**УДК 517.956**

# ОРОМ ТИБИНДЕГИ ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРГЕ ФУРЬЕНИН ӨЗГӨРТҮП ТҮЗҮҮСҮН КОЛДОНУУ

***Нурланбеков Тынчтыкбек Нурланбекович, магистрант,***
***Мамасидиков Эргазы**, магистрант, ОшМУ,*

***Аннотация**: Макалада ором тибиндеги интегралдык теңдемелерди Фурьенин өзгөртүп түзүүсүнүн жардамында чыгаруу изилденген. Физиканын, техниканын жана башка илимдердин көпчүлүк проблемаларынын математикалык моделдери ором тибиндеги интегралдык теңдемелер аркылуу баяндалат. Ошондуктан ором тибиндеги интегралдык теңдемелерди изилдөө математиканын актуалдуу маселелеринин бири. Ором тибиндеги интегралдык теңдемелерди чыгаруунун бир нече методдору бар. Биз ором тибиндеги интегралдык теңдемелерди изилдөөдө Фурьенин өзгөртүп түзүүсүн колдонууну сунуштайбыз. Макалада конкретүү мисалдар менен бул методдун артыкчылыктары далилденет. Интегралдык теңдемелер физиканын ар кандай тармактарында, геофизикада, механикада ж.б. кеңири колдонулат.*

***Негизги сөздөр**: ором тибиндеги интегралдык теңдеме, Фурьенин өзгөртүп түзүүсү, интегралдык теңдеменин ядросу, Вольтерранын интегралдык теңдемеси, оригинал функция.*

# ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ К ИНТЕГРАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ ТИПА СВЕРТКИ

***Нурланбеков Тынчтыкбек Нурланбекович, аспирант,***
***Мамасидиков Ергазы, аспирант, ОшГУ***

***Аннотация**: В статье исследуется решение интегральных уравнений типа свертки с помощью преобразования Фурье. Математические модели многих задач физики, техники и других наук описываются интегральными уравнениями типа свертки. Поэтому исследование интегральных уравнений типа свертки является одной из актуальных задач математики. Существует несколько способов решение интегральных уравнений типа свертки. Мы предлагаем использовать преобразование Фурье при исследовании интегральных уравнений типа свертки. В статье на конкретных примерах доказывается преимущества данного метода. Интегральные уравнения широко используются в различных разделах физики, геофизики, механики и др.*

***Ключевые слова**: интегральное уравнение типа свертки, преобразование Фурье, ядро интегрального уравнения, интегральное уравнение Вольтерра, оригинал функции.*

# APPLICATION OF THE FOURIER TRANSFORM TO CONVOLUTION TYPE INTEGRAL EQUATIONS

***Nurlanbekov T. N., post-graduate student,***
***Mamasidikov Yergazy, postgraduate student, OshSU***

**Annotation:** The article investigates the solution of integral equations of the convolution type using the Fourier transform. Mathematical models of many problems in physics, engineering and other sciences are described by integral equations of the convolution type. Therefore, the study of integral equations of the convolution type is one of the topical problems of mathematics. There are several ways to solve convolution-type integral equations. We propose to use the Fourier transform in the study of integral equations of the convolution type. The article proves the advantages of this method using specific examples. Integral equations are widely used in various branches of physics, geophysics, mechanics, etc.

**Keywords:** convolution-type integral equation, Fourier transform, integral equation kernel, Volterra integral equation, function original.

