УДК: 517.928

КОШИНИН МАСЕЛЕСИ ҮЧҮН ДИФФРЕНЦИАЛДЫК БАРАБАРСЫЗДЫКТАР МЕТОДУ

Муса уулу Н. Э., окутуучу, ОшМУ
Шайдуллаев Б. К., стажер-мугалим
Мамыталиева Н. М,. ОшМУ, bshaidullaev@oshsu.kg

Аннотация: *Макалада биринчи тартиптеги кадимки дифференциалдык теңдеме үчүн Кошинин маселесинин чыгарылышынын жашашы жана жалгыздыгы С.А. Чаплыгиндин дифференциалдык барабарсыздыктар методунун жардамында изилденет. Салыштыруу принцибинин негизинде жаткан салыштыруу теоремалары кадимки дифференциалдык теңдемелерди жана жекече (айрым) туундулуу дифференциалдык теңдемелерди изилдөөдө маанилүү роль ойнойт. Бул теоремалар С.А. Чаплыгиндин төмөнкү жана жогорку чыгарылыштарынын жашашына таянып каралып жаткан маселенин чыгарылышынын жашашына, ал эми белгилүү бир табигый талаптар аткарылганда чыгарылыштын жалгыздыгына да кепилдик берет.*

Негизги сөздөр: *Кошинин маселеси, баштапкы шарт, дифференциалдык барабарсыздыкдар методу, дифференциалдык теңдеме, Липшицтин шарты, тъмънк\ чыгарылыш, жогорку чыгарылыш, туруктуу чыгарылыш, туруксуз чыгарылыш.*

МЕТОД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ ДЛЯ ЗАДАЧИ КОШИ

Муса уулу Нур Эгемберди, преподаватель, ОшГУ
Шайдуллаев Б. К., преподаватель-стажер
Мамыталиевна Нурхан Мамыталиевна, ОшГУ

Аннотация*: В статье с помощью метода дифференциальных неравенств С.А. Чаплыгина исследуется существование и единственность решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Теоремы сравнения, основанные на принципе сравнения, играют важную роль при изучении обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений в частных производных. Эти теоремы гарантируют существование, а при некоторых естественных требованиях и единственность решения задач на основании существования так называемых верхних и нижних решений С.А. Чаплыгина.*

Ключевые слова: *задача Коши, начальное условие, метод дифференциалных неравенств, дифференциально уравнение, условие Липшица, нижнее решние, верхнее решение, устойчивое решение, неустойчивое решение.*

THE METHOD OF DIFFERENTIAL INEQUALITIES FOR THE CAUCHY PROBLEM

Musa uulu Nur Egemberdi, lecturer, OshSU
Shaydullaev Bekbolot Kamilovich, trainee teacher
Mamytalievna Nurkhan Mamytalievna, OshSU

Absract*: In the article, using the method of differential inequalities, S.A. Chaplygin, the existence and uniqueness of a solution to the Cauchy problem for a first-order ordinary differential equation is studied. Comparison theorems based on the comparison principle play an important role in the study of ordinary differential equations and partial differential equations. These theorems guarantee the existence, and under certain natural requirements, the uniqueness of the solution of problems based on the existence of the so-called upper and lower solutions S.A. Chaplygin.*

Keywords*: Cauchy problem, initial condition, method of differential inequalities, differential equation, Lipschitz condition, lower solution, upper solution, stable solution, unstable solution.*

Жөнөкөйлүк үчүн биринчи тартиптеги кадимки дифференциалдык теңдеме үчүн Коши маселесин дифференциалдык барабарсыздык методу менен изилдейбиз. Дифференциалдык барабарсыздыктар жөнүндөгү теоремаларды мисалдар менен келтиребиз.

1-Теорема. Мейли

1) төмөнкү (1)- Коши маселесинин классикалык y(t) чыгарылышы жашасын;

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y),\ 0 \le t \le T,\ \ y(0) = y^0 \qquad (1)$$

2) $\frac{dz}{dt} < f(t, z(t)),\ 0 < t \le T,\ \ z(0) < y^0$ барабарсыздыгын канааттандырган $z(t) \in C^1(0,T] \cap [0,T]$ функциясы жашасын.

