УДК 517.928

РЕГУЛЯРДЫК ӨЗГӨЧӨ АЙЛАНАГА ЭЭ БОЛГОН БИСИНГУЛЯРДЫК КОЗГОЛГОН МАСЕЛЕНИН ТЫШКЫ ЧЫГАРЫЛЫШЫ

Орозов М. О., ф.-м.и.к., доцент, *orozov@oshsu.kg*
Рысбекова Гулбара Рысбековна, магистрант
Назарали кызы Сабина*, магистрант ОшМУ,*

Аннотация*: Макалада жогорку тартиптеги туундулардын астында кичине параметр катышкан экинчи тартиптеги сызыктуу бир тектүү эмес эллиптикалык типтеги жекече туундулу дифференциалдык теңдеме каралат. Бул теңдеменин чыгарылышы үчүн Робендин шарты коюлган. Тиешелүү козголбогон маселе регулярдык өзгөчө айланага ээ болгон бисингулярдык козголгон экинчи тартиптеги сызыктуу бир тектүү эмес эллиптикалык типтеги жекече туундулуу дифференциалдык теңдеме үчүн Робендин алкакта коюлган маселесинин тышкы чыгарылышы тургузулган.*

Ачкыч сөздөр*: Робендин маселеси, регулярдык өзгөчө айлана, эллиптикалык типтеги теңдеме, сингулярдык козголгон маселе, бисингулярдык маселе, кичине параметр, асимптотика, асимптотикалык чыгарылыш, чектик маселеле, чектик катмар.*

ВНЕШНЕЕ РЕШЕНИЕ БИСИНГУЛЯРНОЙ ЗАДАЧИ С РЕГУЛЯРНОЙ ОСОБОЙ ОКРУЖНОСТЬЮ

Орозов Максатбек Омурбекович, к.м.н., доцент
Рысбекова Гульбара Рысбековна, аспирант
Назарали кызы Сабина, аспирантка ОшГУ

Аннотация. *В статье рассматривается линейное неоднородное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка эллиптического типа, с малым параметром при старших производных. Для решение этого уравнения ставиться условие Робена. Построено внешнее решений краевой задачи Робена для бисингулярно возмущенного линейного неоднородного уравнения эллиптического типа второго порядка в случае, когда предельное уравнение имеет регулярную особую окружность.*

Ключевые слова*: задача Робена, регулярная особая окружность, уравнение эллиптического типа, сингулярно возмущенная задача, бисингулярная задача, малый параметр, асимптотика, асимптотическое решение, краевая задача, пограничный слой.*

EXTERNAL SOLUTION OF THE BISINGULAR PROBLEM WITH A REGULAR SINGULAR CIRCLE

Orozov Maksatbek Omurbekovich, Candidate of Medical Sciences, Associate Professor
Rysbekova Gulbara Rysbekovna, postgraduate student
Nazarali kyzy Sabina, postgraduate student OshSU

Annotation: *The article deals with a linear non-homogeneous second-order partial differential equation of elliptic type, with a small parameter at the highest derivatives. To solve this equation, the Robin condition is set. The outer solution of Robin's boundary value problem for a bisingularly perturbed second-order linear inhomogeneous equation of elliptic type is constructed in the case when the limit equation has a regular singular circle.*

Keywords: *Roben problem, regularly singular circle, elliptic equation, singularly perturbed problem, bisingular problem, small parameter, asymptotics, asymptotic solution, boundary value problem, boundary layer.*

Киришүү. Стационардык процесстердин математикалык моделдери эллиптикалык типтеги жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелер аркылуу мүнөздөлөт. Мисалы, Лапластын жана Пуассондун теңдемелери ар түрдүү стационардык физикалык талааларды мүнөздөйт, кванттык механикадагы белгилүү Шрёдингердин теңдемесинин стационардык аналогу жана Гельмгольцтун теңдемеси дагы эллиптикалык типтеги теңдемелер аркылуу туюнтулат. Навье-Стокстун теңдемелер системасынын стационардык аналогу болгон Стокстун тендемеси эллиптикалык типтеги теңдеме туруктуу (калыптанып калган) агымды мүнөздөйт.

