**УДК: 517.957**

# РЕАКЦИЯ КЫЛУУЧУ ГАЗДАРДЫН АРАЛАШМАСЫНЫН КОНТАКТТЫК ҮЗҮЛҮҮ МЕНЕН БОЛГОН КЫЙМЫЛЫ

***Токторбаев Айбек М., ф.-м.и.к., доц.,*** **ain7@list.ru**
***Пакал уулу Д.**, окутуучу,* **dolon96.99@gmail.com**
***ОшМУ, Ош ш., Кыргыз Республикасы***

***Аннотация:*** *Реакция кылуучу газдардын аралашмасынын бир ченемдүү стационардык эмес агымын баяндаган дифференциалдык теңдемелер системасын изилдейбиз. Контакттык үзүлүүгө тиешелеш келген үзгүлтүктүү баштапкы берилиштер менен Коши маселеси окулуп үйрөнүлөт. Мында изделүүчү функциялар убакыттын баштапкы моментинде чексиздикте ар түрдүү пределдерге ээ болушат Чектүү илешкээктикке ээ болгон агымдын өзгөчөлүгү болуп анда сокку толкунунун жоктугу эсептелет, б.а. контакттык үзүлүүдөн сырткары, башка күчтүү үзүлүүнүн болушу мүмкүн эмес. Биз массалык лагранждык координаттарды карап чыгабыз.*
*Бул жердеги туташ чөйрөнүн механикасынын изилденип жаткан моделдери, кыймылдын теңдемелери менен катар кошумча «бир тектүү эместик параметрлеринин» (тыгыздык, температура, концентрация, магниттик талаанын чыңалуусу, электрдик талаанын чыңалуусу) аныктамаларын кароого туура келиши менен мүнөздүү. Натыйжада классикалык типтердин бирине да таандык болбогон теңдемелердин стандарттык эмес системаларын алабыз.*

***Түйүндүү сөздөр:*** *ылдамдык, тыгыздык, температура, магнит талаасы, электр талаасы, жалпыланган чечим, априордук баалоо, бар болуу, убакыт, газ туруктуулар, жылуулук.*

# ДВИЖЕНИЕ РЕАГИРУЮЩЕЙ СМЕСИ ГАЗОВ С КОНТАКТНЫМ РАЗРЫВОМ

***Токторбаев Айбек М., к.ф.-м.н., доцент., ain7@list.ru***
***Пакал уулу Долонбек, преподаватель, dolon96.99@gmail.com***
***ОшГУ, г. Ош, Кыргызская Республика***

***Аннотация:*** *Исследуется система дифференциальных уравнений, описывающая одномерное нестационарное течение реагирующей смеси газов. Изучается задача Коши с разрывными начальными данными, соответствующими контактному разрыву. Причем искомые функции в начальный момент времени имеют разные пределы на бесконечности. Особенностью течений с конечной вязкостью является отсутствие в них ударных волн, т.е. кроме контактного, другого сильного разрыва быть не может. Будем рассматривать массовые лагранжевы координаты. Исследуемые модели механики сплошной среды характерны тем, что наряду с уравнениями движения приходится рассматривать дополнительные определения «параметров неоднородности» (плотность, температура, концентрация, напряженность магнитного поля, напряженность электрического поля).*

***Ключевые слова:*** *скорость, плотность, температура, магнитное поле, электрическое поле, обобщенное решение, априорные оценки, существование, время, свойства газа, теплота.*

# MOTION OF A REACTING GAS MIXTURE WITH A CONTACT BREAK

***Toktorbaev Aibek M., k.f.-m.s. dosent., ain7@list.ru***
***Pakal uulu Dolonbek, teacher, dolon96.99@gmail.com***
***OshSU, Osh city, Kyrgyz Republic***

***Abstract:*** *A system of differential equations is investigated that describes a one-dimensional unsteady flow of a reacting gas mixture. We study the Cauchy problem with discontinuous initial data corresponding to a contact discontinuity. Moreover, the desired functions at the initial moment of time have different limits at infinity. A feature of flows with finite viscosity is the absence of shock waves in them, i.e., except for the contact, there can be no other strong gap. We will consider mass Lagrangian coordinates.*
*The studied models of continuum mechanics are characterized by the fact that, along with the equations of motion, it is necessary to consider additional definitions of "inhomogeneity parameters" (density, temperature, concentration, magnetic field strength, electric field strength).*

