УДК 517.968.

ҮЧҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР ҮЧҮН БИЦАДЗЕ-САМАРСКИЙДИН ЛОКАЛДУУ ЭМЕС ЧЕТТИК МАСЕЛЕСИН РЕГУЛЯРДОО

Каракеев Т. Т., ф.-м.и,д., проф., Ж. Баласагын ат. КУУ Бишкек, Кыргыз Республикасы, ttkarakeev@gmail.com
Болотбек кызы Н., магистрант, nurkan2022@icloud.com
Зулпуева Б., магистрант, zulpuyevabarchynai@gmail.com
ОшМУ, Ош, Кыргыз Республикасы

Аннотация: *Макалада үчүнчү тартиптеги дифференциалдык теңдеме үчүн локалдуу эсмес четтик маселе изилденет. Четтик маселе составында үчүнчү түрдөгү Волтерранын интегралдык теңдемесин камтыган интегралдык теңдемелер системасына келтирилет. Локалдуу эсмес четтик маселенин регулярдалган чыгарылышы түзүлөт жана анын так чыгарылышка бир калыпта жыйналуусу далилденет. Ошондой эле чыгарылыштын жалгыздыгынын шарттары алынган.*

Түйүндүү сөздөр: *Локалдуу эсмес четтик маселе, үчүнчү тартиптеги дифференциалдык теңдеме, Волтерранын интегралдык теңдемеси, регулярдоо, кичи параметр, бир калыпта жыйналуу.*

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ БИЦАДЗЕ-САМАРСКОГО ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Каракеев Т. Т., д.ф.-м.н., проф., КНУ им. Ж.Баласагына Бишкек, Кыргызская Республика, ttkarakeev@gmail.com
Болотбек кызы Н., магистрант, nurkan2022@icloud.com
Зулпуева Б., магистрант, zulpuyevabarchynai@gmail.com
ОшГУ, Ош, Кыргызская Республика

Аннотация: *В работе исследуется нелокальная краевая задача для дифференциальных уравнений третьего порядка. Рассматриваемая задача сводится к системе интегральных уравнений, содержащая интегральное уравнение Вольтерра третьего рода. Построено регуляризованное решение нелокальной краевой задачи, доказана равномерная сходимость к точному решению задачии получены условия единственности решения.*

Ключевые слова: *Нелокальная краевая задача, дифференциальные уравнения третьего порядка, интегральное уравнение Вольтерра третьего рода, регуляризация, малый параметр, равномерная сходимость.*

REGULARIZATION OF THE NONLOCAL BITSADZE-SAMARSKY BOUNDARY PROBLEM FOR THIRD ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

Karakeev T. T., Dr Sc, prof., Kyrgyz National University J. Balasagyn, Bishkek, Kyrgyz Republic, ttkarakeev@gmail.com
Bolotbek kyzy N., magistracy, nurkan2022@icloud.com
Zulpuyeva B., magistracy, zulpuyevabarchynai@gmail.com
OshSU, Osh, Kyrgyz Republic

Abstract: *In this paper, we study a nonlocal boundary value problem for third-order differential equations. The problem under consideration is reduced to a system of integral equations containing a Volterra integral equation of the third kind. A regularized solution of a nonlocal boundary value problem is constructed, uniform convergence to the exact solution of the problem is proved, and conditions for the uniqueness of the solution are obtained.*

Keywords: *Nonlocal boundary value problem, third-order differential equations, Volterra integral equation of the third kind, regularization, small parameter, uniform convergence.*

В работе исследуется линейное дифференциальное уравнение третьего порядка, имеющее важное практическое приложение [1,2]. Для него рассматривается нелокальная задача типа Бицадзе-Самарского, т.е. краевые условия, задающиеся в виде связи между значениями неизвестной функции в различных точках границы. Начальные и краевые задачи разных типов для дифференциальных уравнений третьего порядка рассмотрены в работах [3] и установлены корректность по Адамару данных задач. Постановка обратных задач для таких уравнений, теоремы их однозначной разрешимости содержатся в [4]. Нелокальные краевые задачи исследованы в [5-7].