Анда төмөнкү барабарсыздык орун алат: $z(t) < y(t),\ 0 \le t \le T.$ (2)

Далилдөө. t=0 болгондо барабарсыздык аткарылат: $z(0) < y^0 = y(0)$. t∈(0,T] чекиттер үчүн тееореман карама-каршысынан далилдейбиз.

Мейли t_1∈(0,T] чекитинде (2)- барабарсыздык аткарылбасын. Бул чекитте $z(t_1) = y(t_1)$ болсун. t=t_1 чекитинде y(t) жана z(t) ийрилери кесилишет же жанып өтөт. Мындан төмөнкү барабарсыздык келип чыгат: $\frac{dz}{dt}(t_1) \ge \frac{dy}{dt}(t_1) = f(t_1, y(t_1)) = f(t_1, z(t_1)) \Rightarrow \frac{dz}{dt}(t_1) \ge f(t_1, z(t_1)).$

акыркы барабарсыздык теореманын шартына карама-каршы келет.

1-теорема далилденди.

1-Мисал.

$$\frac{dy}{dt} = y + t,\ 0 \le t \le 1,\ \ y(0) = 0$$

Коши маселесинин чыгарылышы жашайт: $y(t) = e^t - t - 1.$

z(t)=–1/2-t болсун, анда $\frac{dz}{dt} = -1 < -1/2 = f(t, z(t)),\ 0 < t \le T,\ \ -1/2 < 0 = y^0$

шарттар орун алгандыктан төмөнкү барабарсыздык келип чыгат: $z(t) < y(t),\ 0 \le t \le T \Rightarrow$

$$-1/2-t<e^t-t-1,\ -\frac{1}{2} - t < e^t - t - 1,\ \ 0 \le t \le 1.$$

2-Теорема. Мейли

1) (1)- Коши маселесинин классикалык $y(t)$ чыгарылышы жашасын;

2) $\frac{du}{dt} > f(t, u(t)),\ 0 < t \le T,\ \ u(0) > y^0$ барабарсыздыгын канааттандырган $u(t) \in C^1(0,T] \cap [0,T]$ функциясы жашасын.

Анда төмөнкү барабарсыздык орун алат: $u(t) > y(t),\ 0 \le t \le T.$ (3)

Далилдөө. t=0 болгондо барабарсыздык аткарылат: $u(0) > y^0 = y(0)$. t∈(0,T] чекиттер үчүн теореман карама-каршысынан далилдейбиз.

Мейли t_1∈(0,T] чекитинде (3)- барабарсыздык аткарылбасын. Бул чекитте $u(t_1) = y(t_1)$ болсун. t=t_1 чекитинде $u(t)$ жана $z(t)$ ийрилери кесилишет же жанып өтөт. Мындан төмөнкү барабарсыздык келип чыгат:

$$\frac{du}{dt}(t_1) \le \frac{dy}{dt}(t_1) = f(t_1, y(t_1)) = f(t_1, u(t_1)) \Rightarrow \frac{du}{dt}(t_1) \le f(t_1, u(t_1))$$

акыркы барабарсыздык теореманын шартына карама-каршы келет.

2-теорема далилденди.

Жогорудагы 1-мисал \ч\н $u(t)$=3e^t–2 болсун, анда

$$\frac{du}{dt} = 3e^t > 3e^t - 2 + t = f(t, u(t)),\ 0 < t \le 1,\ \ 1 > 0 = y^0$$

шарттар орун алгандыктан төмөнкү барабарсыздык келип чыгат:

$$u(t) > y(t),\ 0 \le t \le 1 \Rightarrow -1/2\text{-}t < e^t - t - 1,\ 3e^t - 2 > e^t - t - 1,\ 0 \le t \le 1.$$

Аныктама. 1-теоремадагы $z(t)$ функциясы (1)- маселе үчүн төмөнкү (нижнее) чыгарылыш, ал эми 2-теоремадагы $u(t)$ функциясы (1)- маселе үчүн жогорку (верхнее) чыгарылыш деп аталат.

Тыянак. 1- жана 2- теоремадан $z(t)$ жана $u(t)$ функциялары үчүн төмөнкү барабарсыздыктар орун алат: $z(t) < u(t),\ t \in [0,T]$.