***Keywords:*** *speed, density, temperature, magnetic field, electric field, generalized solution, apriori estimates, existence, time, gas properties, heat.*

***1. Постановка задачи и основной результат.*** Пусть в начальный момент $t=0$ область $-\infty<x<0$ занята газом с коэффициентами вязкости, теплопроводности, диффузии, магнитных характеристик $\mu_1,\lambda_1,\chi_1,\nu_1$ и уравнением состояния $p=r_1\rho\theta$, $\delta_{i1}$ - теплота образования $i$ - ой компоненты при стандартных условиях, а область $0<x<\infty$ занята газом с соответствующими характеристиками $\mu_2,\lambda_2,\chi_2,\nu_2,\delta_{i2}$ и $p=r_2\rho\theta$. Здесь $\mu_i,\lambda_i,\chi_i,\nu_i,\ \delta_{ij},r_i\ (i,j=1,2)$ - положительные постоянные. Введем обозначения:

$$\Omega_1=\{x:-\infty<x<0\},\quad \Omega_2=\{x:0<x<\infty\},\quad R=\Omega_1\cup\Omega_2,$$

$$\Pi_{it}=\Omega_i\times(0,t),\quad \Gamma=\{x,t:x=0,t\geq 0\},$$

$$\mathrm{v}=\rho^{-1},\ \sigma=\mu\rho u_x-p,\quad p=r\rho\theta,\quad \delta=\delta_{i1}-\delta_{i2}\geq 0,\quad i=1,2,$$

где $x=0$ - линия контактного разрыва.

Поведение среды в области $-\infty<x<\infty$ описывается следующим образом. Движение каждой смеси газов вне линии контактного разрыва определяется уравнениями:

$$\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad \mathrm{v}=\frac{1}{\rho},\quad \frac{\partial c}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\chi}{\mathrm{v}}\frac{\partial c}{\partial x}\right)-c\,g,$$

(1)

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial \sigma}{\partial x},\quad \frac{\partial \theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\lambda}{\mathrm{v}}\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\nu}{\mathrm{v}}\theta\frac{\partial c}{\partial x}\right)+\sigma\frac{\partial u}{\partial x}+\delta\,c\,g,$$

Условия контактного разрыва на линии $x=0$ имеют вид:

$$[u]=[\theta]=[c]=[\sigma]=\left[\frac{\lambda}{\mathrm{v}}\frac{\partial\theta}{\partial x}\right]=\left[\frac{\nu}{\mathrm{v}}\theta\frac{\partial c}{\partial x}\right]=\left[\frac{\chi}{\mathrm{v}}\frac{\partial c}{\partial x}\right]=0,\quad (x=0) \tag{2}$$

где $[f]=f(+0,t)-f(-0,t)$ - скачок функции $f$.

В начальный момент $t=0$ значения функций $\mathrm{v},u,\theta,c$ предполагаются известными:

$$u|_{t=0}=u_0(x),\ \theta|_{t=0}=\theta_0(x),\ c|_{t=0}=c_0(x),\ \mathrm{v}|_{t=0}=\mathrm{v}_0(x), \tag{3}$$

причем $(\mathrm{v}_0,u_0,\theta_0,c_0)$ - гладкие при $x\neq 0$ и удовлетворяют условиям (2) при $x=0$, $0<m_0\leq(\mathrm{v}_0(x),\theta_0(x))\leq M_0<\infty$, $0<c_0(x)\leq 1$ и имеют конечные пределы на бесконечности:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty}u_0(x)=u_0^1,\quad \lim_{x\to+\infty}u_0(x)=u_0^2,\quad u_0^1<u_0^2,\\
&\lim_{x\to-\infty}\mathrm{v}_0(x)=\mathrm{v}_0^1,\quad \lim_{x\to+\infty}\mathrm{v}_0(x)=\mathrm{v}_0^2,\quad \mathrm{v}_0^1\neq \mathrm{v}_0^2,\\
&\lim_{x\to-\infty}\theta_0(x)=\theta_0^1,\quad \lim_{x\to+\infty}\theta_0(x)=\theta_0^2,\quad \theta_0^1\neq\theta_0^2,\\
&\lim_{x\to-\infty}c_0(x)=c_0^1,\quad \lim_{x\to+\infty}c_0(x)=c_0^2,\quad c_0^1\neq c_0^2.
\end{aligned} \tag{4}$$

