УДК 517.928

РЕГУЛЯРДЫК ӨЗГӨЧӨ АЙЛАНАГА ЭЭ БОЛГОН БИСИНГУЛЯРДЫК НЕЙМАНДЫН МАСЕЛЕСИ

Орозов Максатбек Омурбекович, ф.-м.и.к., доцент,
Эркебаев Улукбек Зайирбекови, ф.-м.и.к., доцент,
Рысбекова Гулайра Рысбековна, магистрант,
Жаанова Айсалкын Шералиевна, магистрант,
Зулумова Нурбийке Омурбековна, магистрант

***Аннотация**: Макалада жогорку тартиптеги туундулардын астында кичине параметр катышкан экинчи тартиптеги сызыктуу бир тектүү эмес эллиптикалык типтеги жекече туундулу дифференциалдык теңдеме каралат. Бул теңдеменин чыгарылышы үчүн Неймандын шарттары коюлган. Тиешелүү козголбогон маселе регулярдык өзгөчө айланага ээ болгон бисингулярдык козголгон экинчи тартиптеги сызыктуу бир тектүү эмес эллиптикалык типтеги жекече туундулуу дифференциалдык теңдеме үчүн Неймандын алкакта коюлган маселесинин тышкы чыгарылышы тургузулган.*

***Ачкыч сөздөр**: Неймандын маселеси, регулярдык өзгөчө айлана, эллиптикалык типтеги теңдеме, сингулярдык козголгон маселе, бисингулярдык маселе, кичине параметр.*

БИСИНГУЛЯРНАЯ ЗАДАЧА НЕЙМАНА С РЕГУЛЯРНОЙ ОСОБОЙ ОКРУЖНОСТЬЮ

Орозов Максатбек Омурбекович, к.т.н., доцент,
Эркебаев Улукбек Заирбекови, к.м.н.
Рысбекова Гулайра Рысбековна, магистрант,
Жананова Айсалкын Шералиевна, магистрант,
Зулумова Нурбийке Омурбековна, магистрант

***Аннотация:** В статье рассматривается линейное неоднородное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка эллиптического типа, с малым параметром при старших производных. Для решение этого уравнения ставиться условия Неймана. Построено внешнее решений краевой задачи Неймана в случае, когда предельное уравнение имеет регулярную особую окружность.*

***Ключевые слова**: задача Неймана, регулярная особая окружность, уравнение эллиптического типа, сингулярно возмущенная задача, бисингулярная задача, малый параметр.*

THE BISINGULARLY NEUMANN PROBLEM WITH A REGULAR SINGULAR CIRCLE

Орозов Максатбек Өмүрбекович, техника илимдеринин кандидаты, доцент,
Эркебаев Улукбек Заирбекови, ф.и.к.
Рысбекова Гүлайра Рысбековна, магистрант,
Жананова Айсалкын Шералиевна, магистрант,
Зулумова Нурбийке Омурбековна, магистрант

***Annotation**: The article deals with a linear non-homogeneous second-order partial differential equation of elliptic type, with a small parameter at the highest derivatives. To solve this equation, the Neumann condition is set. The exterior of solutions of Neumann boundary value problem is constructed in the case when the limit equation has a regular singular circle.*

***Keywords:** Neumann problem, regularly singular circle, elliptic equation, singularly perturbed problem, bisingular problem, small parameter.*

Маселенин коюлушу

Алкак үчүн Неймандын төмөнкү маселесин изилдейбиз

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2 v}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}\right)+(\rho-2)\frac{\partial v}{\partial\rho}-2v=f(\rho,\varphi),\quad (\rho,\varphi)\in D, \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho}v(\rho,\varphi,\varepsilon)\Big|_{\rho=2}=0,\quad \frac{\partial}{\partial\rho}v(\rho,\varphi,\varepsilon)\Big|_{\rho=3}=0,\quad \varphi\in[0,2\pi], \tag{2}$$

мында $D=\{(\rho,\varphi)\,|\,2<\rho<3,\ 0\le\varphi\le 2\pi\}$, $f\in C^\infty(\bar{D})$, $f_2(\varphi)\equiv\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}f(\rho,\varphi)\Big|_{\rho=2}\ne 0.$

(1)-(2)- Неймандын маселесинин бисингулярдык маселе экендигин далилдейбиз.

Маселенин чыгарылышы

Алгач жардамчы лемманы далилдейбиз.