3-теорема. Мейли

а) (1)- Коши маселесинин $z(t)$ төмөнкү жана $u(t)$ жогорку чыгарылыштары жашасын, $z(t) < u(t)$, $t \in [0,T]$;

б) $f(t,y)$ функциясы үзгүлтүксүз жана y өзгөрүлмөсү боюнча Липшицтин шартын канаатандырсын: $|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \le L|y_1 - y_2|,\ y_1, y_2 \in [z,u],\ t \in 0,T]$.

Анда (1)- Кошинин маселеси төмөнкү барабарсыздыкты канаатандырган жалгыз чыгарылышка ээ болот: $z(t) < y(t) < u(t),\quad 0 \le t \le T.$

Далилдөө. $f(t,y)$ функциясын $0 \le t \le T,\ y \in R$ тилкеде үзгүлтүксүз жана Липшицтин шартын канаатандыра тургандай улантабыз жана (1)- маселенин ордуна төмөнкү маселени карайбыз:

$$\frac{dy}{dt} = h(t,y),\ 0 < t \le T,\ \ y(0) = y^0\ , \tag{4}$$

мында $h(t,y)$, мисалы

$$h(t,y) = \begin{cases} f(t,u(t)) + (y - u(t)),\ y > u \\ f(t,y),\ 0 < t \le T \\ f(t,z(t)) + (y - z(t)),\ y < z, \end{cases}$$ болсун.

Анда h(t,y) функциясы Липшицтин шартын канаатандырат (L=max(L0,1), L0 – туруктуусу f(t,y) функциянын Липшиц туруктуусу) мындан (4)- маселенин чыгарылышынын жашашы жана жалгыздыгы келип чыгат. Баштапкы чекитте z(0)<y(0)<u(0) барабарсыздыгы орун алгандыктан, жогорудагы теореманын негизинде 0<t≤T аралыкта z(t) <y(t) <u(t), 0≤t≤T аткарылат. Мындан $z(t) < y(t) < u(t) \Rightarrow h(t,y) = f(t,y)$ келип чыгат. Б.а. (4)-маселенин чыгарылышы (1)-маселенин чыгарылышы болот.

Эскертүү. 1) Төмөнкү жана жогорку чыгарылыштардын аныктамасында (<, >) салыштыруу белгилерин тиешлүү түрдө (≤,≤) белгилери менен алмаштырууга болот.

2) Эгерде төмөнкү жана жогорку чыгарылыштар 0≤t<∞ аралыкта аныкталган болушса, f(t,y) функциясы үзгүлтүксүз жана t дан көз каранды эмес Липшицтин туруктуусу менен Лишицтин шартын канаатандырса, анда 3-теорема 0≤t<∞ аралыкта аткарылат.

Мисал. Баштапкы маселени карайлы $\dfrac{dy}{dt} = -y^2,\ 0 < t \le T,\ \ y(0) = y^0 > 0.$

Чыгарылыштын жашашы жана жалгыздыгы жөнүндөгү классикалык теорема чыгарылыштын жашоо аралыгына $0 \le t \le \dfrac{1}{4y^0}$ бааны берет.

Белгилеп кетүү керек, Липшицтин шарты аралыкта аткарылбайт. 0≤t≤ T, -∞< y <∞ аралыкта аткарылбайт.

Төмөнкү чыгарылыш катарында z(t)=0 алабыз. 1-эскертүү боюнча барабардык аткарылат: $\dfrac{dz}{dt} - f(t,0) = 0$. Жогорку чыгарылышка $u(t)=d=\text{const}$, $d>y^0$ туруктуусун алабыз жана шартты текшеребиз: $\dfrac{du}{dt} - f(t,u) = 0 + d^2 > 0$ – аткарылды.

$f(t,y)=-y^2$ – функциясы $y \in [0,d],\ 0 \le t \le T,\ \forall T > 0,$ да чектелген туундуга ээ жана Липшицтин шартын канаатандырат. Демек, каралып жаткан маселенин $y(t)$ чыгарылышы жашайт жана $0 \le y(t) \le d,\ 0 \le t < \infty$ орун алат.