Введем вспомогательные функции $\psi(x)$, $f(x)$, $\gamma(x)$, $\varphi(x)$, обладающие свойствами:

$$\begin{aligned}
&0<C_1^{-1}<\psi(x)<C_1,\quad \lim_{|x|\to\infty}\mathrm{v}_0(x)\psi(x)=1,\quad \psi'(x)\in W_2^1(R),\\
&|f(x)|<C_2<\infty,\quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=u_0^1,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=u_0^2,\\
&0<f'(x)\leq C_3,\ f'(x)\in W_2^1(R),\ f'(x)\in L_1(R),\\
&0<C_4^{-1}<\varphi(x)<C_4,\quad \lim_{|x|\to\infty}\theta_0(x)\varphi(x)=1,\quad \varphi'(x)\in W_2^1(R),\\
&1\leq\gamma(x)<C_5<\infty,\quad \lim_{|x|\to\infty}c_0(x)\gamma(x)=1,\quad \gamma'(x)\in W_2^1(R).
\end{aligned} \tag{5}$$

$$(\varphi'(x))^2<\delta\,f'(x),\quad 0<\delta<1.$$

и $[\psi]=[\varphi]=[f]=[\eta]=0\qquad (x=0)$.

Существование таких функций нетрудно проверить.

**Теорема.** *Пусть начальные данные (3) удовлетворяют условиям (4),*

$$(u_0 - f,\quad \mathrm{v}_0\psi - 1,\ \theta_0\varphi - 1,\ c_0\gamma - 1) \in W_2^1(\Omega_i) \quad (i = 1{,}2).$$

*Функция* $g(\rho, c, \theta)$ *является положительной и непрерывной в любой компактной области своих аргументов, а по* $(\varphi\theta)^{1/2}$*, кроме того, удовлетворяет условию Липшица и* $g(\rho, c, 1) = 0$.

Тогда существует единственное обобщенное решение задачи (1)-(3) «в целом» по времени, причем

$$(\mathrm{v}\psi - 1) \in L_\infty\left(0, T; W_2^1(\Omega_i)\right), \quad \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t} \in L_\infty(0, T; L_2(\Omega_i)), \ \left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial \theta}{\partial t}, \frac{\partial c}{\partial t}, \right) \in L_2(\Pi_{it}),$$

$$(u - f, \varphi\,\theta - 1,\ c\gamma - 1) \in L_\infty\left(0, T; W_2^1(\Omega_i)\right) \cap L_2\left(0, T; W_2^2(\Omega_i)\right), \ (i = 1{,}2),$$

$0 < c(x,t) \le 1$, $\theta(x,t)$, $\mathrm{v}(x,t)$ *- строго положительные, ограниченные функции,* $t \in [0, T]$.

Доказательство теоремы проведем методом априорных оценок.

*2. **Априорные оценки.*** Из уравнений (1) и ограничений на данные задачи видно, что функции $\mathrm{v}(x,t)$ и $\theta(x,t)$ неотрицательны и

$$0 < c(x,t) \le 1. \tag{7}$$

Выведем закон сохранения. Сделаем замену, полагая $\dfrac{\partial \xi}{\partial x} = \dfrac{1}{\varphi(x)\gamma(x)}$. Тогда система уравнений (1) примет вид:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t} - \frac{1}{\varphi\gamma}\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0, \quad \mathrm{v} = \frac{1}{\rho}, \ \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{1}{\varphi\gamma}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{\varphi\gamma\mathrm{v}}\frac{\partial c}{\partial \xi}\right) - c\,g, \\
\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\varphi\gamma}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{\varphi\gamma\mathrm{v}}\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) - \frac{1}{\varphi\gamma}\frac{\partial p}{\partial \xi}, \quad p = \frac{\theta}{\mathrm{v}}, \\
\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{\varphi\gamma}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{\varphi\gamma\mathrm{v}}\frac{\partial \theta}{\partial \xi}\right) + \frac{1}{\varphi\gamma}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{\varphi\gamma\mathrm{v}}\theta\frac{\partial c}{\partial \xi}\right) - \frac{1}{\varphi\gamma}p\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{\varphi^2\gamma^2\mathrm{v}}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2 + cg.
\end{gathered} \tag{8}$$

