УДК 512.86

ОБРАЗУЮЩИЕ ЭЛЕМЕНТЫ ОБОБЩЕННОЙ СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ ГРУППЫ НАД КОММУТАТИВНЫМ ПОЛУЛОКАЛЬНЫМ КОЛЬЦОМ

Сатаров Ж.С., профессор, доктор физ.-мат.наук,
e-mail: Satarov1949@mail.ru
Жолдошова Ч. Б., преп. ОшТУ
***Кошакова Б. К.**, магистрант, ОшМПУ*

Аннотация: *Целью настоявшей работы является выявление образующих (порождающих) элементов обобщенной симплектической группы степени* $n \geq 2$ *над произвольным коммутативным полулокальным кольцом (для которого существование единицы не предполагается). Этот результат естественным образом обобщает классическую порождающую систему для одноименной группы над коммутативным полулокальным кольцом с 1.*

Ключевые слова*: симплектическая группа, квазиумножение, квазиобратимая матрица, радикал Джекобсона, эпиморфизм, радикальный элемент, порождающие матрицы.*

КОММУТАТИВДИК ПОЛУЛОКАЛДЫК АЛКАКТЫН ҮСТҮНДӨ ЖАЛПЫЛАНГАН СИМПЛЕКТИКАЛЫК ГРУППАНЫН ТҮЗҮҮЧҮ ЭЛЕМЕНТТЕРИ

Сатаров Ж. С., проф., физ.-мат.илим. доктору,
e-mail: Satarov1949@mail.ru
Жолдошова Ч. Б., окутуучу, ОшТУ
Кошакова Б. К., магистрант, ОшМПУ

Аннотация: *Бул жумуштун максаты каалаган (бирдик элементи жок деп эсептелген) коммутативдик полулокалдык алкактын үстүндө жалпыланган* $n \geq 2$*даражалуу симплектикалык группанын түзүүчү (жаратуучу) элементтерин аныктоо болуп эсептелет. Бул результат 1 элементи бар коммутативдик полулокалдык алкактын үстүндө ушул эле аталыштагы группанын классикалык жаратуучу системасын жалпылайт.*

Уруннтуу сөздөр: *симплектикалык группа, квазикөбөйтүү, квазитескериленүүчү матрица, Джекобсон радикалы, эпиморфизм, радикалдык элемент, жаратуучу матрицалар.*

FORMING ELEMENTS OF A GENERALIZED SYMPLECTIC GROUP OVER A COMMUTATIVE SEMILOCAL RING

Satarov Zhoomart Satarovich, prof., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Satarov1949@mail.ru
Zholdoshova Chebire Burkanovna, Rev. OshTU
Koshakova B. K., Master 's student of OshSPU

Annotation*: The aim of the present work is to identify the generating elements of a generalized symplectic group of degree over an arbitrary commutative semilocal ring (for which the existence of a unit is not assumed). This result naturally generalizes the classical generating system for a group of the same name over a commutative semilocal ring with 1.*

Keywords: *symplectic group, quasi-multiplication, quasi-invertible matrix, Jacobson radical, epimorphism, radical element, generating matrices.*

Введение

При изучений линейных групп (в частности над кольцами) важное место занимают их образующие (порождающие) элементты. Предлагаемая работа относится к названному направлению. Здесь речь идет о неклассических симплектических группах. Для того, чтобы говорить об обобщенной симплектической группе над коммутативным кольцом (для которого существование единичного элемента необязательно), нам нужно ввести названную группу и обосновать ее.

§1. Обоснование изучаемого объекта

Группа $Sp^{\circ}(2n,R)$ вводится следующим образом. Пусть $\Lambda -$ произвольное ассоциативное кольцо и $\circ$ $-$ его квазиумножение, т.е. $x \circ y = x + xy + y$.

Элемент $\alpha \in \Lambda$ называется квазиобратимым, если $\alpha \circ \beta = 0 = \beta \circ \alpha$ при некотором β из Λ. По квазиобратимому $\alpha \in \Lambda$ его квазиобратное $\beta = \alpha'$ всегда определяется однозначно. Совокупность всех квазиобратимых элементов Λ° кольца Λ образует группу относительно композиции $\circ$ (где единицей будет нуль). В случае, когда $\Lambda = M(2n,R)$ – полное матричное кольцо (основное кольцо ассоциативно), группу квазиобратимых матриц из $M(2n,R)$ обозначим как $GL^{\circ}(2n,R)$ и назовем ее обобщенной полной линейной группой над R степени $2n$. Ниже ^{T}, как всегда, будет обозначать транспонирование матриц.

