УДК 517.929

ДИНАМИКАЛЫК СИСТЕМАЛАРДЫН ТЕОРИЯСЫНДАГЫ ЧЫГАРЫЛЫШТАРДЫН МЕЙКИНДИГИН АЖЫРАТУУ ЫКМАСЫ

Панков Павел Сергеевич, ф.-м.и.д., проф., КР УИА корр.-мүчөсү, pps5050@mail.ru, КР УИА Математика институту, Бишкек шаары, Кыргыз Республикасы
Жээнтаева Ж. К., ф.-м.и.к., доцент, jjk_kuu@mail.ru, Б. Сыдыков ат. КӨЭАУ Ош шаары, Кыргыз Республикасы

Аннотация: *Аргументи бир аз кечигүү менен болгон дифференциалдык теңдемелерди изилдөө үчүн чыгарылыштардын мейкиндигин жана баштапкы маселелердин чыгарылыштарынын мейкиндигинде эквиваленттүүлүктүн катыштарын ажыратуу ыкмасы мурда иштелип чыккан. Асимптотикалык эквиваленттүүлүктүн катышы: убакыт өсүшү менен эки чыгарылыштын арасындагы аралык нөлгө умтулат, дал келген фактор-мейкиндик асимптотикалык фактор-мейкиндик деп аталат***;** *«Асимптотикалык фактор-мейкиндиктин өлчөмү баштапкы мейкиндиктин өлчөмүнөн азыраак» деген кубулуш «Чыгарылыштардын мейкиндигинин өлчөмүнүн асимптотикалык кыскарышы» деп аталды. Бул макалада ал ыкма динамикалык системалардын кеңири класстарында жайылтылган.*

Түйүндүү сөздөр: *ажыратуу ыкмасы, эквиваленттүүлүктүн катышы, фактор-мейкиндик, асимптотикалык эквиваленттүүлүк, динамикалык система, баштапкы маселе*

МЕТОД РАСЩЕПЛЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА РЕШЕНИЙ В ТЕОРИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Панков Павел Сергеевич, д.ф.-м.н., проф., член-корр. НАН КР, pps5050@mail.ru, Институт математики НАН КР, г. Бишкек, Кыргызская Республика
Жээнтаева Ж. К., к.ф.-м.н., доцент, jjk_kuu@mail.ru, Кыргызско-Узбекский международный университет имени Б. Сыдыкова, г. Ош, Кыргызская Республика

Аннотация: *Для исследования дифференциальных уравнений с малым запаздыванием ранее были разработаны метод расщепления пространства решений и отношения эквивалентности в пространстве решений начальных задач. Отношение асимптотической эквивалентности: расстояние между двумя решениями стремится к нулю при увеличении времени, соответствующее фактор-пространство названо асимптотическим фактор-пространством; явление «Размерность асимптотического фактор-пространства меньше, чем размерность исходного пространства» было названо «Асимптотическое уменьшение размерности пространства решений». В данной статье этот метод распространен на более широкие классы динамических систем.*

Ключевые слова: *метод расщепления, отношение эквивалентности, фактор-пространство, асимптотическая эквивалентность, динамическая система, начальная задача*

METHOD TO SPLIT SPACE OF SOLUTIONS IN THE THEORY OF DYNAMICAL SYSTEMS

Pankov Pavel Sergeevich, d.ph.-m. sciences, professor, corr. member of NAS of KR, pps5050@mail.ru Institute of Mathematics of NAS of KR, Bishkek, Kyrgyz Republic, Zheentaeva Zhumagul Keneshovna, c. ph.-m. s., docent, jjk_kuu@mail.ru, Kyrgyz-Uzbek International university named after B.Sydykov, Osh, Kyrgyz Republic

Abstract: *To investigate differential equations with small delay the method of splitting the space* *of solutions and equivalence relations were developed earlier. The asymptotical equivalence relation: distance between two solutions tends to zero while time increases, the corresponding quotient space was called "asymptotical quotient space"; the phenomenon "the dimension of the quotient space is less than one of the initial space" was called "asymptotical reduction of dimension of space of solutions". In the paper, this method is generalized to larger classes of dynamical systems.*

***Keywords**: method to split, equivalence relation, quotient space, asymptotical equivalence, dynamical system, initial value problem.*

1. Введение

Начиная с 1950-х годов, в литературе был получен ряд результатов о свойствах решений дифференциальных уравнений с малым запаздыванием. Для единообразного представления таких результатов авторами было предложено применить понятия «эквивалентности при больших значениях аргумента» и соответствующего фактор-пространства. Для расширения таких результатов на более широкие классы динамических систем авторами был предложен метод расщепления пространства решений начальных задач в прямую сумму подпространств. В данной статье представлены в наиболее общем виде методика и полученные результаты.