**Киришүү.** Математикалык анализде жана аны колдонууда интегралдык өзгөртүп түзүүлөрдү колдонуу менен байланышкан методдор кеңири таралган. Бул методдор дифференциалдык жана интегралдык теңдемелерди чыгарууда, атайын функцияларды изилдөөдө жана интегралдык эсептөөдө ийгиликтүү колдонулат. Ором (свертка) тибиндеги интегралдык теңдемелер физиканын, техниканын ж.б. илимдердин маселелеринин математикалык моделдеринде кездешет [1]-[5]. XIX-XX-кылымдарда ором тибиндеги интегралдык теңдемелердин көптөгөн түрлөрү изилденип, сапаттык натыйжалар да, аларды чыгаруунун болжолдуу ыкмалары да алынган. Н.Винер, Э.Хопф, Ф.Д. Гахов, Г.Деч, М.Г. Керин, Н.И. Мусхелишвили, В.А. Фок ором тибиндеги теңдемелерди изилдөө методдорун өнүктүрүүгө зор салым кошушкан жана бул теңдемелерди чечүүнүн ар кандай методдорун сунушташкан. Ором тибиндеги интегралдык теңдемелердин чыгарылышын тургузууда ар түрдүү методдор колдонулат. Бул методдордун арасынан эң кеңири таралганы – Фурьенин өзгөртүп түзүүсүн колдонуп чыгаруу. Ошондуктан алгач Фурьенин өзгөртүп түзүүсү боюнча маалымат беребиз.

**Маселенин коюлушу.** Интегралдын чек аралары чексиз болгон интегралдык теңдемелердин чыгарылыштарын Фурьенин өзгөртүп түзүүсүнүн жардамында чыгаруу.

**1-Аныктама.** $f:R\to C$ функциясынын Фурье өзгөртүп түзүүсү деп төмөнкү функцияны айтабыз:

$$F[f]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-itx}dx.$$

1-Мисал. Төмөнкү функциянын Фурье өзгөртүп түзүүсүн тапкыла

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\infty<x<1,\\ 1, & 1\le x\le 2,\\ 0, & 2<x\end{cases}$$

Чыгаруу. 1-аныктама боюнча $F[f]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-itx}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{1}^{2} e^{-itx}dx=\frac{i}{2\pi t}(e^{-it2}-e^{-it}).$

Демек, $F[f]=\frac{i}{2\pi t}(e^{-it2}-e^{-it}).$

2-Мисал. Төмөнкү функциянын Фурье өзгөртүп түзүүсүн табуу талап кылынсын

$$f(x)=e^{-x^2}$$

Чыгаруу. 1-аныктама боюнча $F[f]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{-itx}dx.$

Эйлердин $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ формуласын эске алсак, анда төмөнкүнү алабыз:

$$F[f]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{-itx}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}(\cos tx-i\sin tx)dx=$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos txdx-\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\sin txdx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos txdx.$$

Төмөнкүдөй белгилөө киймрип алабыз: $g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos txdx.$

g(t)дан туунду алабыз: $g'(t)=-\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}\sin txdx.$

Акыркы интегралды бөлүктөп интегралдайбыз:

$$g'(t)=-\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}\sin txdx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\sin txde^{-x^2}=-\frac{t}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos txdx=-\frac{t}{2}g(t).$$

Натыйжада g(t)га карата биринчи тартиптеги бир тектүү кадимки дифференциалдык теңдемени алабыз: $g'(t)=-\frac{t}{2}g(t).$

Дифференциалдык теңдемени интегралдайбыз:

$$\frac{dg}{g}=-\frac{t}{2}dt\Rightarrow \ln g=-\frac{t^2}{4}+\ln c\Rightarrow g(t)=ce^{-t^2/4}.$$

эрктүү туруктуу $c$ нын маанисин аныктоо үчүн g(t) функциясына кайрылабыз:

$$g(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\cos txdx\Rightarrow g(0)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}.$$

Ошондуктан $g(0)=c=\sqrt{\pi}$ болот. Мындан $g(t)=\sqrt{\pi}e^{-t^2/4}$ келип чыгат.

Демек, $F(f)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-t^2/4}$.

**2-аныктама.** $f(t)$, $g(t)$ функцияларынын орому (сверткасы) деп, $\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ барабардык менен аныкталган функцияны айтабыз жана $f*g$ деп белгилейбиз.

