(t,x), v_x(t,x)$ чыгарылышы жетишээрлик кичине $T>0$ үчүн $C^{1,2}(\Omega)\times C[0,T]$ мейкиндигинде жашайт жана жалгыз болот [1].

Натыйжада төмөнкү теореманы далилдедик

2- теорема. Эгерде **Ш**$_1$, **Ш**$_2$ жана **Ш**$_3$ шарттары аткарылса, анда (1)-(4) тескери маселенин $u(t,x), \varphi(t)$ чыгарылышы жетишээрлик кичине $T>0$ үчүн $C^{1,2}(\Omega)\times C[0,T]$ мейкиндигинде жашайт жана жалгыз болот.

Адабияттар:

1. Бухгейм, А. Л. Уравнения Вольтерра и обратные задачи. – Новосибирск: Наука, 1983. –207 с.
2. Кабанихин, С.И. Обратные и некорректные задачи.- Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009.-457 с.
3. Мамытов, А.О. Об одной задаче определения правой части интегро-дифференциального уравнения в частных производных // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2021. – Т. 13, - № 3. – С. 31–38.
4. Мамытов, А.О. Разрешимость обратной начально-краевой задачи с известным значением на прямой // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». -2021.-Т. 13,- № 2.-С. 18–23.
5. Мамытов, А.О., Асанов А., Турсунов Д.А. Задача восстановления ядра и правой части интегро-дифференциального уравнения в частных производных пятого порядка // Научные аспекты совр.исслед. 78я Межд.науч.конф. ЕНО. – 2021. – № 8(78). – С. 31–34.
6. Мамытов А.О., Асанов А., Турсунов Д.А. Жогорку тартиптеги жекече туундулуу интегро-дифференциалдык теңдемелер үчүн баштапкы-чек аралык тескери маселенин чечилиши // ОшМУнун жарчысы. «Математика. Физика. Техника». – 2021. - № 2. – С. 5–13.
7. Алымкулов К., Турсунов Д. А. Об одном методе построения асимптотических разложений решений бисингулярно возмущенных задач. Изв. вузов. Математика, 12, 2016, 3–11.
8. Турсунов Д. А. Асимптотическое разложение решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с тремя точками поворота. Тр. ИММ УрО РАН, 22,№ 1,2016,271–281.
9. Tursunov D. A. The asymptotic solution of the three-band bisingularly problem. Lobachevskii Journal of Mathematics, 38:3, (2017), 542–546.
10. Турсунов Д. А. Асимптотическое решение линейных бисингулярных задач с дополнительным пограничным слоем. Изв. вузов. Математика, 3, 2018, 70–78.
11. Кожобеков К. Г., Турсунов Д. А. Асимптотика решения краевой задачи, когда предельное уравнение имеет нерегулярную особую точку. Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки, 29:3 (2019), 332–340.