Во втором разделе рассматриваются введенные отношения эквивалентности в пространстве решений начальных задач для динамических систем.

Отношение асимптотической (экспоненциальной)эквивалентности: расстояние между двумя решениями стремится к нулю при увеличении времени (убывает экспоненциально при увеличении времени). Отношение хаусдорфовой асимптотической эквивалентности: неограниченное сближение решений с обратимым преобразованием аргумента с увеличением времени, соответствующее фактор-пространство названо хаусдорфовым асимптотическим фактор-пространством.

Обозначим $\boldsymbol{N}0 = \{0,1,2,3,\ldots\}$, $\boldsymbol{N}= \{1,2,3,\ldots\}$, $\boldsymbol{R} =(-\infty,\infty)$,$\boldsymbol{R}_+ =[0, \infty)$, $\boldsymbol{R}_{++} =(0, \infty)$, E_n - nxn-единичная матрица, $n\in\boldsymbol{N}$; $C^{m(k})D$ - пространство функций u: $D\rightarrow\boldsymbol{R}^m$, непрерывных вместе с производными до k порядка, D - область в $\boldsymbol{R}$, $0\in D,m\in\boldsymbol{N}$, $k\in\boldsymbol{N}_0$; $C^{*m(k)}D$ - подпространство функций, удовлетворяющих условию $u(0)=0\in\boldsymbol{R}^m$. $m=1$ $uk=0$ будем опускать.

Для единого изложения задач с непрерывным и дискретным временем будем предполагать, что аргумент искомых функций t принадлежит вполне упорядоченному множеству Λ, имеющему наименьший элемент (будем обозначать его *«0»*), но не имеющему наибольшего элемента. Обычно используется $\Lambda =\boldsymbol{R}+$*или* $\Lambda =\boldsymbol{N}_0$. Если предположить, что начальная задача всегда имеет решение, оно является единственным и глобальным, то есть продолжается на все множество Λ , то пространство решений некоторой динамической системы с начальным условием φ можно представить в виде оператора $W(t, \varphi)$: $\Lambda\, x\Phi\rightarrow Z$, Φ- топологическое пространство начальных условий, Z - топологическое пространство значений решений. В случае $\Lambda =\boldsymbol{R}_+$ будем предполагать, что $W(t, \varphi)$ непрерывен по t.

Будем рассматривать следующие виды пространств Φ и Z: линейные одномерные ($\boldsymbol{R}$); - линейные многомерные ($\boldsymbol{R}^d$); линейные нормированные; равномерные.

2. Определения

О п р е д е л е н и е 1. Следующее отношение эквивалентности в пространстве Φ будем называть отношением асимптотической эквивалентности:

Если Z- линейное нормированное пространство, то

$$(\varphi_1 \sim \varphi_2) \Leftrightarrow(\lim\{\|W(t, \varphi_1)-W(t, \varphi_2) \|_Z: t\rightarrow\infty\}= 0). \qquad (1)$$

Если Z- метрическое пространство, то

$$(\varphi_1 \sim \varphi_2) \Leftrightarrow (\lim\{p_z (W(t, \varphi_1), W(t, \varphi_2)): t\rightarrow\infty\}= 0). \qquad (2)$$

Если Z - равномерное пространство с множеством Γ_Z окружений диагонали, то

$$(\varphi_1 \sim \varphi_2) \Leftrightarrow (\forall V\in \Gamma_Z)(\exists t_1\in \Lambda) (\forall_t >t_1)((W(t, \varphi_1), W(t, \varphi_2)) \in V). \qquad (3)$$

Нами доказано, что введенное отношение является корректным отношением эквивалентности.