Пусть теперь R – произвольное (ассоциативно-)коммутативное кольцо, для которого существование 1 не обязательно. Обозначим через $Sp^{\circ}(2n,R)$ множество матриц $\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$ из $M(2n,R)$, разбитых на клетки порядка n и удовлетворяющих условиям

$$X - YZ^{T} + XT^{T} + T^{T} = Y + YX^{T} - XY^{T} - Y^{T} = Z - TZ^{T} + ZT^{T} - Z^{T} = 0. \quad (Sp^{\circ})$$

Покажем, что $Sp^{\circ}(2n,R)$ образует группу относительно матричного квазиум ножения. Пусть $a = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$ – произвольная матрица из $Sp^{\circ}(2n,R)$. Составленная по ней матрица $b = \begin{pmatrix} T^{T} & -Y^{T} \\ -Z^{T} & X^{T} \end{pmatrix}$ удовлетворяет равенству $a \circ b = 0$. В [1] над произвольным ассоциативно-коммутативным кольцом был введен квази- определитель det° (любого порядка) и там же показана его полная мультипликативность. Применяя к последнему равенству квазиопределитель det° порядка $2n$, будем иметь

$$det^{\circ} a \circ det^{\circ} b = det^{\circ}(a \circ b) = det^{\circ} 0 = 0,$$

т.е. имеем $det^{\circ} a \in R^{\circ}$. Но, как доказано (см. [2, с. 177]), так может быть (в том и) только в том случае, когда $a \in GL^{\circ}(2n,R)$. Последнее в свою очередь приводит нас к

$$a' = a' \circ 0 = a' \circ (a \circ b) = (a' \circ a) \circ b = 0 \circ b = b.$$

Теперь равенство $b \circ a = 0$ влечет за собой клеточные соотношения

$$X - Y^{T}Z + T^{T}X + T^{T} = Y + T^{T}Y - Y^{T}T - Y^{T} = Z - Z^{T}X + X^{T}Z - Z^{T} = 0. \quad (Sp^{\circ} \rightarrow)$$

Полученные следствия $(Sp^{\circ} \rightarrow)$ показывают, что $b \in Sp^{\circ}(2n,R)$. Итак, установлено, что $Sp^{\circ}(2n,R)$ состоит только из квазиобратимых матриц и оно наряду с каждым своим элементом a содержит также квазиобратное ему a'.

Возьмем теперь произвольным образом матрицу $c = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp^{\circ}(2n,R)$ (и здесь клетки имеют порядок n). Покажем, что квазипроизведение $a \circ c =$ $\begin{pmatrix} X \circ A + YC & Y + XB + YD + B \\ Z + ZA + TC + C & ZB + T \circ D \end{pmatrix}$ также удовлетворяет условиям (Sp°). Действительно, для последнего правильность первого равенства (Sp°) видна из

$$\begin{aligned}
&X \circ A + YC - (Y + XB + YD + B)(Z + ZA + TC + C)^{T} + (X \circ A + YC)(ZB + T \circ D)^{T} + \\
&(ZB + T \circ D)^{T} = X + XA + A + YC - (Y + XB + YD + B)(Z^{T} + A^{T}Z^{T} + C^{T}T^{T} + C^{T}) + \\
&(X + XA + A + YC)(B^{T}Z^{T} + T^{T} + D^{T}T^{T} + D^{T}) + B^{T}Z^{T} + T^{T} + D^{T}T^{T} + D^{T} = \\
&(X - YZ^{T} + XT^{T} + T^{T}) + (A - BC^{T} + AD^{T} + D^{T}) + X(A - BC^{T} + AD^{T} + D^{T}) + \\
&Y(C - DC^{T} + CD^{T} - C^{T}) + (A - BC^{T} + AD^{T} + D^{T})T^{T} - (B + BA^{T} - AB^{T} - B^{T})Z^{T} + \\
&Y(C - DC^{T} + CD^{T} - C^{T})T^{T} - Y(A - BC^{T} + AD^{T} + D^{T})^{T}Z^{T} - X(B + BA^{T} - AB^{T} - B^{T})Z^{T} + \\
&X(A - BC^{T} + AD^{T} + D^{T})T^{T} = 0
\end{aligned}$$