Рассмотрим для уравнения

$$L(w) \equiv w_{xxt} + d(x,t)w_t + \eta(x,t)w_{xx} + a(x,t)w_x + b(x,t)w = f(x,t), \qquad (1)$$

задачу Бицадзе-Самарского

$$w(0,t) = \lambda(t)w(l,t),\ w_x(0,t) = g0(t),\ w(x,0) = c(x), \ (2)$$

где известные функции удовлетворяют условие

$a)$ $b(x,t) \in C(D^{-}{}_0)$, $d(x,t) \in C^{0,1}(D^{-}{}_0)$, $c(x) \in C^2[0,l]$, $\lambda(0)=c(0)=0$, $\lambda(t)$, $g_0(t) \in C^1[0,T]$, $\eta(x,t)$, $a(x,t) \in C^{1,0}(D^{-}{}_0)$, $f(x,t) \in C(D^{-}{}_0)$, $D_0 = \{(x,t)/0<x<l,\ 0<t<T\}$.

С помощью функции Римана [5] представим решение задачи (1), (2) в интегральной форме,

$$w(\xi,\tau) = \upsilon_x(0,\tau,\xi,\tau)u(\tau) - \int_0^\tau [\upsilon(0,t,\xi,\tau)\, g_0'(t) + \eta(0,t)\upsilon(0,t,\xi,\tau)g_0(t) +$$
$$+(\upsilon_{xt}(0,t,\xi,\tau) - \eta_x(0,t)\upsilon(0,t,\xi,\tau) - \eta(0,t)\upsilon_x(0,t,\xi,\tau) + a(0,t)\upsilon(0,t,\xi,\tau))u(t)]dt -$$
$$-\int_0^\xi [d(x,0)\times\upsilon(x,0,\xi,\tau)c(x) - \upsilon_x(x,0,\xi,\tau)c'(x)]dx + \int_0^\xi\int_0^\tau \upsilon(x,t,\xi,\tau)\, f(x,t)dxdt \equiv$$
$$\equiv (Qu)(\xi,\tau) \qquad (3)$$

Тогда, при $\xi = l$ из (3) учитывая (2) получим

$$\mathrm{p}(\tau)u(\tau) + \int_0^\tau K(\tau,t)u(t)dt = q(\tau) \qquad (4)$$

где $\mathrm{p}(\tau) \equiv 1 - \lambda(\tau)\upsilon_x(0,\tau;l,\tau)$,

$$K(\tau,t) \equiv \lambda(\tau)\big(\upsilon_{xt}(0,t,l,\tau) - \eta_x(0,t)\upsilon(0,t,l,\tau) - \eta(0,t)\upsilon_x(0,t,l,\tau) + a(0,t)\upsilon(0,t,l,\tau)\big),$$
$$q(\tau) \equiv \lambda(\tau)\int_0^l [d(x,0)\upsilon(x,0,l,\tau)c(x) - \upsilon_x(x,0,l,\tau)c'(x)]dx - \int_0^l\int_0^\tau \upsilon(x,t,l,\tau)\, f(x,t)dxdt$$
$$+\lambda(\tau)\int_0^\tau [\upsilon(0,t,l,\tau)\, g_0'(t) + \eta(0,t)\upsilon(0,t,l,\tau)g_0(t)]dt.$$

В работе [5] доказана, что имеет место неравенство $\upsilon_x(0,\tau;l,\tau) > 1$, при $d(x,t) < 0$ $\forall(x,t) \in D$. Следовательно функция $p(\tau)$ может принимать нулевое значение, если функция $\lambda(\tau)$ неотрицательна. Поэтому, пусть $\mathrm{p}(\tau)$ обращается в нуль только при $\tau=0$ и является неубывающей функцией, $K(\tau,\tau) > 0$.