**ЛЕММА 1.** При выполнении условий теоремы справедлива оценка

$$U(t) + \int_0^t W(\tau)\,d\tau \le E = const > 0, \quad t \in [0, T] \tag{9}$$

где $\quad U(t) = \displaystyle\int \left\{ \frac{1}{2}(u - f)^2 + \frac{1}{2}(c\gamma - 1)^2 + (\varphi\theta - \ln\varphi\theta - 1) + (\mathrm{v}\psi - \ln \mathrm{v}\psi - 1) \right\} dx,$

$$W(t) = \int \left\{ \frac{\theta_x^2}{\mathrm{v}\theta^2} + \frac{u_x^2}{\mathrm{v}\theta} + \frac{c_x^2}{\mathrm{v}} + \frac{\theta}{\mathrm{v}}f' + g\varphi(c\gamma - 1)^2 \right\} dx.$$

*Доказательство*. Умножим первое уравнение системы (8) на $\gamma\left(\psi - \dfrac{1}{\mathrm{v}}\right)$, второе на $\gamma(c\gamma - 1)$, третье на $\varphi\gamma(u - f)$, третье на $\gamma\left(\varphi - \dfrac{1}{\theta}\right)$, сложим и проинтегрируем по $R$ :

$$\frac{d}{dt}\int \left\{ \frac{1}{2}\varphi\gamma(u - f)^2 + \frac{1}{2}(c\gamma - 1)^2 + \gamma(\varphi\theta - \ln\varphi\theta - 1) + \gamma(\mathrm{v}\psi - \ln \mathrm{v}\psi - 1) \right\} d\xi +$$

$$+ \int \left\{ \frac{\theta_\xi^2}{\mathrm{v}\theta^2\varphi^2\gamma} + \frac{u_\xi^2}{\mathrm{v}\theta\,\varphi\gamma} + \frac{c_\xi^2}{\mathrm{v}\,\varphi^2\gamma} + \frac{\theta}{\mathrm{v}}f' + g(c\gamma - 1)^2 \right\} d\xi = \tag{10}$$

$$=\int\frac{\psi}{\varphi\gamma}u_\xi d\xi+\int\frac{1}{\varphi \text{v}\gamma}u_\xi(f'+\gamma-1)d\xi-\int\frac{\theta_\xi\varphi'}{\text{v}\,\theta\,\varphi^3\gamma}d\xi-\int\frac{c_\xi c\gamma'}{\text{v}\,\varphi^2\gamma}d\xi+\int\frac{c_\xi c\varphi'}{\text{v}\,\varphi^3}d\xi+$$

$$+\int\frac{c_\xi\theta_\xi}{\text{v}\,\theta\varphi^2\gamma}d\xi+\int\frac{c_\xi\varphi'}{\text{v}\,\varphi^3\gamma}d\xi-\int g(c\gamma-1)d\xi+\int cg\gamma\frac{\varphi\theta-1}{\theta}d\xi=\sum_{k=1}^{9}I_k$$

Оценим каждое $I_k$ , используя интегрирование по частям, неравенства Юнга, Коши, Гельдера, вложения.

$$I_1=\int\frac{\psi}{\varphi\gamma}(u-f)_\xi\,d\xi+\int\frac{\psi}{\varphi\gamma}f'\,d\xi\le C_6\left(\left\|\sqrt{\varphi\gamma}(u-f)\right\|^2+1\right),$$

$$I_2=\int(f'+\gamma-1)\frac{\partial\ln \text{v}\psi}{\partial t}d\xi=-\int(f'+\gamma-1)\frac{\partial}{\partial t}(\text{v}\psi-\ln \text{v}\psi-1)d\xi+$$

$$+\int(f'+\gamma-1)\frac{\partial\,\text{v}\psi}{\partial t}d\xi=-\frac{d}{dt}\int(f'+\gamma-1)(\text{v}\psi-\ln \text{v}\psi-1)\,d\xi+\int(f'+\gamma-1)\frac{\psi}{\varphi\gamma}u_\xi d\xi\le$$

$$\le-\frac{d}{dt}\int(f'+\gamma-1)(\text{v}\psi-\ln \text{v}\psi-1)\,d\xi+C_7\left(\left\|\sqrt{\varphi\gamma}(u-f)\right\|^2+1\right),$$

$$I_3=\int\frac{\theta_\xi\varphi'\psi^{1/2}}{\text{v}^{1/2}\,\theta\varphi^3\gamma}d\xi-\int\frac{\theta_\xi\varphi'\psi^{1/2}\left((\text{v}\psi)^{1/2}-1\right)}{\text{v}^{1/2}\,\theta\varphi^3\gamma(\text{v}\psi)^{1/2}\sqrt{\text{v}\psi-\ln \text{v}\psi-1}}\sqrt{\text{v}\psi-\ln \text{v}\psi-1}d\xi\ .$$