(в последнем члене все скобочные суммы – нулевые, ибо a, c удовлетворяют требованиям (Sp°)). Остальные равенства из (Sp°) для $a \circ c$ проверяются совершенно аналогично. А это означает, что $Sp^\circ(2n,R)$ образует также систему относительно матричного квазиумножения. Приведенные факты вместе показывают, что $Sp^\circ(2n,R)$ образует подгруппу в $GL^\circ(2n,R)$. Группу $Sp^\circ(2n,R)$ мы и назовем *обобщенной симплектической группой* степени $2n$ над кольцом R.

Вернемся на короткое время к случаю, когда кольцо R обладает 1.
Обозначим через e и E единичные матрицы из $M(n,R)$ и $M(2n,R)$ соответственно. Пусть $I = \begin{pmatrix} 0 & e \\ -e & 0 \end{pmatrix}$ – форма порядка $2n$ и пусть $Sp(2n,R) =$ $\{x \in GL(2n,R) : xIx^T = I\}$– классическая симплектическая группа над R степени $2n$. При принятых обозначениях имеют место легко проверяемые эквиваленции

$$a \in Sp^\circ(2n,R) \leftrightarrow (Sp^\circ) \leftrightarrow (E+a)I(E+a)^T = I \leftrightarrow E+a \in Sp(2n,R). \qquad (\leftrightarrow)$$

Теперь из равенства $E + x \circ y = (E+x)(E+y)$ (x, y – любые матрицы из $M(2n,R)$) и эквиваленций ($\leftrightarrow$) очень просто усматривается изоморфность отображения

$$Sp^\circ(2n,R) \to Sp(2n,R), \; a \to E + a.$$

А это говорит о том, что введенная $Sp^\circ(2n,R)$ в случае R с 1 совпадает с обычной симплектической группой $Sp(2n,R)$.

Очевидными примерами полулокальных колец без 1 могут послужить прямые суммы любых полулокальных и ненулевых радикальных колец (ассоциативное кольцо называется *радикальным,* если оно совпадает со своим радикалом Джекобсона). То, что полулокальные (не обязательно с 1) кольца образуют несметно большой класс по отношению к их подклассу таких колец с 1, методом прямых сумм может быть показано как в [2] для случая локальных R.

Начиная отсюда всюду R считается произвольным коммутативным полулокальным кольцом не обязательно с 1 и $J = J(R)$ радикалом Джекобсона этого кольца. Нашим главным объектом исследования в этой главе является обобщенная симплектическая группа $Sp^\circ(2n,R)$, $n \geq 2$, над этим кольцом R.

§2. Образующие элементы группы $Sp^\circ(2n,R)$

По определению для кольца R мы имеем $R/J \cong k_1 \oplus \ldots \oplus k_m$, где k_i – некоторые поля ($i = 1, \ldots, m$, $m \geq 1$). Обозначим через R_i полный прообраз слагаемого k_i при естественном эпиморфизме

$$R \to \overline{R} = R/J, \;\; x \to \overline{x} = x + J. \qquad (\,\overline{}\,)$$

Эти R_i образуют локальные подкольца в R и имеют (общие с R) радикалы J. Для кольца R очевидно разложение