Регуляризованное решение задачи (1), (2) имеет вид

$$w_\varepsilon(\xi,\tau) = (Qu_\varepsilon)(\xi,\tau). \qquad (5)$$

где $u_\varepsilon(\tau)$ - решение уравнения

$$(\varepsilon + \mathrm{p}(\tau))u_\varepsilon(\tau) + \int_0^\tau K(\tau,t)u_\varepsilon(t)dt = q(\tau) + \varepsilon u(0) \qquad (6)$$

ε малый параметр из интервала (0,1).

Для уравнения (4) и (6) имеет место следующие утверждения [8]

Лемма 1. Пусть выполняются условия а), функция $p(\tau)$ обращается в нуль только при $\tau=0$ и является неубывающей функцией, $\boldsymbol{K(\tau,\tau)} > 0$ и $\boldsymbol{u(x)} \in \boldsymbol{C^1[0,b]}$. Тогда справедлива оценка

$\|(\boldsymbol{H_\varepsilon u})(\boldsymbol{x})\|_{C[0,b]} \le \boldsymbol{\varepsilon d_2}, \quad \boldsymbol{d_2 = d_1^{-1}(1+e^{-1})}\|\boldsymbol{u'(x)}\|_{C[0,b]},$

$(H_\varepsilon u')(\tau) = -\frac{\varepsilon}{\varepsilon+p(\tau)}\int_0^\tau W_\varepsilon(\tau,t)K(t,t)\frac{u(t)-u(\tau)}{\varepsilon+p(t)}dt + \frac{\varepsilon W_\varepsilon(\tau,0)}{\varepsilon+p(\tau)}(u(\tau)-u(0))$

$\boldsymbol{W_\varepsilon(\tau,t) = exp(-\int_t^\tau \frac{K(v,v)}{\varepsilon+p(v)}dv)}$

Теорема 1. Если функции, входящие в (1), (2) удовлетворяют условие а), функция $p(\tau)$ обращается в нуль только при , τ =0 и является неубывающей функцией, $K(\tau,\tau)>0$, уравнение (4) имеет решение в $C^1[0,T]$, то при $\varepsilon\to 0$ решение уравнения (6) равномерно сходится к решению уравнения (4), причем имеет место оценка

$$\| u_\varepsilon(x)-u(x)\|_{C[0,b]}\le d_0\varepsilon,\ 0<d_0=cont.$$

Следствие 1. При выполнении условия теоремы 1 решение уравнения (4) единственно в пространстве $C[0,b]$.

Тогда из (5) непосредственно следует

Теорема 2. Если функции, входящие в (1), (2) удовлетворяют условие а), функция $p(\tau)$ обращается в нуль только при τ =0 и является неубывающей функцией, $K(\tau,\tau)>0$, уравнение (4) имеет решение в $C^1[0,T]$, то при $\varepsilon\to 0$ функция , $W_\varepsilon(\xi,\tau)$, определенная согласно (5), равномерно сходится к решению исходной задачи (1), (2). Причем имеет место оценка

$\| w\varepsilon(\xi,\tau)-w(\xi,\tau)\|_{C(D^-0)}\le K_2\varepsilon,\ 0<K_2=const.$

На основе данных утверждений докажем следующую теорему.

Теорема 3. Если выполняется условие теоремы 1, то $u_\varepsilon(\tau)\in C^1[0,T]$ и при $\varepsilon\to 0$ функция $u\varepsilon'(\tau)\to u'(\tau)$ равномерно. Причем имеет место оценка

$$\| u'_\varepsilon(\tau)-u'(\tau)\|_{C[0,T]}\le K_3\varepsilon,\ 0<K_3=const.$$

Доказательство. Продифференцируем уравнения (6) и (4).