Макала бисингулярдык козголгон сызыктуу бир тектүү эмес экинчи тартиптеги эки өзгөрүлмөлүү эллиптикалык типтеги жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелер үчүн алкакта коюлган Робендин маселесинин чыгарылышынын бир калыптагы асимптотикалык ажыралмаларын тургузууга арналган.

Эгерде сингулярдык козголгон маселенин тиешелүү козголбогон маселесинин чыгарылышы изилденип жаткан аймактын кандайдыр бир бөлүгүндө (мисалы, чек арасында) жылма эмес, б.а. дифференцирленбөөчү болсо, анда бул маселе А.М. Ильиндин термини боюнча бисингулярдык деп аталат [1]-[11].

Маселенин коюлушу. Алкак үчүн Робендин төмөнкү маселесин изилдейбиз [1]-[6]:

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2 v}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}\right)+(\rho-1)\frac{\partial v}{\partial\rho}-v=1+\rho,\quad (\rho,\varphi)\in D, \tag{1}$$

$$v(1,\varphi,\varepsilon)-\frac{\partial v(\rho,\varphi,\varepsilon)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=1}=0,\quad \varphi\in[0,2\pi], \tag{2}$$

$$v(10,\varphi,\varepsilon)+\frac{\partial v(\rho,\varphi,\varepsilon)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=10}=0,\quad \varphi\in[0,2\pi], \tag{3}$$

мында $0<\varepsilon<<1$, $D=\{(\rho,\varphi)|1<\rho<10,\ 0\le\varphi\le 2\pi\}$, $v=v(\rho,\varphi,\varepsilon)$.

(1)-(3)- Робендин маселесинин, кичине параметр нөлгө умтулгандагы чыгарылышынын тургузуу талап кылынат.

Алгач жардамчы лемманы далилдейбиз.

1-лемма. Төмөнкү (4)-(5)- маселе жалгыз чыгарылышка ээ болот

$$(\rho-1)\frac{\partial z(\rho,\varphi)}{\partial\rho}-z(\rho,\varphi)=1+\rho,\quad (\rho,\varphi)\in D, \tag{4}$$

$$z(10,\varphi)+\frac{\partial z(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=10}=0,\quad \varphi\in[0,2\pi], \tag{5}$$

жана бул чыгарылышты төмөнкүдөй жазууга болот

$$z(\rho,\varphi)=-2+(\rho-1)ln(\rho-1)+(\rho-1)\frac{1-10\,ln9}{10}. \tag{6}$$

Далилдөө. Алгач (6)- чыгарылыш (4)- теңдемени канааттандырышын далилдейбиз. (6)- туюнтмадан ρ боюнча туунду алабыз:

$$\frac{\partial z(\rho,\varphi)}{\partial\rho}=ln(\rho-1)+1+\frac{1-10\,ln9}{10}.$$

Акыркы барабардыкты (4) кө алып барып коебуз:

$$(\rho-1)\left(ln(\rho-1)+1+\frac{1-10\,ln9}{10}\right)-\left(-2+(\rho-1)ln(\rho-1)+(\rho-1)\frac{1-10\,ln9}{10}\right)=$$

$$=\rho-1+2=\rho+1.$$

Эми (6)-чыгарылышты (5)- чекаралык шартты канааттандырышын көрсөтөбүз:

$$-2+(10-1)ln(10-1)+(10-1)\frac{1-10\,ln9}{10}+ln(10-1)+1+\frac{1-10\,ln9}{10}=$$

$$=-2+10\,ln9+1+1-10\,ln9=0.$$

Лемма далилденди.

(1)-(2)- Робендин чек-аралык маселесинин тышкы асимптотикалык чыгарылышын тургузабыз. Ал үчүн кичине параметр усулун колдонобуз, тышкы асимптотикалык чыгарылышты төмөнкү көрүнүштө издейбиз, [3]-[6]:

$$U(\rho,\varphi,\varepsilon)=u_0(\rho,\varphi)+\varepsilon u_1(\rho,\varphi)+\varepsilon^2 u_2(\rho,\varphi)+\ldots+\varepsilon^k u_k(\rho,\varphi)+\ldots \qquad (7)$$