$$R = R_1 + \ldots + R_m. \qquad (+)$$

Далее будут действовать следующие обозначения: для натурального k $I(k) = \{1, 2, \ldots, k\}$ и $r(k)$ – наименьший положительный вычет числа k по модулю m; для номеров $i \in I(2mn)$ $R_i = R_{r(i)}$; для $i \in I(mn)$ e_i – некоторый (не важно какой) прообраз единицы $1_i \in k_i$ при эпиморфизме ($\overline{}$) и для любого $k \in I(2mn)$ $e_k = e_{r(k)}$; если иное не оговорено, то $\equiv$ – сравнение в R по модулю J; если $k \in I(2mn)$, то $k^* = k + mn$ при $k \leq mn$ и $k^* = k - mn$ при $k > mn$; $A = \{<i, j> \in I(2mn) \times I(2mn) : i \equiv j(\mathrm{mod}\, m) \,\&\, i \neq j\}$; для номеров $i \in I(mn)$
$P_i = \{j \in I(2mn) : <i, j> \in A \,\&\, (i < j \leq mn \vee j \geq i^*)\}$, $Q_i = \{j \in I(2mn) : <i, j> \in A \,\&$ $(i \neq j \leq mn \vee j \geq i^*)\}$; для пары $<i, j> \in A$ ε_{ij} – оператор, действующий на R (слева) как: $j = i^* \to \varepsilon_{ij}\alpha = 0$, $j \neq i^* \,\&\, (i \leq nm < j \vee j \leq nm < i) \to \varepsilon_{ij}\alpha = \alpha$, $(i, j \leq mn \vee$

$i, j > mn) \to \varepsilon_{ij}\alpha = -\alpha$; и, наконец, для номеров $i, j \in I(2mn)$ и элемента $\alpha \in R_i$ $(\alpha)_{ij}$ – матрица порядка $2mn$, где на позиции $< i, j >$ стоит элемент α и все прочие позиции заполнены нулями.

Как показывает (+), элементы из $M(2n, R)$ наряду с обычными допускают также "развернутые матричные" представления

$$a = (\tilde{a}_{ij})_{1\le i,j\le 2mn},\ i \equiv j\,(mod\, m), \qquad (1)$$

где $\tilde{a}_{ij} \in R_i$. Представление в виде (1) вообще говоря не однозначно (оно однозначно в том и только том случае, когда $m = 1$ или $J = \{0\}$). В наших рассуждениях как обычные, так и развернутые представления (1) матриц из $Sp^{\circ}(2n, R)$ одинаково будут использованы.

Для введенных выше локальных слагаемых R_i имеют место дизъюнктные разложения

$$R_i = (-\bar{e}_i) \cup R_i^{\circ},\ \ i = 1, \ldots, m \qquad (\cup)$$

(доказательство этого факта для любого локального кольца содержится в [2, с. 15]). Далее, элементы из J будем называть *радикальными* элементами.

Пользуясь образующими обычной симплектической группы $Sp(2n, R)$, приведенными в [3] и [4] (для случая коммутативного полулокального R с 1), составим следующие (симплектически элементарные) матрицы:

$d_k(\varepsilon) = (\varepsilon)_{kk} + (\varepsilon')_{k^*k^*}$, $\varepsilon \in R_k^{\circ}$, $k \in I(2mn)$, $t_{ij}(\alpha) = (\alpha)_{ij} + (\varepsilon_{ij}\alpha)_{j^*i^*}$, $\alpha \in R_i$, $< i, j > \in A$.

Для последних матриц верна формула $t_{ij}(\alpha) = t_{j^*i^*}(\varepsilon_{ij}\,\alpha)$ при всех $< i, j > \in A$,

$j \ne i^*$. Покажем, что матрицы $d_k(\varepsilon), t_{ij}(\alpha)$ входят в $Sp^{\circ}(2n, R)$ (они и будут составлять там "внутренние" образующие). Действительно, возьмем произвольно матрицу $X \in GL^{\circ}(n, R)$ и симметрическую матрицу Y из $M(n, R)$. Как легко проверить, составленные по ним (клеточные) матрицы

$$a = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & (X')^T \end{pmatrix},\quad b = \begin{pmatrix} 0 & Y \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad c = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \end{pmatrix}$$

удовлетворяют условиям (Sp°), и, поэтому, являются некоторыми элементами из $Sp^{\circ}(2n, R)$. Включения $d_k(\varepsilon), t_{ij}(\alpha) \in Sp^{\circ}(2n, R)$ теперь очень просто следуют из того, что матрицы $t_{ij}(\alpha)$ при $i, j \le mn$ или $i, j > mn$ и $d_k(\varepsilon)$ имеют вид a, и $t_{ij}(\alpha)$ же в прочих случаях – либо вид b, либо же вид c. Для квазиобратных этих симплектических матриц имеют место формулы $d_k'(\varepsilon) = d_k(\varepsilon')$, $t_{ij}'(\alpha) = t_{ij}(-\alpha)$.