Доказательство. Продифференцируем уравнения (6) и (4).

$$\big(\varepsilon+p(\tau)\big)u'_\varepsilon(\tau)+\big(G(\tau)+p'(\tau)\big)u_\varepsilon(\tau)=\int_0^\tau K_0(\tau,t)u_\varepsilon(t)dt+g'(\tau), \tag{7}$$

$$p(\tau)u'(\tau)+\big(G(\tau)+p'(\tau)\big)u(\tau)=\int_0^\tau K_0(\tau,t)u(t)dt+g'(\tau), \tag{8}$$

где $K_0(\tau,t)\equiv -C_0K(\tau,t)-K_\tau(\tau,t)$. Так как $u_\varepsilon(0)=0$, то имеет место равенство

$$\int_0^\tau [G(t)+p'(t)]u'_\varepsilon(t)dt=\big(G(\tau)+p'(\tau)\big)u_\varepsilon(\tau)-\int_0^\tau [G'(t)+p''(t)]u_\varepsilon(t)d\tau. \tag{9}$$

Следовательно (7) перепишем в виде

$$\big(\varepsilon+p(\tau)\big)u'_\varepsilon(\tau)+\int_0^\tau [G_0(t)u'_\varepsilon(t)dt=\int_0^\tau L_1(\tau,t)u_\varepsilon(t)dt+g'(\tau),$$

где $K_0(\tau,t)\equiv -C_0K(\tau,t)-K_\tau(\tau,t)-G'(\tau)-p''(\tau)$, $G_0(t)\equiv K(t,t)+p'(t)$.

Это уравнение преобразуем, используя резольвенту ядра $\left(-\frac{G_0(t)}{\varepsilon+p(\tau)}\right)$.

$$u'_\varepsilon(\tau)=-\frac{1}{\varepsilon+p(\tau)}\int_0^\tau W_{0\varepsilon}(\tau,t)\frac{G_0(t)}{\varepsilon+p(t)}\left[\int_0^t L_1(t,\sigma)u_\varepsilon(\sigma)d\sigma-\int_0^\tau L_1(\tau,\sigma)u_\varepsilon(\sigma)d\sigma\right]dt$$
$$+\frac{W_{0\varepsilon}(\tau,0)}{\varepsilon+p(\tau)}\int_0^\tau L_1(\tau,t)u_\varepsilon(t)dt-\frac{1}{\varepsilon+p(\tau)}\int_0^\tau W_{0\varepsilon}(\tau,t)G_0(t)\frac{g'(t)-g'(\tau)}{\varepsilon+p(t)}dt+ \tag{10}$$
$$+\frac{W_{0\varepsilon}(\tau,0)}{\varepsilon+p(\tau)}g'(\tau),W_{0\varepsilon}(\tau,t)=exp(-\int_t^\tau\frac{G_0(v)}{\varepsilon+p(v)}dv).$$

Тогда из (10) получим оценку

$$|u'_\varepsilon(\tau)|\le\frac{C_0K_1+K_2}{\theta_2 d_1}\|u_\varepsilon(\tau)\|_{C[0,T]}+|(H_{0\varepsilon}g')(\tau)|$$

где

$$(H_{0\varepsilon}g')(\tau)\equiv-\frac{1}{\varepsilon+p(\tau)}\int_0^\tau W_{0\varepsilon}(\tau,t)G_0(t)\frac{g'(t)-g'(\tau)}{\varepsilon+p(t)}dt+\frac{W_{0\varepsilon}(\tau,0)}{\varepsilon+p(\tau)}g'(\tau) \tag{11}$$

Поскольку $g(\tau)\in C^2[0,T]$ и согласно теореме 1 имеет место оценка

$$|u_\varepsilon(\tau)|\le N_1\,exp(CT),\ 0<C,N_1=const.$$

Следовательно

$$|(H_{0\varepsilon}g')(\tau)|\le M_1=const \text{ и } |u'_\varepsilon(\tau)|\le M_2=const,\ \ 0\le\tau\le T. \tag{12}$$