Колдонулушу. Автономдук теңдемени карайлы

$$\frac{dy}{dt} = f(y), \tag{5}$$

б.а. теңдеменин оң жагы t дан ачык көз каранды эмес. Байкоо кыйын эмес, f (y)=0 теңдеменин ар бир тамыры (5)- дифференциальдык теңдеменин чыгарылышы болот. Жалпылыкты бузбастан (5)-теңдеме тривиалдык чыгарылышка ээ деп алабыз: y=0 б.а. f (0)=0. Тривиалдык чыгарылыш Кошинин маселесинин чыгарылышы болот, качан гана (5)-ге

$$y(0)=0 \tag{6}$$

баштапкы шарты берилсе.

Табыгый түрдө бул чыгарылышты Ляпунов боюнча туруктуулугу жөнүндө суроо келип чыгат б.а. баштапкы шартка кичине козголуу берилсе чыгарылыш дагы кичине өзгөрөбү деген. Ал үчүн (6)- нын ордуна (5)- теңдемге

$$y(0)=y^0 \tag{7}$$

баштапкы шарт берилет.

4-Теорема. Мейли f (0)=0 жана f (y) функциясы $|y|\le\alpha$ кандайдыр бир чеке белде туундусу менен үзгүлтүксүз болсун. Анда (5), (6)- маселенин y=0 чыгарылышы туруктуу болот эгерде $f_y(0)<0$ болсо, жана туруксуз болот эгерде $f_y(0)>0$ болсо.

Далилдөө. Теореманы дифференциалдык барабарсыздыктар методунун жардамында далилдейбиз. Мейли $f_y(0)<0$ болсун. Анда $\forall\varepsilon>0$ үчүн $0<\delta$ санын $\delta=\min(\alpha,\varepsilon)$ тандайбыз. Төмөнкү жана жогорку функцияларды аныктайбыз:

$$z(t) = -\delta e^{-pt},\ u(t) = \delta e^{-pt},\ 0 < p = \text{const}.$$

Эгерде $|y^0| < \delta$ болсо, анда жетишээрлик кичине δ жана p ларда $z(t) = -\delta e^{-pt}$, $u(t) = \delta e^{-pt}$ тишелүү түрдө төмөнкү жана жогорку чыгарылыш боло ала тургандыгын далилдейбиз.Анда 3-теорманын негизинде (5) жана (6) маселенин чыгарылышы үчүн төмөнкү барабарсыздык орун алат:

$$z(t) < y(t) < u(t),\ \ 0 \le t < \infty.$$

Бул барабарсыздыктардан тривиалдык y=0 чыгарылыш асимптотикалык туруктуу экендиги келип чыгат.

$u(t) = \delta e^{-pt}$ функциясын жогорку чыгарылыш боло ала тургандыгын көрсөтөбүз:

$$\frac{du}{dt} - f(u(t)) = -\delta p e^{-pt} - f_y(\theta\delta e^{-pt})\delta p e^{-pt} = \delta e^{-tp}[-f_y(0) - (p - (f_y(0) - f_y(\theta\delta e^{-pt})))],$$

мында $0\le\theta\le1$. Бул жерде δ параметрин төмөнкү барабарсыздык орун ала тургандай тандап алабыз:

$$|(f_y(0) - f_y(\theta\delta e^{-pt})| \le \eta < \frac{-f_y(0)}{2}.$$

Ал эми экинчи p параметрин $p < \dfrac{-f_y(0)}{2}$ барабарсыздыгы орун ала тургандай кылып тандап алабыз. Натыйжада $\dfrac{du}{dt} - f(u(t)) > 0$ келип чыгат, бул деген жогорку чыгарылыш болот дегенди далилдейт. Аналогиялуу түрдө z(t) функциясын төмөнкү чыгарылыш экендиги далилденет. Теоеманын биринчи жарым бөлүгү далилденди.

Туруксуздугу. Мейли $f_y(0)>0$ болсун. Каалагандай $\delta>0$ саны үчүн y^0 табылып $|y^0|<\delta$ аткарыла тургандай кандайдыр бир t нын маанисинде (5), (7) маселенин чыгарылышы ε дон чоң боло турган ε дун жашашын көрсөтөбүз.

Бул (5), (6) маселенин тривиалдык чыгарылыш туруксуз болот дегенди билдирет. Бул үчүн $\forall$ $y^0>0$ үчүн (5), (7) маселенин төмөнкү чыгарылышын $z(t) = \rho(1 - \sigma e^{-pt})$, көрүнүштө тургузабыз, мында $\rho = const,\ 0 < \rho < a, \sigma = const,\ 0 < \sigma < 1, 0 < p = const.$

Чындыгында, $z(0)=\rho(1-\sigma)$ болгондуктан, σ турактууну бирге жакын кылып тандайбыз, ошондо z(0)дун мааниси y^0 дун каалагандай оң маанисинен кичине болот ($z(0)<y^0$).