Заметим, что

$$\frac{\left|(\text{v}\psi)^{1/2}-1\right|}{(\text{v}\psi)^{1/2}\sqrt{\text{v}\psi-\ln \text{v}\psi-1}}\le C_8,\quad \forall(x,t)\in\Pi\,.$$

Тогда

$$I_3\le\left(\int\frac{\theta_\xi^2}{\text{v}\,\theta^2\varphi^2\gamma}d\xi\right)^{1/2}\left(\int\frac{\varphi'^2\psi}{\varphi^4\gamma}d\xi\right)^{1/2}+$$

$$+C_8\left(\int\frac{\theta_\xi^2}{\text{v}\,\theta^2\varphi^2\gamma}d\xi\right)^{1/2}\left(\int\frac{\varphi'^2\psi}{\varphi^4\gamma}(\text{v}\psi-\ln \text{v}\psi-1)d\xi\right)^{1/2}\le$$

$$\le\delta_1\int\frac{\theta_\xi^2}{\text{v}\,\theta^2\varphi^2\gamma}d\xi+C_{\delta 1}\left(\int(\text{v}\psi-\ln \text{v}\psi-1)d\xi+1\right).$$

Рассуждая аналогично, можно оценить остальные интегралы.

$$I_4\le\delta_2\int\frac{c_\xi^2}{\text{v}\,\varphi^2}d\xi+C_{\delta 2}\left(\int(\text{v}\psi-\ln \text{v}\psi-1)d\xi+1\right),$$

$$I_5\le\delta_3\int\frac{c_\xi^2}{\text{v}\,\varphi^2}d\xi+C_{\delta 3}\left(\int(\text{v}\psi-\ln \text{v}\psi-1)d\xi+1\right),$$

$$I_6 \le \frac{1}{2}\int \frac{\theta_\xi^2}{\text{v}\,\theta^2\varphi^2\gamma}d\xi + \frac{1}{2}\int \frac{c_\xi^2}{\text{v}\,\varphi^2}d\xi, \quad I_7 \le \delta_4 \int \frac{c_\xi^2}{\text{v}\,\varphi^2}d\xi + C_{\delta 4}\left(\int (\text{v}\psi - \ln \text{v}\psi - 1)d\xi + 1\right).$$

$I_8$, $I_9$ оцениваются с учетом липшицевости функции $g(\rho, c, \theta)$ по $(\varphi\theta)^{1/2}$ и неравенства

$$\frac{\left|(\varphi\theta)^{1/2} - 1\right|}{\sqrt{\varphi\theta - \ln\varphi\theta - 1}} \le C_9, \quad \forall (x,t) \in \Pi.$$

$$I_8 \le N_1 \int \left|(\varphi\theta)^{1/2} - 1\right| \cdot |c\gamma - 1| d\xi \le N_1 \int \frac{\left|(\varphi\theta)^{1/2} - 1\right|}{\sqrt{\varphi\theta - \ln\varphi\theta - 1}} \sqrt{\varphi\theta - \ln\varphi\theta - 1} \cdot |c\gamma - 1| d\xi \le$$

$$\le N_1 C_9 \left(\int (\varphi\theta - \ln\varphi\theta - 1)d\xi\right)^{1/2} \left(\int (c\gamma - 1)^2 d\xi\right)^{1/2} \le$$

$$\le N_2 \left[\int \gamma(\varphi\theta - \ln\varphi\theta - 1)d\xi + \frac{1}{2}\int (c\gamma - 1)^2 d\xi\right].$$

Далее, разобьем числовую ось $R$ на области $\Omega_i(t)$, $i = 1,2$ следующим образом:

$$\Omega_1(t) = \{x \in R : \varphi(x)\theta(x,t) \le 1\}, \qquad \Omega_2(t) = \{x \in R : \varphi(x)\theta(x,t) > 1\}.$$

Тогда

$$I_9 = \int cg\,\gamma \frac{\varphi\theta - 1}{\theta}dx = \int\limits_{\Omega_1(t)} cg\gamma \frac{\varphi\theta - 1}{\theta}dx + \int\limits_{\Omega_2(t)} cg\gamma \frac{\varphi\theta - 1}{\theta}dx \le \int\limits_{\Omega_2(t)} cg\gamma \frac{\varphi\theta - 1}{\theta}dx$$

в силу положительности функций $g(\rho, c, \theta)$ и $c(x,t)$.