Лемма. Төмөнкү маселе жалгыз чыгарылышка ээ

$$(\rho-2)\frac{\partial z(\rho,\varphi)}{\partial\rho}-2z(\rho,\varphi)=f(\rho,\varphi),\quad (\rho,\varphi)\in D, \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho}z(\rho,\varphi,\varepsilon)\Big|_{\rho=3}=0,\quad \varphi\in[0,2\pi], \tag{4}$$

мында $f\in C^\infty(\bar{D})$, $D=\{(\rho,\varphi)\,|\,2<\rho<3,\ 0\le\varphi\le 2\pi\}$,

жана бул чыгарылыш төмөнкүдөй көрүнүштө болот

$$z(\rho,\varphi)=(\rho-2)^2\int_3^\rho\frac{f(s,\varphi)}{(s-2)^3}ds-\frac{(\rho-2)^2}{2}f(3,\varphi) \tag{5}$$

(5)- чыгарылышты төмөнкү көрүнүштө да жазууга болот:

$$z(\rho,\varphi)=f_2(\varphi)(\rho-2)^2\ln(\rho-2)+P(\rho,\varphi)\ \text{мында}\ P\in C^\infty(\bar{D}).$$

Далилдөө. (3)- дифференциалдык теңдеме $\rho=2,\ 0\le\varphi\le 2\pi$ айланада өзгөчөлүккө ээ экендигин байкоо кыйын эмес.

Жогоруда бул $\rho=2,\ 0\le\varphi\le 2\pi$ айлананы регулярдык өзгөчө айлана деп атап койгонбуз.

(3)- теңдемени төмөнкү көрүнүштө жазып алабыз $\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{z(\rho,\varphi)}{(\rho-2)^2}\right)=\frac{f(\rho,\varphi)}{(\rho-2)^3}$,

Келип чыккан барабардыкты интегралдайбыз: $\frac{z(\rho,\varphi)}{(\rho-2)^2}=\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{f(s,\varphi)}{(s-2)^3}ds+C(\varphi),$

же $z(\rho,\varphi)=(\rho-2)^2\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{f(s,\varphi)}{(s-2)^3}ds+C(\varphi)(\rho-2)^2$, мында $C(\varphi)$ – эрктүү функция.

Табылган $z(\rho,\varphi)$ чыгарылыштан туунду алабыз:

$$\frac{\partial z(\rho,\varphi)}{\partial\rho}=2(\rho-2)\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{f(s,\varphi)}{(s-2)^3}ds+\frac{f(\rho,\varphi)}{(\rho-2)}+2C(\varphi)(\rho-2),$$

(4)- шартты эске алсак: $0=2\int_{\rho_0}^{3}\frac{f(s,\varphi)}{(s-2)^3}ds+f(3,\varphi)+2C(\varphi)$ болот,

мындан $C(\varphi)=-\int_{\rho_0}^{3}\frac{f(s,\varphi)}{(s-2)^3}ds-\frac{f(3,\varphi)}{2}$ келип чыгат.

Ошентип, төмөнкү туюнтманы алабыз:

$$z(\rho,\varphi)=(\rho-2)^2\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{f(s,\varphi)}{(s-2)^3}ds+(\rho-2)^2\left(-\int_{\rho_0}^{3}\frac{f(s,\varphi)}{(s-2)^3}ds-\frac{f(3,\varphi)}{2}\right)=$$

$$=(\rho-2)^2\int_{3}^{\rho}\frac{f(s,\varphi)}{(s-2)^3}ds-\frac{(\rho-2)^2}{2}f(3,\varphi)\text{, же }\quad z(\rho,\varphi)=(\rho-2)^2\int_{3}^{\rho}\frac{f(s,\varphi)}{(s-2)^3}ds-\frac{(\rho-2)^2}{2}f(3,\varphi).$$

Эми интегралдын өзгөчөлүгүн бөлүп алуу максатында интеграл астындагы белгилүү $f(s,\varphi)$ функциясын $s=2,\ 0\le\varphi\le2\pi$ айлананын чеке-белинде төмөнкү көрүнүштө жазып алабыз:

$$f(s,\varphi)=f_0(\varphi)+f_1(\varphi)(s-2)+f_2(\varphi)(s-2)^2+(s-2)^3F(s,\varphi),\tag{6}$$

мында $F(s,\varphi)=\sum_{k=3}^{\infty}f_k(\varphi)(s-2)^{k-3},\ f_k(\varphi)=\frac{1}{k!}\frac{\partial^k f(s,\varphi)}{\partial s^k}\Big|_{s=2}$.