Соответствующее фактор-пространство названо асимптотическим фактор-пространством. Явление «размерность асимптотического фактор-пространства меньше, чем размерность исходного пространства» названо «асимптотическое уменьшение размерности пространства решений».

О п р е д е л е н и е 2. Следующее отношение эквивалентности в пространстве Φ названо отношением λ-экспоненциальной асимптотической эквивалентности ($\lambda \in \mathbf{R}_{++}$):

Если Z- линейное нормированное пространство, то

$$(\varphi_1 \sim\lambda\ \varphi_2) \Leftrightarrow (sup\{\ ||W(t, \varphi_1)\text{-}W(t, \varphi_2)||zexp(\lambda\ t):\ t\in \Lambda\ \}<\infty). \qquad (4)$$

Если Z- метрическое пространство, то

$$(\varphi_1 \sim\lambda\ \varphi_2) \Leftrightarrow (sup\{\ \rho z(W(t, \varphi_1),\ W(t, \varphi_2))\ exp((\lambda t):\ t\in \Lambda\ \}<\infty). \qquad (5)$$

Соответствующее фактор-пространство названо асимптотическим λ -экспоненци-альным фактор-пространством.

О п р е д е л е н и е 3. При $\Lambda=\mathbf{R}_+$ следующее отношение эквивалентности в пространстве Фназвано отношением хаусдорфовой асимптотической эквивалентности:

Если Z- метрическое пространство, то $(\varphi_1 \cong \varphi_2)$ определяется следующим образом: для любого $\varepsilon \in \mathbf{R}_{++}$ можно найти такое $s\in\mathbf{R}_+$ и такую строго возрастающую до бесконечности непрерывную функцию $\vartheta:[s,\infty)\to\mathbf{R}_+$, что $(\forall_t \in[s, \infty))(\ \rho z\ (W(t, \varphi_1),\ W(\vartheta\ (t), \varphi_2))< \varepsilon\ )$.

Если Z - равномерное пространство с множеством Γ_Z окружений диагонали, то $(\varphi_1 \cong \varphi_2)$ определяется следующим образом: для любого $\varepsilon \in \Gamma_Z$можно найти такое $s\in\mathbf{R}_+$ и такую строго возрастающую до бесконечности непрерывную функцию $\vartheta\ (t):[s, \infty)\to\mathbf{R}_+$, что

$$(\forall_t \in[s, \infty))(\ (W(t, \varphi_1),\ W(\vartheta\ (t),), \varphi_2)) \in \varepsilon\ ). \qquad (6)$$

Также доказано, что введенное отношение является корректным отношением эквивалентности. Хаусдорфово асимптотическое фактор-пространство обозначено$\Phi^{*=}$.

3. Обзор результатов по асимптотике решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

Для случая, когда $\Lambda=\mathbf{R}_+$, W(t, φ (·)) – решение начальной задачи с начальным условием $\varphi \in \Phi:=C[-h,0]$ для линейного дифференциального уравнения с ограниченным запаздыванием аргумента, в ряде работ (см. обзор в [1], [2]) были найдены условия, когда существует такое конечномерное подпространство $\Phi_0\subset \Phi$, что

$$(\forall\varphi \in \Phi)(\ \exists\varphi_0\in \Phi_0)(lim\{\ ||\ W(t, \varphi)\ \text{-}W(t, \varphi_0)||t\to\infty\}\ )=0, \qquad (7)$$

то есть пространство решений «асимптотически конечномерно». Решения W(t, φ_0) ($\varphi_0\in\Phi0$) были названы специальными.

В связи с этими результатами мы выдвинули гипотезу [3] о том, что аналогичные результаты должны иметь место для более фундаментального типа динамических систем – разностных уравнений, и что результаты, полученные для разностных уравнений, могут улучшить известные для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

Для решений линейных автономных систем вопрос о структуре пространства решений сводится к исследованию соответствующих характеристических (алгебраических в широком смысле) уравнений. Поэтому мы рассматриваем существенно неавтономные уравнения.