Покажем теперь, что $u'_\varepsilon(\tau)\to u'(\tau)$ равномерно, при $\varepsilon\to 0$. Примем обозначения

$$u'_\varepsilon(\tau)=u'(\tau)+\eta'_\varepsilon(\tau),\ \ u_\varepsilon(\tau)=u(\tau)+\eta_\varepsilon(\tau).$$

Тогда из (7) получим уравнение

$$\big(\varepsilon+p(\tau)\big)\eta'_\varepsilon(\tau)+\int_0^\tau G_0(\tau)\eta'_\varepsilon(\tau)d\tau=\int_0^\tau L_1(\tau,t)\,\eta_\varepsilon(t)dt-\varepsilon u'(\tau),$$

которое эквивалентно уравнению

$$\eta'_\varepsilon(\tau) = -\frac{1}{\varepsilon+p(\tau)}\int_0^\tau W_{0\varepsilon}(\tau,t)\frac{G_0(t)}{\varepsilon+p(t)}[\int_0^t [K_0(t,v)\eta_\varepsilon(v)dv - \int_0^\tau [K_0(\tau,v)\eta_\varepsilon(v)dv]dt +$$

$$+\frac{W_{0\varepsilon}(\tau,0)}{\varepsilon+p(\tau)}\int_0^\tau K_0(\tau,v)\eta_\varepsilon(v)dv + (H_{0\varepsilon}u')(\tau) \qquad (13)$$

где оператор H_ε – определен по формуле

$$(H_{0\varepsilon}u')(\tau) = -\frac{\varepsilon}{\varepsilon+p(\tau)}\int_0^\tau W_{0\varepsilon}(\tau,t)G_0(t)\frac{u'(t)-u'(\tau)}{\varepsilon+p(t)}dt + \frac{\varepsilon W_{0\varepsilon}(\tau,0)}{\varepsilon+p(\tau)}(u'(\tau)-u'(0))$$

Поскольку функция $K(\tau,\tau) > 0$, то используя лемму 1, при $u'(\tau) \in C_{Lip}[0,T]$ для оператора $(H_{0\varepsilon}u')(\tau)$ имеем оценку

$$\|(H_{0\varepsilon}u')(\tau)\|_{C[0,T]} \le \tilde{d}_0\varepsilon,\ 0 < \tilde{d}_0 = const.$$

Тогда из (13) получим

$$\|\eta'_\varepsilon(\tau)\|_C \le \frac{C_0K_1+K_2}{\theta_2 d_1}\|\eta_\varepsilon(\tau)\|_{C[0,T]} + \|(H_{0\varepsilon}u')(\tau)\|_{C[0,T]} \le M_2\varepsilon,\ 0 < M_2 = const.$$

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Если выполняется условия теоремы 1, то для $w(\xi,\tau)$, $w_\varepsilon(\xi,\tau)$ и их производные, определяемые из (3), (5), при $\varepsilon \to 0$ имеет место равномерная сходимость $w_\varepsilon(\xi,\tau) \to w(\xi,\tau)$ $w_{\varepsilon\tau}(\xi,\tau) \to w_\tau(\xi,\tau)$, $w_{\varepsilon\xi}(\xi,\tau) \to w_\xi(\xi,\tau)$,$w_{\varepsilon\xi\xi}(\xi,\tau) \to w_{\xi\xi}(\xi,\tau)$, $w_{\varepsilon\xi\xi\tau}(\xi,\tau) \to w_{\xi\xi\tau}(\xi,\tau)$.