(6)- барабардыкты пайдаланып, (5)-ни төмөнкүдөй жазып алабыз:

$$z(\rho,\varphi)=(\rho-2)^2\int_{b}^{\rho}\frac{f_0(\varphi)+f_1(\varphi)(s-2)+f_2(\varphi)(s-2)^2+(s-2)^3F(s,\varphi)}{(s-2)^3}ds-\frac{(\rho-2)^2}{2}f(3,\varphi)=$$

$$=f_2(\varphi)(\rho-2)^2\ln(\rho-2)+$$

$$+(\rho-2)^2\int_{b}^{\rho}\frac{f_0(\varphi)+f_1(\varphi)(s-2)+(s-2)^3F(s,\varphi)}{(s-2)^3}ds-\frac{(\rho-2)^2}{2}f(3,\varphi).$$

Эгерде төмөнкүдөй белгилөө киийрсек:

$$P(\rho,\varphi)=(\rho-2)^2\int_{3}^{\rho}\frac{f_0(\varphi)+f_1(\varphi)(s-2)+(s-2)^3F(s,\varphi)}{(s-2)^3}ds-\frac{(\rho-2)^2}{2}f(3,\varphi),$$

анда $z(\rho,\varphi)=f_2(\varphi)(\rho-a)^2\ln(\rho-a)+P(\rho,\varphi)$ көрүнүшкө келет, мында $P\in C^{\infty}(\bar{D})$.

Мындан $z,\ \frac{\partial z}{\partial\rho}\in C(\bar{D})$, бирок $\frac{\partial^2 z}{\partial\rho^2}\notin C(\bar{D})$ келип чыгат.

1-лемма далилденди.

Теорема. (1)-(2)- Неймандын маселеси бисингулярдык маселе.

Далилдөө. (1)-(2) Неймандын чектик маселесинин тышкы асимптотикалык чыгарылышын тургузабыз. Ал үчүн кичине параметр усулун колдонобуз, тышкы асимптотикалык чыгарылышты төмөнкү көрүнүштө издейбиз:

$$U(\rho,\varphi,\varepsilon)=u_0(\rho,\varphi)+\varepsilon u_1(\rho,\varphi)+\varepsilon^2u_2(\rho,\varphi)+\ldots+\varepsilon^k u_k(\rho,\varphi)+\ldots\tag{7}$$

(7)-чыгарылыш ρ=3 да $\frac{\partial}{\partial\rho}U(\rho,\varphi,\varepsilon)\big|_{\rho=3}=0,\quad\varphi\in[0,2\pi]$, шартын канааттандыруусу керек, б.а. төмөнкү барабардык орун алуусу керек:

$$0=\frac{\partial u_0(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=3}+\varepsilon\frac{\partial u_1(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=3}+\varepsilon^2\frac{\partial u_2(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=3}+\ldots+\varepsilon^k\frac{\partial u_k(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=3}+\ldots$$

мындан, барабардыкты ε кичине параметрдин бирдей даражаларынын коэффициенттерин барабарлап, төмөнкү барабардыктарды алабыз:

$$\frac{\partial u_0(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=3}=0,\ \frac{\partial u_1(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=3}=0,\ \ldots,\ \frac{\partial u_k(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=3}=0,\ldots\tag{8}$$

(7)-ни (1)- теңдемеге алып барып коебуз:

$$\varepsilon\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\Delta u_k(\rho,\varphi)+(\rho-2)\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\frac{\partial u_k(\rho,\varphi)}{\partial\rho}-2\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k u_k(\rho,\varphi)=f(\rho,\varphi).$$

Бул жерде бирдей даражадагы ε кичине параметрдин коэффициенттерин топтойбуз:

$$(\rho-2)\frac{\partial u_0}{\partial\rho}-2u_0+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\left(\Delta u_{k-1}+(\rho-2)\frac{\partial u_k}{\partial\rho}-2u_k\right)=f(\rho,\varphi),$$