$t\to\infty$ де $z(t)\to\rho$ болот, ошондуктан $t > t^*$: $z(t) > \frac{\rho}{2}$. Натыйжада (5), (7) маселенин чыгарылышы (эгерде ал жашаса) 2-теореманын негизинде $\varepsilon = \frac{\rho}{2}$ дан чоң болот. Мындан тривиалдык чыгарылыштын туруксуздугу келип чыгат. $z(t) = \rho(1-\sigma e^{-pt})$ функциясын төмөнкү чыгарылыштын барабарсыздыгын канааттандырышын көрсөтөбүз:

$$\frac{dz}{dt} - f(z(t)) = \rho\sigma p e^{-pt} - f_y(\theta z(t))\, z(t) = \rho(-f_y(0)(1-\sigma p e^{-pt}) +$$
$$+(f_y(0) - f_y(\theta z(t)))(1-\sigma p e^{-pt}) + \sigma p e^{-pt}) \le \rho(-f_y(0)(1-\sigma) + \eta + p) < 0$$

мында p жана η лар жетишээрлик кичине.

2-Мисал. $y'(t)=(y^2-16)(y+1)$ дифференциалдык теңдеменин тең салмактуулук чекиттерин туруктуулукка текшеребиз.

Биздин мисалда $f(y)= (y^2-16)(y+1)$. Ошондуктан $(y^2-16)(y+1)=0$ деп тең салмактуулук чекиттерин аныктап алабыз: $y_1=4$, $y_2=-4$, $y_3=-1$.

$$f_y(y)=2y(y+1)+(y^2-16)\text{: } f_y(4)>0,\ f_y(-4)>0,\ f_y(4)<0.$$

Демек, $y_1=4$, $y_2=-4$ чекиттер туруксуз чекиттер; $y_3=-1$ – асимптотикалык туруктуу чекит.

Адабияттар:

1. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения: Учебник для вузов. – 5-е изд., – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
2. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – 7-е изд., – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984..
3. А.Б. Васильева, Н.Н. Нефедов Теоремы сравнения. Метод дифференциальных неравенств Чаплыгина. М.: 2007. 9 с.
4. Турсунов Д.А., Эркебаев У.З. Обоснование формальных асимптотических разложений решения бисингулярно возмущенных задач // Вестник ОшГУ. № 4(4). 2015.
5. Турсунов Д. А. Асимптотическое решение линейных бисингулярных задач с дополнительным пограничным слоем. Изв. вузов. Математика, 3, 2018, 70–78.
6. Алымкулов К., Турсунов Д. А. Об одном методе построения асимптотических разложений решений бисингулярно возмущенных задач. Изв. вузов. Математика, 12, 2016, 3–11.
7. Турсунов Д. А. Асимптотическое разложение решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с тремя точками поворота. Тр.ИММ УрО РАН, 22, № 1,2016,271–281.
8. Tursunov D. A. The asymptotic solution of the three-band bisingularly problem. Lobachevskii Journal of Mathematics, 38:3, ISSN 19950802. Maik Nauka-Interperiodica Publishing (2017), 542–546.
9. Турсунов Д. А. Асимптотическое решение линейных бисингулярных задач с дополнительным пограничным слоем. Изв. вузов. Математика, 3, 2018, 70–78.
10. Кожобеков К. Г., Турсунов Д. А. Асимптотика решения краевой задачи, когда предельное уравнение имеет нерегулярную особую точку. Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки, 29:3 (2019), 332–340.
11. Tursunov D. A., Kozhobekov K. G., Bekmurza uulu Ybadylla Asymptotics of solutions of boundary value problems for the equation $\varepsilon y''+xp(x)y'-q(x)y=f$. Eurasian Math. J., 13:3 (2022), 82–91.
12. Омаралиева Г. А., Турсунов Д. А. Промежуточный пограничный слой в сингулярно возмущенных уравнениях первого порядка. Тр. ИММ УрО РАН, 28, № 2, 2022, 193–200.