Заметим, что в $\Omega_2(t)$ выполняется неравенство:

$$\frac{\left((\varphi\theta)^{1/2} - 1\right)(\varphi\theta - 1)}{\varphi\theta(\varphi\theta - \ln\varphi\theta - 1)} < C_{10}, \quad \forall (x,t) \in \Pi.$$

Возвращаясь к $I_9$, имеем

$$I_9 \le N_3 \int\limits_{\Omega_2(t)} \frac{\left((\varphi\theta)^{1/2} - 1\right)(\varphi\theta - 1)}{\varphi\theta(\varphi\theta - \ln\varphi\theta - 1)}(\varphi\theta - \ln\varphi\theta - 1)d\xi \le C_{10}N_3 \int (\varphi\theta - \ln\varphi\theta - 1)dx.$$

Интегрируя по времени полученное из (8) неравенство и применяя лемму Гронуолла, переходя к исходным переменным, выводим оценку (7). Лемма доказана.

***3. Вспомогательное соотношение между искомыми функциями.*** Следуя [3], разобьем числовую ось $R$ и соответственно полосу $\Pi$ на конечные отрезки и прямоугольники:

$$R = \bigcup_{N=-\infty}^{\infty} \overline{\Omega}_N, \quad \Pi = \bigcup_{N=-\infty}^{\infty} \overline{Q}_N, \quad \Omega_N = \{x \mid N < x < N+1\}, \quad Q_N = \Omega_N \times (0,T), \quad N = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Возьмем произвольным образом один из таких прямоугольников. Так как в (7) функции $(\text{v}\psi - \ln \text{v}\psi - 1)$, $(\varphi\theta - \ln\varphi\theta - 1)$ неотрицательны при $\text{v} > 0$, $\theta > 0$, то

$U_N(t) + \int\limits_0^t W_N(\tau)\,d\tau \le E$, где интегралы в определении $U_N$ и $W_N$ берутся по $\Omega_N$.

Отсюда, согласно [3], существуют положительные постоянные $n(E)$, $M(E)$, не зависящие от $N$, такие что $\dfrac{n(E)}{C_1} \le \int\limits_N^{N+1} \mathrm{v}(x,t)\,dx \le M(E)C_1, \quad \dfrac{n(E)}{C_4} \le \int\limits_N^{N+1} \theta(x,t)\,dx \le M(E)C_4, \ \forall t \in [0,T]$. (11)

Из (11) вытекает, что при любом $t \in [0,T]$ в каждой области $\overline{\Omega}_N$ существуют точки $a(t) = a_N(t) \in [N, N+1]$, $a_1(t) = a_{1N}(t) \in [N, N+1]$ такие, что

$$\frac{n(E)}{C_1} \le \mathrm{v}\,(a(t),t) \le M(E)C_1\,, \quad \frac{n(E)}{C_4} \le \theta\,(a_1(t),t) \le M(E)C_4\,. \tag{12}$$

Из первого и третьего уравнений системы (1) выводится одно вспомогательное соотношение между искомыми функциями в каждом из прямоугольников $\overline{Q}_N$.

$$\mathrm{v}(x,t) = I^{-1}(t)B^{-1}(x,t)\left[\mathrm{v}_0(x) + \int\limits_0^t \theta(x,\tau)I(\tau)B(x,\tau)d\tau\right], \tag{13}$$

где $\quad I(t) = I_N(t) = \dfrac{\mathrm{v}_0(a(t))}{\mathrm{v}(a(t),t)}\exp\left\{\int\limits_0^t \theta(a(t),\tau)\,d\tau\right\}, \ B(x,t) = B_N(x,t) = \exp\left\{\int\limits_{a(t)}^x (u_0(\xi) - u(\xi,t))d\xi\right\}.$

Справедливы оценки:

$$0 < K_1^{-1} \le B(x,t) \le K_1, \quad 0 < K_2^{-1} \le I(t) \le K_2, \quad \forall\, x \in \overline{\Omega}_N, \quad \forall\, t \in [0,T] \tag{14}$$

*Доказательство* следует из оценок (7) и представления (13).