мындан төмөнкү рекуррентик теңдемелердин системасын алабыз:

$$(\rho-2)\frac{\partial u_0(\rho,\varphi)}{\partial\rho}-2u_0(\rho,\varphi)=f(\rho,\varphi), \tag{9}$$

$$(\rho-2)\frac{\partial u_k(\rho,\varphi)}{\partial\rho}-u_k(\rho,\varphi)=-\Delta u_{k-1}(\rho,\varphi),\ k\in N. \tag{10}$$

(9), (10) жана (8) ден төмөнкү маселелер келип чыгат:

$$(\rho-2)\frac{\partial u_0}{\partial\rho}-2u_0=f(\rho,\varphi),\ (\rho,\varphi)\in D,\ \ \frac{\partial u_0(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=3}=0,\ \varphi\in[0,2\pi]; \tag{11}$$

$$(\rho-2)\frac{\partial u_k}{\partial\rho}-2u_k=-\Delta u_{k-1}(\rho,\varphi),\ (\rho,\varphi)\in D,\ \frac{\partial u_k(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=3}=0,\ \varphi\in[0,2\pi],\ k\in N. \tag{12}$$

1-лемманын негизинде (11)- маселенин чыгарылышы жашайт, жалгыз жана төмөнкү көрүнүштө жазууга болот:

$u_0(\rho,\varphi)=f_2(\varphi)(\rho-2)^2\,ln(\rho-2)+P(\rho,\varphi)$, мында $P\in C^\infty(\bar{D})$.

Табылган $u_0(\rho,\varphi)$ функциясына Лапластын операторун колдонобуз, б.а. $\Delta u_0(\rho,\varphi)$ ду эсептейбиз: $\Delta u_0(\rho,\varphi)=\frac{\partial^2u_0(\rho,\varphi)}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_0(\rho,\varphi)}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2u_0(\rho,\varphi)}{\partial\varphi^2}=$

$$=2f_2(\varphi)ln(\rho-2)+3f_2(\varphi)+\frac{\partial^2P(\rho,\varphi)}{\partial\rho^2}+$$

$$+\frac{1}{\rho}\left(2f_2(\varphi)(\rho-2)ln(\rho-2)+f_2(\varphi)(\rho-2)+\frac{\partial P(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\right)+$$

$$+\frac{1}{\rho^2}\left(f''_2(\varphi)(\rho-2)^2\,ln(\rho-2)+\frac{\partial^2P(\rho,\varphi)}{\partial\varphi^2}\right),$$

келип чыгат. Бул жерден $\rho\to a$ болгондо $\Delta u_0(\rho,\varphi)=O(ln(\rho-2))$ болот.

(12) ден k=1 болгондо төмөнкү маселе келип чыгат:

$$(\rho-2)\frac{\partial u_1}{\partial\rho}-2u_1=-\Delta u_0(\rho,\varphi),\ (\rho,\varphi)\in D,\ \ \frac{\partial u_1(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=3}=0,\ \varphi\in[0,2\pi]. \tag{13}$$

1-лемманын негизинде бул маселенин да чыгарылышы жашайт, жалгыз болот жана $\rho\to2$ болгондо төмөнкү асиптотикалык баа орун алат: $u_1(\rho,\varphi)=O(ln(\rho-2)),\ \rho\to2$.

Чындыгында, (13)- маселенин чыгарылышы $u_1(\rho,\varphi)=-(\rho-2)^2\int_3^\rho\frac{\Delta u_0(s,\varphi)}{(s-2)^3}ds+\frac{(\rho-2)^2}{2}\Delta u_0(3,\varphi)$, болот. $\Delta u_0(\rho,\varphi)=O(ln(\rho-2)),\ \rho\to2$ болгондуктан $u_1(\rho,\varphi)=-(\rho-2)^2=O(ln(\rho-2)),\ \rho\to2.$

келип чыгат. Бул жерден $\rho\to a$ болгондо $\Delta u_1(\rho,\varphi)=O\left(\frac{1}{(\rho-2)^2}\right)$ болот жана бул катыштан төмөнкү асимптотикалык бааны алабыз:

$$u_2(\rho,\varphi)=-(\rho-2)^2\int_b^\rho\frac{\Delta u_1(s,\varphi)}{(s-2)^3}ds+\frac{(\rho-2)^2}{2}\Delta u_1(3,\varphi)=O\left(\frac{1}{(\rho-2)^2}\right),\ \rho\to2\,.$$