Введем к рассмотрению еще один тип матриц из $Sp^{\circ}(2n, R)$ специального вида. А именно, ниже под записью (is), где $i \in I(mn)$, $s \in P_i$, мы условимся понимать некоторые слова вида $t_{is}(\chi) \circ t_{si}(\pi)$, где аргументы χ, π связаны соотношением $\chi\pi \equiv -e_i$. "Внутренние" матрицы (is) в наших рассуждениях будут играть роль обычных матриц-транспозиций. Их мы для равных индексов доопределяем как $(ii) = 0$.

Наши дальнейшие рассуждения используют следующую лемму.

Лемма 1. *Если в неразвернутой матрице $a = (a_{pq})_{1\le p,q\le 2n}$ из $Sp^{\circ}(2n, R)$ i-я строка равна нулю, $i \le n$, то равен нулю и ее $(i+n)$-й столбец. Аналогичным образом, из того, что в a равен нулю i-й столбец, следует равенство нулю ее $(i+n)$-ой строки.*

Доказательство. Пусть $a = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$ – разбиение матрицы a на клетки порядка n. Тогда, как показывают соотношения $Y + YX^T - XY^T = Y^T$, $X - YZ^T + XT^T = -T^T$ (они содержатся среди

(Sp°)), матрицы Y^T и T^T имеют i-ые нулевые строки. А это означает, что i-ые столбцы в Y, T также будут нулевыми, т.е. первое утверждение леммы действительно имеет место. А что касается второго утверждения, то оно совершенно аналогично извлекается из первого и третьего равенств (Sp° $\to$). Лемма 1 доказана.

Покажем теперь, что группа $Sp^\circ(2n,R)$ порождается матрицами

$$t_{ij}(\alpha),\ \alpha \in R_i,\ <i,j> \in A;\quad d_k(\varepsilon),\ \varepsilon \in R_k^\circ,\ k \in I(2mn). \qquad (2)$$

Пусть $a=(\widetilde{a}_{ij})=\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$ – произвольная матрица из $Sp^\circ(2n,R)$, представленная в развернутом виде (1). Она на конечное число матриц из (2) расщепляется следующим образом. Первый шаг расщепления состоит из квазиумножения a справа на некоторую матрицу вида $(1s)'$, $s \in P_1 \cup \{1\}$. Если $\widetilde{a}_{11} \in R_1^\circ$, то мы положим $s=1$, т.е. в этом случае никакое расщепление не потребуется.

Пусть в a $\widetilde{a}_{11} \notin R_1^\circ$. Согласно разложению ($\smile$) так может быть только тогда, когда $\widetilde{a}_{11} \equiv -e_1$. Здесь сравнение позиций $<1,1>$ в

$$X - YZ^T + XT^T + T^T = 0 \qquad (3)$$

дает нам

$$\widetilde{a}_{11} \circ \widetilde{a}_{1+mn,\,1+mn} - \sum_{0 \le k < n} \widetilde{a}_{1,\,1+(n+k)m} \widetilde{a}_{1+mn,\,1+km} + \sum_{1 \le k < n} \widetilde{a}_{1,\,1+km} \widetilde{a}_{1+mn,\,1+(n+k)m} \equiv 0,$$

т.е. будем иметь

$$\sum_{1 \le k < n} \widetilde{a}_{1,\,1+km} \widetilde{a}_{1+mn,\,1+(n+k)m} - \sum_{0 \le k < n} \widetilde{a}_{1,\,1+(n+k)m} \widetilde{a}_{1+mn,\,1+km} \equiv e_1.$$

Но последнее, как легко видеть, возможно только тогда, когда найдется номер $s \in I(2n-1)$, для которого $\widetilde{a}_{1,\,1+sm} \not\equiv 0$. Квазиумножая a справа на $(1s)'$, здесь мы получаем (развернутую) матрицу, где на позиции $<1,1>$ стоит элемент $\widetilde{a}_{11} - \widetilde{a}_{1_s}\pi \not\equiv -e_1$ (для простоты изложения, далее, матрицу, полученную после каждого шага отщепления будем обозначать той же буквой $a=(\widetilde{a}_{ij})$). Согласно разложению ($\smile$) этот элемент $\widetilde{a}_{11}$ уже будет квазиобратимым. (Легко проверить, что произведенная операция позицию $<1, s>$ в a заменяет на некоторый радикальный элемент.)