(7)-чыгарылыш $\rho=10$ да $U(10,\varphi,\varepsilon)+\dfrac{\partial U(\rho,\varphi,\varepsilon)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=10}=0,\quad \varphi\in[0,2\pi]$, шартын канааттандыруусу керек, б.а. төмөнкү барабардык орун алуусу керек:

$$0=u_0(10,\varphi)+\frac{\partial u_0(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=10}+\ldots+\varepsilon^k\left(u_k(10,\varphi)+\frac{\partial u_k(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=10}\right)+\ldots$$

мындан, төмөнкү барабардыктарды алабыз:

$$u_k(10,\varphi)+\frac{\partial u_k(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=10}=0,\ \varphi\in[0,2\pi],\ k=0,1,2,\ldots \qquad (8)$$

(7)-ни (1)- теңдемеге алып барып коебуз:

$$(\rho-1)\frac{\partial u_0}{\partial\rho}-u_0+\varepsilon\left(\Delta u_0+(\rho-1)\frac{\partial u_1}{\partial\rho}-u_1\right)+\ldots$$

$$+\varepsilon^k\left(\Delta u_{k-1}+(\rho-1)\frac{\partial u_k}{\partial\rho}-u_k\right)+\ldots=1+\rho,$$

же $$(\rho-1)\frac{\partial u_k(\rho,\varphi)}{\partial\rho}-u_k(\rho,\varphi)=\begin{cases}1+\rho, \text{ эгерде } k=0 \text{ болсо,}\\ -\Delta u_{k-1}(\rho,\varphi), \text{ эгерде } k\in N \text{ болсо.}\end{cases} \qquad (9)$$

(8)-(9) рекуррентик маселенин чынарылышы 1-лемманын негизинде тургузулат.

k=0 болгон учурда: $u_0(\rho,\varphi)=-2+(\rho-1)ln(\rho-1)+(\rho-1)\dfrac{1-10\,ln9}{10}$ болот.

k=1 болгон учурда

$$\Delta v_0(\rho,\varphi)=\frac{\partial^2 v_0}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial v_0}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 v_0}{\partial\varphi^2}=\frac{1}{\rho-1}+\frac{1}{\rho}\left(ln(\rho-1)+1+\frac{1-10\,ln9}{10}\right)$$ болгондуктан $\rho\to 1$ де $\Delta u_0(\rho,\varphi)=O\left(\dfrac{1}{\rho-1}\right)$ болот. 1-лемманын негизинде бул маселенин да чыгарылышы жашайт, жалгыз болот жана $\rho\to 1$ болгондо төмөнкү асимптотикалык баа орун алат: $u_1(\rho,\varphi)=O\left(\dfrac{1}{\rho-1}\right),\ \rho\to 1.$

Чындыгында, маселенин чыгарылышы $u_1(\rho,\varphi)=-(\rho-1)\displaystyle\int_{10}^{\rho}\frac{\Delta u_0(s,\varphi)}{(s-1)^2}ds+\frac{(\rho-1)}{90}\Delta u_0(10,\varphi)$,

болот. $\Delta u_0(\rho,\varphi)=O\left(\dfrac{1}{\rho-1}\right),\ \rho\to 1$ болгондуктан

$$u_1(\rho,\varphi)=-(\rho-1)\int_{10}^{\rho}O\left((s-1)^{-3}\right)ds=(\rho-1)O\left(\frac{1}{(\rho-1)^2}\right)=O\left(\frac{1}{\rho-1}\right),\ \rho\to 1,$$

келип чыгат.

Математикалык индукция принцибин колдонуп төмөнкү барабардыкты далилдейбиз:

$$u_k(\rho,\varphi)=O\left(\frac{1}{(\rho-1)^{2k-1}}\right),\quad \rho\to 1,\ k\in N.$$

k=1 болгон учурда: $u_1(\rho,\varphi)=O\left(\dfrac{1}{\rho-1}\right),\ \rho\to 1$ болот, жана туура.

$k=n$ болгондо $u_n(\rho,\varphi)=O\left(\frac{1}{(\rho-1)^{2n-1}}\right)$, $\rho\to 1$ орун алсын деп божомолдойбуз.