Математикалык индукция принцибин колдонуп төмөнкү барабардыкты далилдесе болот: $u_k(\rho,\varphi)=O\left(\frac{1}{(\rho-2)^{2k-2}}\right),\ \ \rho\to2,\ 1<k\in N.$

Ошентип, (7)- тышкы асимптотикалык чыгарылыш төмөнкү көрүнүшкө ээ болот экен:

$U(\rho,\varphi,\varepsilon)=u_0(\rho,\varphi)+\varepsilon u_1(\rho,\varphi)+\ldots+\varepsilon^k\frac{\tilde{u}_k(\rho,\varphi)}{(\rho-2)^{2k-2}}+\ldots$, мында $\tilde{u}_k(\rho,\varphi)\in C^\infty(D),\ k\in N$.

Бул жерде, ε кичине параметрдин даражасы боюнча ажыратылган катардын коэффициенттери болгон $\dfrac{\tilde{u}_k(\rho,\varphi)}{(\rho-2)^{2k-2}}$, k=1,2,… функциялардын өзгөчөлүгү k номердин өсүүсү менен бирге өсүп бара жаткандыгын байкоого болот. Ошондуктан, (1), (2)- Неймандын маселеси бисингулярдык козголгон маселелердин классына таандык болот.

Теорема далилденди.

Адабияттар:

1. Ильин, А.М. Согласование асимптотических разложений краевых задач [Текст] / А.М. Ильин. – М.: Наука, 1989. – 334 с.
2. Орозов, М.О. Асимптотическое решение задачи Дирихле для кольца, когда соответствующее невозмущенное уравнение имеет регулярную особую окружность [Текст] / Д.А.Турсунов, М.О. Орозов // Вестник Томск. гос. университета. Матем. и мех. – 2020. – № 63. – С. 38–44.
3. Kozhobekov K.G., Erkebaev U.Z., Tursunov D.A. Asymptotics of the solution to the boundary-value problems when limited equation has singular point // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. T. 41. № 1. C. 96-101.
4. Эркебаев У.З., Турсунов, Д.А. Асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения с особенностями // Уфимский математический журнал. – 2016. – Т. 8. – № 1. – С. 102-112.
5. Турсунов, Д.А. Асимптотическое разложение решения бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения [Текст] / Д.А. Турсунов // Вестник ТомГУ. Математика и механика. – 2013. – Т. – № 26. – С. 37–44.
6. Orozov M.O. Asymptotics of the Solution to the Roben Problem for a Ring with Regularly Singular Boundary [Текст] / D.A. Tursunov, M.O. Orozov // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2020. – Vol. 41. – No. 1. –P. 89–95.
7. Tursunov D.A. Asymptotics of the cauchy problem solution in the case of instability of a stationary point in the plane of "rapid motions" // Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics. 2018. № 54. C. 46-57.
8. Турсунов, Д.А. Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка с двумя точками поворота // Вестник ТГУ. Математика и механика. 2013. 1(21). –С. 34–40.
9. Alymkulov K., Tursunov D.A., Azimov B.A. Generalized method of boundary layer function for bisingularly perturbed differential Cole equation // Far East Journal of Mathematical Sciences. 2017 Pushpa Publishing House, Allahabad, India. Vol. 101. No. 3. pp. 507-5016.
10. Турсунов, Д.А. Обобщенный метод погранфункций для бисингулярных задач в круге // Труды Института математики и механики УрО РАН. Т. 23. № 2. 2017. –С. 239-249
11. Эркебаев У.З., Турсунов, Д.А. Асимптотика решения задачи Дирихле для бисингулярно возмущенного уравнения в кольце // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. –2015. – Т. 25. – Вып 4. – С. 517-525.
12. Эркебаев У.З., Турсунов, Д.А. Асимптотика решения бисингулярно возмущенной задачи Дирихле в кольце с квадратичным ростом на границе // Вестник ЮурГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». –2016. – Т. 8. – № 2. – С. 52-61.
13. Эркебаев У.З., Турсунов, Д.А. Асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для кольца с особенностью на границе // Вестник ТГУ. Математика и механика. № 1(39). 2016. –С. 42-52.
1. 14. Alymkulov K., Kozhobekov K.G. Singularly perturbed the parabolic equation in the case when unperturbed equation has unbounded solution // FEJMS. Pushpa Publishing House, Allahabad, India. 2017. Vol. 102. № 2. pp. 329-336.