Пусть Ω - некоторое нормированное пространство. Рассмотрены четыре последовательности операторов: a_n(число): $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$; b_n: $\Omega \to\mathbf{R}$; c_n: $R\to \Omega$; d_n: $\Omega \to \Omega$, n=0,1,2,… с ограничениями $a_n \in A=[a,a_+]$; $||bn||\leq b>0$, $||c_n||\leq c>0$, $||d_n||\leq d>0$, и система разностных уравнений в $R \times \boldsymbol{\Omega}$

$$x_n+1= a_n\ x_n + b_n y_n,\ yn+1= c_n x_n + d_n y_n,\ n=0,1,2,\ldots \qquad (8)$$

Имеют место

Т е о р е м а 1. Если существует такое $\mathcal{V} >0$, что 1) $q_- := a—\mathcal{V}b>0$; 2)$c+\mathcal{V}b\leq \mathcal{V}q_-$, то существует такое (названное специальным) решение {X, Y}, что

$$(\forall\ n\in N)(X_n \geq q_-^n;\ ||Y_n||\leq \mathcal{V}X_n). \qquad (9)$$

Т е о р е м а 2. Обозначим w:= a – d. Если 1) w>0; 2)$w^2>4bc$, то выполняются условия 1), 2) Теоремы 1. Можно взять $v=(w-\sqrt{(w2-4bc)})/(2b)$.

Т е о р е м а 3. Если $\omega:=(\ a_+d + bc)\ q_-^{-}2<1$, то для любого решения $\{x, y\}$ и с-решения {X, Y}, определенного в Теореме 1, существует предел $\gamma\{x, y\}:=lim\ \{x_n/X_n:n\to\infty\}$.

Такие с-решения названы аппроксимирующими.

Т е о р е м а 4. Если выполняются условия Теорем 2 и 3 и $\omega\ (a_+ + bv)<1$, то для любого решения {x, y} и с-решения {X, Y}, определенного в Теореме 1, $lim\{\ |xn\text{-}\ \gamma\{x, y\}X_n|:\ n\to\infty\}= 0$.

Такие с-решения названы асимптотически аппроксимирующими.

Рассмотрим уравнение с постоянным запаздыванием

$$z'(t)=P(t)z(t-h),\ t\in R_+,\ h=const>0,\ P(t)\in[p_-,p_+]. \qquad (10)$$

Отметим, что P(t)h – безразмерная величина.

Результаты, обзор которых произведен в [1]-[2], применительно к (10) дают оценку для наличия асимптотически аппроксимирующих c-решений: $sup\{|P(t)h|:t\in R_+\}<1/e=367\ldots$ (абсолютная константа). Представим пространство $C[-h,0]$ в виде прямого произведения пространства функций-констант и пространства Ω функций, таких, что $Z(0)=0$. Обозначим

$$Z_m(t):=W(t+mh,\varphi(\cdot)),\ -h\leq t\leq 0,\ m=1,2,3,\ldots \qquad (11)$$

$SmZ(\cdot)(t)$ - интегральные операторы сдвига по траекториям уравнения (10) на шаг h. Полагая $Z(t)\equiv|t|$, оцениваем: $[a_-, a_+] = 1+h[p_-, p_+]=[1+hp_-,1+hp_+]$; $b= h\max\{|p_-|,|p_+|\}$, $c=b$; $d=b$.

Расчетами на компьютере доказана

Т е о р е м а 5. Условия наличия асимптотически аппроксимирующего свойства для уравнения (10):

$- 0.12\leq P(t)h \leq 0.39;\ - 0.10 \leq P(t)h \leq 0.40;\ - 0.08 \leq P(t)h \leq 0.41;$

$- 0.06\leq P(t)h \leq 0.42;\ - 0.04 \leq P(t)h \leq 0.43;\ - 0.02 \leq P(t)h \leq 0.44.$

Эти полученные результаты дополняют результаты, упомянутые в [1], [2]. После наших публикаций были опубликованы статьи [4], [5], [6], где получены аналогичные результаты для более узких классов дифференциальных уравнений с запаздыванием. Численные методы были также применены в [7].

4. Уравнение с управлением

Известно явление потери устойчивости при усилении обратной связи в устройстве стабилизации, как следствие эффекта появления запаздывания.