$k=n+1$ болгондо $u_{n+1}(\rho,\varphi)=O\left(\frac{1}{(\rho-1)^{2n+1}}\right)$, $\rho\to 1$ боло тургандыгын далилдейбиз. 1-лемманын негизинде $u_{n+1}(\rho,\varphi)=-(\rho-1)\int_{10}^{\rho}\frac{\Delta u_n(s,\varphi)}{(s-1)^2}ds+\frac{(\rho-1)}{90}\Delta u_n(10,\varphi)$ болот жана

$$u_n(\rho,\varphi)=O\left(\frac{1}{(\rho-1)^{2n-1}}\right),\ \rho\to 1 \Rightarrow \Delta u_n(\rho,\varphi)=O\left(\frac{1}{(\rho-1)^{2n+1}}\right),\ \rho\to 1.$$

Бул жерден $u_{n+1}(\rho,\varphi)=(\rho-1)\int_{10}^{\rho}O\left(\frac{1}{(s-1)^{2n+3}}\right)ds=(\rho-1)O\left(\frac{1}{(s-1)^{2n+2}}\right)=O\left(\frac{1}{(s-1)^{2n+1}}\right),\rho\to 1.$ келип чыгат.

Ошентип, (7)- тышкы асимптотикалык чыгарылыш төмөнкү көрүнүшкө ээ болот экен:

$$U(\rho,\varphi,\varepsilon)=u_0(\rho,\varphi)+\frac{\tilde{u}_1(\rho,\varphi)}{\rho-1}\varepsilon+\ldots+\frac{\tilde{u}_k(\rho,\varphi)}{(\rho-1)^{2k-1}}\varepsilon^k+\ldots,$$

мында $u_k(\rho,\varphi)\in C(\bar{D}),\ k\in N$.

Бул жерде, ε кичине параметрдин даражасы боюнча ажыратылган катардын коэффициенттери болгон $\frac{\tilde{u}_k(\rho,\varphi)}{(\rho-1)^{2k-1}}$, $k=1,2,\ldots$ функциялардын өзгөчөлүгү k номердин өсүүсү менен бирге өсүп бара жаткандыгын байкоо мүмкүн. Ошондуктан, (1), (2)- Робендин маселеси бисингулярдык козголгон маселе болот.

Адабияттар:

1. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений краевых задач. – М.: Наука, 1989. -334 с.
2. Орозов М.О. Асимптотическое решение задачи Дирихле для кольца, когда соответствующее невозмущенное уравнение имеет регулярную особую окружность // Вестник Томск. гос. университета. Матем. и мех. – 2020. – № 63. – С. 38–44.
3. Турсунов Д.А. Асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для бисингулярно возмущенных эллиптических уравнений второго порядка в кольце. – Ош. «Билим», 2016. – 112 с.
4. Турсунов Д.А., Эркебаев У.З. Асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения с особенностями // Уфимский математический журнал. – 2016. – Т. 8. – № 1. – С. 102-112.
5. Турсунов Д.А. Асимптотическое разложение решения бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения // Вестник ТомГУ. Математика и механика. -2013.-Т. -№ 26.- С.37-44.
6. Orozov M.O., Tursunov D.A. Asymptotics of the Solution to the Roben Problem for a Ring with Regularly Singular Boundary // Lobachevskii Journal of Mathematics. -2020. -Vol. 41. -No.1.-P. 89-95.
7. Эркебаев У.З., Турсунов, Д.А. Асимптотика решения задачи Дирихле для бисингулярно возмущенного уравнения в кольце // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. –2015. – Т. 25. – Вып 4. – С. 517-525.
8. Эркебаев У.З., Турсунов, Д.А. Асимптотика решения бисингулярно возмущенной задачи Дирихле в кольце с квадратичным ростом на границе // Вестник ЮурГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». –2016. – Т. 8. – № 2. – С. 52-61.
9. Эркебаев У.З., Турсунов, Д.А. Асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для кольца с особенностью на границе // Вестник ТГУ. Математика и механика. № 1(39). 2016. –С. 42-52.
10. Alymkulov K., Kozhobekov K.G. Singularly perturbed the parabolic equation in the case when unperturbed equation has unbounded solution // FEJMS. Pushpa Publishing House, Allahabad, India. 2017. Vol. 102. № 2. pp. 329-336.
11. Kozhobekov K.G., Erkebaev U.Z., Tursunov D.A. Asymptotics of the solution to the boundary-value problems when limited equation has singular point // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. T. 41. № 1. C. 96-101.