Мисалы, Вольтерранын экинчи түрдөгү интегралдык теңдемеси [6]-[12]:

$$f(t)=g(t)+\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)K(t-\tau)d\tau \qquad (1)$$

ором тибиндеги интегралдык теңдемеге мисал боло алат, мында $g(t)$, $K(t)$ функциялары жетишерлик даражада жылма.

(1)- ором тибиндеги интегралдык теңдемеге Фурьенин өзгөртүп түзүүсүн колдонобуз.

Мейли $F(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-iwt}dt;\ f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}F(w)e^{iwt}dw.$ болсун.

Фурьенин интегралдык операторун $F(*)$ көрүнүшүндө белгилейбиз.

$$F(w)=F[f(t)]=Ff.$$

Функциялардын оромдорунун Фурье өзгөртүп түзүүсү ал функциялардын Фурье өзгөртүп түзүүлөрүнүн көбөйтүндүсүнө барабар:

$$F[f_1*f_2]=\sqrt{2\pi}F[f_1]\cdot F[f_2].$$

Мисалы, $f(t)=g(t)+\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)k(t-\tau)d\tau$

интегралдык теңдемеде төмөнкүдөй белгилөөлөрдү кийирип алсак:

$$F[f]=F,\ F[g]=G,\ F[k]=K.$$

Анда Фурьенин өзгөртүп түзүүсүнөн кийин төмөнкү туюнтманы алабыз:

$$F(w)=G(w)+\lambda\sqrt{2\pi}K(w)F(w).$$

Анда Фурьенин өзгөртүп түзүүсүнөн кийин төмөнкү туюнтманы алабыз:

$$F(w)=G(w)+\lambda\sqrt{2\pi}K(w)F(w).$$

Бул жерден $F(w)$ны таап алсак болот:

$$F(w)-\lambda\sqrt{2\pi}K(w)F(w)=G(w)\Rightarrow F(w)=\frac{G(w)}{1-\lambda\sqrt{2\pi}K(w)}.$$

Акыркы барабардыкка Фурьенин тескери өзгөртүп түзүүсүн колдонуп берилген интегралдык теңдеменин чыгарылышын табабыз: $f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(w)e^{iwt}}{1-\lambda\sqrt{2\pi}K(w)}dw.$

Мейли $R(t,\lambda)$ функциясы төмөнкү туюнтманын тескери Фурье өзгөртүп түзүүсү болсун:

$$\frac{K(w)}{1-\lambda\sqrt{2\pi}K(w)},\ \text{б.а.}\ R(t,\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{K(w)e^{iwt}}{1-\lambda\sqrt{2\pi}K(w)}dw.$$

$$U(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{F(w)}{K(w)}.$$

Фурьенин тескери өзгөртүп түзүүсүн колдонуп, изделүүчү $u(t)$ функциясын табабыз:

$$u(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(w)}{K(w)}e^{iwt}dw.$$

**Ором тибиндеги интегралдык теңдемелердин системасы**

Вольтерранын ором тибиндеги интегралдык теңдемелеринин системасын карайлы

$$\varphi_j(t)=f_j(t)+\sum_{i=1}^{s}\int_{-\infty}^{\infty}K_{ji}(t-\tau)\varphi_i(\tau)d\tau,\ \ j=1,2,\dots,s$$

Мейли $F\{\varphi_j(t)\}=\Phi_j,\ F\{f_j(t)\}=F_j,\ F\{k_{ji}(t)\}=K_{ji}$ болсун, анда интегралдык теңдемелердин системасы төмөнкү көрүнүшкө келет:

$$\Phi_j=F_j+\sum_{i=0}^{s}K_{ji}\Phi_k,\quad j=1,2,\dots,s$$

Анда интегралдык теңдеменин чыгарылышын $f(t)=g(t)+\lambda\int_{-\infty}^{\infty}k(t-s)g(s)ds$ көрүнүшүндө жазууга болот.