***4. Оценки для плотности (удельного объема) и температуры.*** Пусть $h(x,t)$ – непрерывная функция. Введем обозначения:

$$M_h(t) = \max_{|x|<\infty} h(x,t)\,, \quad m_h(t) = \min_{|x|<\infty} h(x,t)\,.$$

**ЛЕММА 2.** При выполнении условий теоремы справедливы оценки

$$m_{\mathrm{v}}(t) \ge N_4, \quad m_\theta(t) \ge N_5, \quad \forall\, t \in [0,T].$$

*Доказательство.* Строгая положительность удельного объема следует из представления (13) с учетом условий теоремы и (7), а температуры из уравнения теплопроводности системы (1).

**ЛЕММА 3.** При выполнении условий теоремы справедлива оценка

$$M_{\mathrm{v}}(t) \le N_3 \quad \forall\ t \in [0,T].$$

*Доказательство.* Имеют место следующие оценки [3]:

$$M_\theta(t) \le C_\varepsilon\, A(t) M_{\mathrm{v}}(t) + C\,, \quad \text{где} \quad A(t) = \int\limits_0^1 \frac{\theta_x^2}{\mathrm{v}\theta^2}dx\,. \tag{15}$$

Применяя к (13) лемму Гронуолла, с учетом оценок (14), (15), получим ограниченность удельного объема сверху.

Из леммы 3, с учетом оценок (7) и (15), вытекает оценка

$$\int\limits_0^t M_\theta(t)dt \le K_3, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{16}$$

***5. Оценки для производных от искомых функций.*** Умножим второе уравнение системы (1) на $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{\mathrm{v}}c_x\right)$ и проинтегрируем по $R$:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int \frac{1}{\mathrm{v}}c_x^2 dx + \int\left(\left(\frac{1}{\mathrm{v}}c_x\right)_x\right)^2 dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\mathrm{v}^2}c_x^2 u_x dx + \int cg\left(\frac{1}{\mathrm{v}}c_x\right)_x dx = I_1 + I_2\,. \tag{17}$$

Используя интегрирование по частям, неравенства Юнга, Коши, вложения, (9), липшицевость функции $g$ по $(\varphi\theta)^{1/2}$, оценим $I_k$, $k=1,2$.

$$I_1 = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{v^2} c_x^2 u_x dx = \int \left(\frac{1}{v} c_x\right)\left(\frac{1}{v} c_x\right)_x (u-f)dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{v^2} c_x^2 f' dx \le$$

$$\le \max_{x\in R}\left|\frac{1}{v} c_x\right| \left(\int \left(\frac{1}{v} c_x\right)_x^2 dx\right)^{1/2} \left(\int (u-f)^2 dx\right)^{1/2} + \frac{C_3}{2N_4}\int \frac{1}{v} c_x^2 dx.$$

Поскольку

$$\max_{x\in R}\left(\frac{1}{v} c_x\right)^2 \le 2\int \left|\frac{1}{v} c_x \left(\frac{1}{v} c_x\right)_x\right| dx \le \frac{2}{N_4^{1/2}}\left(\int \frac{1}{v} c_x^2 dx\right)^{1/2} \left(\int \left(\frac{1}{v} c_x\right)_x^2 dx\right)^{1/2},$$

то

$$I_1 \le \delta_1 \int \left(\frac{1}{v} c_x\right)_x^2 dx + C_{\delta 1}\int \frac{1}{v} c_x^2 dx.$$

Оценим $I_2$ с учетом (9).

$$I_2 = \int cg\left(\frac{1}{v} c_x\right)_x dx \le N_1 \int \left|(\varphi\theta)^{1/2} - 1\right| \left|\left(\frac{1}{v} c_x\right)_x\right| dx =$$

$$= N_1 \int \frac{\left|(\varphi\theta)^{1/2} - 1\right|}{\sqrt{\varphi\theta - \ln\varphi\theta - 1}} \sqrt{\varphi\theta - \ln\varphi\theta - 1} \left|\left(\frac{1}{v} c_x\right)_x\right| dx \le$$

$$\le N_1 C_9 \left(\int (\varphi\theta - \ln\varphi\theta - 1) dx\right)^{1/2} \left(\int \left(\frac{1}{v} c_x\right)_x^2 dx\right)^{1/2} \le \delta_2 \int \left(\frac{1}{v} c_x\right)_x^2 dx + C_{\delta 2}.$$