Чуть отвлекаясь в сторону, мы для номера $k \in I(n)$ и матрицы a из $M(2n, R)$ условимся писать $a(k)$, если в этой матрице равны нулю все строки и столбцы с номерами из $\{1, \ldots, k\} \cup \{1+n, \ldots, k+n\}$. Следующий этап расщепления составляют последовательные квазиумножения a справа на матрицы $d_1(\widetilde{a}'_{11})$, $\prod_{1^* \ne q \in P_1} t_{1q}(-\widetilde{a}_{1q})$ и $t_{11^*}(-\widetilde{a}_{11^*})$. Эта операция аннулирует всю первую строку в a. Квазиумножения теперь полученной матрицы слева последовательно на $\prod_{1^* \ne q \in P_1} t_{q1}(-\widetilde{a}_{q1})$ и $t_{1^*1}(-\widetilde{a}_{1^*1})$ приведут ее к клеточно-диагональному виду $a = diag(0, \widetilde{a}^1)$, где $\widetilde{a}^1$ – некоторая матрица порядка $2mn-1$. Повторяя описанную процедуру при помощи того же равенства (3) и матриц

$$(2s)',\ s \in P_2 \cup \{2\},\ d_2(\widetilde{a}'_{22}),\quad \prod_{2^* \ne q \in P_2} t_{2q}(-\widetilde{a}_{2q}),\ t_{22^*}(-\widetilde{a}_{22^*}),\quad \prod_{2^* \ne q \in P_2} t_{q2}(-\widetilde{a}_{q2}),\ t_{2^*2}(-\widetilde{a}_{2^*2}),$$

мы аналогичным образом приходим к $a = diag(0, 0, \widetilde{a}^2)$, где $\widetilde{a}^2$ – некоторая матрица порядка $2mn-2$ и т.д. Этот процесс на m-м шаге приводит нас к матрице $a = diag(0, \ldots, 0, \widetilde{a}^m)$ с клеткой $\widetilde{a}^m$ порядка $m(2n-1)$. Последнее в неразвернутой форме интерпретируется как $a = diag(0, a^1)$, где порядок клетки a^1 равен $2n-1$. По лемме 1 в такой матрице a строка и столбец с номерами $n+1$ также обязаны быть нулевыми, т.е. для нее будем иметь $a = a(1)$. Повторяя описанные отщепления для клетки a^1, мы аналогичным образом приходим к $a = a(2)$ и т.д. Этот процесс на n-м шаге дает нам $a = a(n) = 0$. А это и означает завершение процесса расщепления a на матрицы из (2).

Выводы: Применения принцип отщепления, аналогично классическим случаям, здесь выявлены образующие элементы для обобщенной симплектической группы над произвольным коммутативным полулокальным кольцом. Как хорошо видно, все эти элементы являются элементарными.
Заключение: С 1998 года одним из авторов были начаты исследования по выявлению образующих из соотношений некоторых линейных групп над ассоциативными кольцами (вообще говоря) без 1. Они были подхвачены также другими авторами и интенсивно ведутся и сейчас. Материал настоящей работы вносит дополнение к названным исследованиям.

Литература:

1. *Сатаров Ж.С.* Определяющие соотношения обобщенных ортого-нальных групп над коммутативными локальными кольцами без единицы //Изв.вузов.Математика. 2000.№6.С.24- 32
2. *Сатаров Ж.* Образующие элементы и определяющие соотношения в линейных группах: Дисс…. докт. физ.-матем. наук. Ош, 1998.232с.
3. *Сатаров Ж.* Образующие элементы и определяющие соотношения в линейных группах: Автореферат дисс…. докт. физ.-матем. наук. Красноярск, 1998.31с.
4. *Сатаров Ж.С.* Определяющие соотношения подгрупп полной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц// Изв. вузов. Матемтика. 1991. №1. С.47–53.