Доказательство. Из оценки (12) следует, что функции $w_{\varepsilon\tau}(\xi,\tau)$, $w_{\varepsilon\xi}(\xi,\tau)$, $w_{\varepsilon\xi\xi}(\xi,\tau)$, $w_{\varepsilon\xi\xi\tau}(\xi,\tau)$, определенные по правилу:

$$w_{\tau\varepsilon}(\xi,\tau) = (Q_0[u_\varepsilon,u'_\varepsilon])(\xi,\tau),\ w_{\varepsilon\xi}(\xi,\tau) = (Qu_\varepsilon)_\xi(\xi,\tau),$$

$$w_{\varepsilon\xi\xi}(\xi,\tau) = (Qu_\varepsilon)_{\xi\xi}(\xi,\tau),\ w_{\varepsilon\xi\xi\tau}(\xi,\tau) = (Q_1[u_\varepsilon,u'_\varepsilon])(\xi,\tau)$$

удовлетворяют неравенствам

$$|w_{\varepsilon\tau}(\xi,\tau)| \le \mu_1,\ |w_{\varepsilon\tau}(\xi,\tau)| \le \mu_2,\ |w_{\varepsilon\xi\xi}(\xi,\tau)| \le \mu_3,\ |w_{\varepsilon\xi\xi\tau}(\xi,\tau)| \le \mu_4,\ 0\le\tau\le T,$$

$0 < \mu_i = const,\ i = \overline{1,4}$.

Тогда имеет место оценки

$$\|w_{\tau\varepsilon}(\xi,\tau) - w_\varepsilon(\xi,\tau)\|_{C(D)} \le \mu_5\|\eta_\varepsilon(\tau)\|_{C^1[0,T]},$$

$$\|w_{\varepsilon\xi}(\xi,\tau) - w_\xi(\xi,\tau)\|_{C(D)} \le \mu_6\|\eta_\varepsilon(\tau)\|_{C[0,T]},$$

$$\|w_{\varepsilon\xi\xi}(\xi,\tau) - w_{\xi\xi}(\xi,\tau)\|_{C(D)} \le \mu_7\|\eta_\varepsilon(\tau)\|_{C[0,T]},$$

$$\|w_{\varepsilon\xi\xi\tau}(\xi,\tau) - w_{\varepsilon\xi\xi\tau}(\xi,\tau)\|_C \le \mu_8\|\eta_\varepsilon(\tau)\|_{C^1[0,T]},$$

$0 < \mu_i = const,\ i = \overline{5,8}$. Откуда следует утверждение теоремы 3.

Следствие 2. При выполнении условия теоремы 2 решение задачи (1), (2) единственно.

Литература:

1. Аллэр М. Эффективный потенциал воды при высыхании почв // Термодинамика почвенной влаги [Текст] / М.Аллэр – Ленинград: Гидрометеоиздат, 1966. – С. 325-360.
2. Нерпин С.В. О расчете нестационарного движения влаги в почве [Текст] / С.В. Нерпин, Г.И. Юзефович, В.А. Янгербер // Докл. ВАСХНИЛ. – 1966. – №6. – С. 2 - 4.
3. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. – Москва: Наука, 1980. – 287с.
4. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики [Текст] / В.Г Романов – Москва: Наука, 1984. – 264с.
5. Шхануков М.Х. О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах [Текст] / Шхануков М.Х. // Дифференц. уравнения. – 1982. – Т.18, №4. – С.689–699.
6. Каракеев Т. Т. Регуляризация нелокальной граничной задачи для псевдо-параболических уравнений [Текст] / Т. Т. Каракеев //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Бишкек: Илим, 2003. - Вып.32. - С. 179-183.
7. Каракеев Т. Т. Регуляризация нелокальной по времени краевой задачи для нелинейных уравнений в частных производных [Текст] /Т. Т. Каракеев, Д. К. Рустамова// Вестник КНУ им. Ж. Баласагына. - Бишкек, 2012. -Вып. 5. - С. 34-44.
8. Каракеев Т. Т. Регуляризация и метод квадратур для линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода [Текст] /Т. Т. Каракеев, Д. К. Рустамова//Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Бишкек, 2009. -Вып. 40. - С. 127-132.