Пусть требуется удерживать значения функции u(t) как можно ближе к нулю при постоянно действующих (ограниченных) возмущениях $f(t)\in C_B(\boldsymbol{R}_+)$ *на* $u'(t)$. Обозначим $f_0:=\|f\|$.

С обратной связью, получаем, если бы воздействие было мгновенным:

$$u'(t)=-pu(t)+f(t),\ t\in\boldsymbol{R}_+,\ p>0,\ u(0)=0. \qquad (12)$$

$$u(t)=\int_0^t \exp\big(-p(t-s)\big)f(s)ds.$$

Отсюда следует оценка $|u(t)|<f_0/p$, то есть, чем сильнее обратная связь, тем лучше качество управления. Но фактически возникает не уравнение (12), а уравнение вида

$$u'(t)=-pu(t-h)+f(t),\ t\in\boldsymbol{R}_+, \qquad (13)$$

поскольку всякое устройство срабатывает не моментально. При $ph>\pi/2$ вместо близости функции $u(t)$ к нулю возникают колебания с усиливающейся амплитудой. При $ph=\pi/2$ даже при $f(t)=0$: $u(t)=\sin(\pi t/2/h)$. Покажем получение оценки для абсолютной константы Δ=ph, при превышении которой управление (13) перестает быть устойчивым, методом расщепления. Не умаляя общности, можно считать h=1.

Т е о р е м а 6. Если Δ<1, то решение (13) удовлетворяет условию

$$|u(t)|\leq(1+2\Delta)f_0/p/(1-\Delta),\ t\in\boldsymbol{R}_+. \qquad (14)$$

По методу полной математической индукции по шагам доказываются следующие оценки:

$$|u(n)|\leq f_0/p/(1-\Delta);\ |u(n)-u(s)|\leq 2(n-s)f_0/(1-\Delta),\ n-h\leq s\leq n,\ n\in\boldsymbol{N0}.$$

Для улучшения оценки мы применили метод пробных элементов.

Т е о р е м а 7. Если $\Delta\leq 1.081$, то решение (13) удовлетворяет условию

$$|u(t)|\leq(1+\Delta(1.001+0.782\Delta))f_0/p/(1.082-\Delta),\ t\in\boldsymbol{R}_+. \qquad (15)$$

Для доказательства мы искали с помощью компьютера такие числа $\gamma>1$, $v, w>0$, что $1\leq\Delta<\gamma$, и чтобы можно было доказать по методу полной математической индукции по шагам следующие оценки: $|u(n)|\leq f_0/p/(\gamma-\Delta)$; $|u(n)-u(s)|\leq(v(n-s)+pw(n-s)^2)f_0/(\gamma-\Delta)$.

5. Заключение

Из полученных в данной статье и других результатов следует общий методический вывод: для улучшения и приближения к точным оценок в теории динамических систем необходимо применение компьютера со строгим обоснованием полученных результатов.

Литература

1. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. – Москва: Наука, 1972. – 351 с.
2. Панков П.С. Асимптотическая конечномерность пространства решений одного класса систем с запаздыванием // Дифференциальные уравнения, 1977, том 13, № 4. – С. 455-462.
3. Жээнтаева Ж.К. Асимптотика решений систем линейных операторно-разностных уравнений с переменными коэффициентами // Вестник КРСУ. Серия естественные и технические науки. - 2016, № 5. – С. 34-37.
4. Mallet-Paret J., Nussbaum R. D. Asymptotic homogenization for delay-differential equations and a question of analyticity //Discrete and Continuous Dynamical Systems. 2020,vol 40, issue 6. - P3789-3812
5. Feher A., Marton L., Pituk M. Approximation of a Linear Autonomous Differential Equation with Small Delay // Symmetry-Basel, 2019, vol. 1, issue 10, 10p.
6. Ye Yu, Liang H. Asymptotic dichotomy in a class of higher order nonlinear delay differential equations // Journal of Inequalities and Applications. - 2019, vol. 2. - 17 p.
7. Chen Yu, Wei Yi. Numerical radius for the asymptotic stability of delay differential equations // Linear & Multilinear Algebra. - 2017, vol. 65, issue 11. - Pp. 2306-2315.