Выбираем $\delta_i$ достаточно малыми. Интегрированием (17) по $t$, с учетом (7), находим:

$$\int \frac{1}{v} c_x^2 dx + \int_0^t \int \left(\frac{1}{v} c_x\right)_x^2 dx d\tau \le N_7, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{18}$$

Умножим четвертое уравнение системы (1) на $(u-f)$ и проинтегрируем по $R$:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int (u-f)^2 dx + \int \left\{\frac{u_x^2}{v} + \frac{\theta}{v} f'\right\} dx = \int \frac{1}{v} u_x f' dx + \int \frac{\theta}{v} u_x dx = J_1 + J_2. \tag{19}$$

Оценим каждое $J_k$, $k=1,2$, по неравенству Коши, используя оценки (7), (9).

$$J_1 \le -\frac{d}{dt}\int f'(v\psi - \ln v\psi - 1)\, d\xi + C,$$

$$J_2 = \int \frac{\varphi\theta - 1}{\varphi v} u_x dx + \int \frac{1}{\varphi v} u_x dx \le -\frac{d}{dt}\int \frac{1}{\varphi}(v\psi - \ln v\psi - 1)\, d\xi + \delta\int \frac{1}{v} u_x^2 dx + C(1 + M_\theta(t))$$ Здесь

$$\left|\int \frac{\varphi\theta - 1}{\varphi v} u_x dx\right| \le \frac{1}{C_4}\int \frac{\left|(\varphi\theta)^{1/2} - 1\right| \left((\varphi\theta)^{1/2} + 1\right)}{\sqrt{\varphi\theta - \ln\varphi\theta - 1}} \sqrt{\varphi\theta - \ln\varphi\theta - 1} \cdot \frac{|u_x|}{v} dx \le$$

$$\le \delta\int \frac{1}{v} u_x^2 dx + C(1 + M_\theta(t)), \quad \delta < 1.$$

Из (19), после интегрирования по $t$, с учетом (4), (7), (16), выводим: $\int_0^t \|u_x\|^2 d\tau \le N_8, \quad \forall t \in [0,T]$.

Рассуждая аналогично, можно получить все оценки, необходимые для доказательства существования обобщенного решения. Единственность доказывается составлением однородного уравнения относительно разности двух возможных решений аналогично [4, 5, 6]. Существование и единственность локального решения устанавливается так же, как в [5, 7].

Теорема полностью доказана.

**Заключение**

- Доказаны существование и единственность обобщенного решения краевых задач для вырождающихся и не вырождающихся уравнений движения в неограниченной области с контактным разрывом и с учетом пористости среды.
- Доказана однозначная разрешимость «в целом» по времени краевых задач для одномерных нестационарных движений в неограниченной области сжимаемых и вязких газов с учетом магнитного и электрического полей.

**Литература**

1. Петров А.Н. Корректность начально-краевых задач для одномерных уравнений взаимопроникающего движения совершенных газов // Динамика сплошной среды. – 1982. – Вып. 56. – С.105–121.

2. Петров А.Н. Краевые задачи для уравнений одномерного нестационарного течения реагирующей смеси газов // Там же. – 1993. – Вып.107. – С.112–123.

3. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. – Новосибирск: Наука, 1983. – 319с.

4. Искендерова Д.А. Задача Коши для уравнений течения реагирующей смеси газов // Вестн. Казахск. гос. нац. ун-та. Сер. мат., мех., информатики. – 1998. – № 9. – С.77–92.

5. Искендерова Д.А. Локальная разрешимость задачи Коши для уравнений магнитной газовой динамики // Там же. – 2001. – № 3(26) – С.62–67.

6. Смагулов Ш.С., Искендерова Д.А. Математические вопросы модели магнитной газовой динамики. – Алматы: Гылым, 1997. – 166с.

7. Шелухин В.В. Движение с контактным разрывом в вязком теплопроводном газе // Там же. – 1982. – Вып. 57. – С.131–152.

8. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Система квазилинейных уравнений и их применения к газовой динамике. – М.: Наука, 1978. – 667с.

9. Искендерова Д.А., Токторбаев А.М. Разрешимость уравнений реагирующей смеси газов в неограниченной области // Труды VI совещания Российско – Казахстанской рабочей группы по вычислительным и информационным технологиям. – 2009. – С.183-190.