**Биринчи түрдөгү ором тибиндеги интегралдык теңдемелер**

Биринчи түрдөгү ором тибиндеги интегралдык теңдемеге Фурьенин өзгөртүп түзүүсүн колдонобуз: $\int_{-\infty}^{\infty}k(t-\tau)u(\tau)d\tau=f(t)$.

Эгерде $F[f]=F,\ F[u]=U,\ F[k]=K$ деп белгилеп алсак, анда теңдемебиз төмөнкү көрүнүшкө келет [10]-[12]:

$$\sqrt{2\pi}K(w)U(w)=F(w).$$

Акыркы барабардыктан $U(w)$ны таап алабыз:

Бул Фj ге карата сызыктуу теңдемелердин системасы. Системасы чыгарып Фj лерди аныктап, анан алардын оригиналдарын тургузсак интегралдык теңдемелердин системасын чыгарган болобуз.

**Корутунду**. Ором тибиндеги интегралдык теңдемелерди чыгарууда Фурьенин өзгөртүп түзүүсүн колдонуу бир топ ыңгайлуу жана теңдеменин чыгарылышын тургузуу салыштырмалуу оңой экен. Ором тибиндеги интегралдык теңдемеге Фурьенин өзгөртүп түзүүсүн колдонгонубузда биз алгебралык теңдемени алат экенбиз. Алгебралык теңдемени чыгарып, анын чыгарылышын тапкан соң, кайра алгачкы элес аркылуу интегралдык теңдеменин чыгарылышын жазып коет экенбиз.

## Адабияттар:


1. Варданян Р.С. О решении одного класса интегральных уравнений типа свертки. − Ереван: журнал, 1989. − С. 1291 − 1300.
2. Вахрамеева А.В. Уравнение свертки в гильбертовых пространствах последовательностей с весом: автореф. дис. на соискание учебной степени канд. ф.-м. н.: спец. 01.01.01 "Математический анализ" / Вахрамеева Анна Владимировна − Уфа, 2007. − 20 с.
3. Гахов Ф.Д. Уравнения типа свертки. − М.: Наука, 1978. − 298 с.
4. Комарницкий А.Л. Решение интегральных уравнений типа свертки в некоторых пространствах функций // Изв. Вузов. Математика. 1997. −№9. − С. 83−85.
5. Манжиров А.В. Методы решения интегральных уравнений. − М.: Факториал, 1999. − 272 с.
6. Мамытов, А.О., Асанов А., Турсунов Д.А. Задача восстановления ядра и правой части интегро-дифференциального уравнения в частных производных пятого порядка // Научные аспекты совр.исслед. 78я Межд.науч.конф. ЕНО. – 2021. – № 8(78). – С. 31–34.
7. Мамытов А.О., Асанов А., Турсунов Д.А. Жогорку тартиптеги жекече туундулуу интегро-дифференциалдык теңдемелер үчүн баштапкы-чек аралык тескери маселенин чечилиши // ОшМУнун жарчысы. «Математика. Физика. Техника». – 2021. - № 2. – С. 5–13.
8. Алымкулов K., Турсунов Д. А. Об одном методе построения асимптотических разложений решений бисингулярно возмущенных задач. Изв. вузов. Математика, 12, 2016, 3–11.
9. Турсунов Д.А. Асимптотическое разложение решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с тремя точками поворота. Тр. ИММ УрО РАН, 22,№ 1,2016,271-281.
10. Tursunov D.A. The asymptotic solution of the three-band bisingularly problem. Lobachevskii Journal of Mathematics, 38:3, (2017), 542–546.
11. Турсунов Д.А. Асимптотическое решение линейных бисингулярных задач с дополнительным пограничным слоем. Изв. вузов. Математика, 3, 2018, 70–78.
12. Кожобеков К.Г., Турсунов Д.А. Асимптотика решения краевой задачи, когда предельное уравнение имеет нерегулярную особую точку. Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки, 29:3 (2019), 332–340.