УДК 517.968.22

КОЭФФИЦИЕНТТИК ФУНКЦИЯ КЕСИНДИНИН ИЧКИ ЧЕКИТИНДЕ НОЛГО АЙЛАНГАН УЧУРДА ВОЛТЕРРАНЫН ҮЧҮНЧҮ ТҮРДӨГҮ ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕСИН РЕГУЛЯРДОО

Каракеев Т. Т., ф.-м.и,д., проф, Ж. Баласагын ат. КУУ,
ttkarakeev@gmail.com, Бишкек, Кыргыз Республикасы
Болотбек кызы Н., магистрант, nurkan2022@icloud.com
Зулпуева Б., магистрант, zulpuyevabarchynai@gmail.com
ОшМУ, Ош, Кыргыз Республикасы

Аннотация: *Макалада үчүнчү түрдөгү Вольтерранын сызыктуу эмес интегралдык теңдемелерин үзгүлтүксүз функциялар мейкиндигинде регулярдоо маселеси изилденет. Лаврентьевдик типтеги метод негизделген, регулярдалган чыгарылыштын так чыгарылышка бир калыпта жыйналуусу жана теңдеменин чыгарылышынын үзгүлтүксүз функциялар мейкиндигинде жалгыздыгы далилденген.*

Ачкыч сөздөр: *Волтерранын интегралдык теңдемеси, регулярдоо, кичи параметр, бир калыпта жыйналуу.*

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ТРЕТЬЕГО РОДА В СЛУЧАЕ ВЫРОЖДЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ФУНКЦИИ ВО ВНУТРЕННИХ ТОЧКАХ ОТРЕЗКА

Каракеев Т. Т., д.ф.-м.н., проф., КНУ им. Ж.Баласагына,
Бишкек, Кыргызская Республика
ttkarakeev@gmail.com
Болотбек кызы Н., магистрант, nurkan2022@icloud.com
Зулпуева Б., магистрант, zulpuyevabarchynai@gmail.com
ОшГУ, Ош, Кыргызская Республика

Аннотация: *В работе исследованы вопросы регуляризации нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода в пространстве непрерывных функций. Обоснован метод регуляризации лаврентьевского типа, доказана сходимость регуляризованного решения к точному решению по равномерной метрике и единственность решения уравнения в пространстве непрерывных функций.*

Ключевые слова: *Интегральные уравнения Вольтерра, регуляризация, малый параметр, равномерная сходимость.*

REGULARIZATION OF SYSTEMS OF NONLINEAR VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS OF THE THIRD KIND IN THE CASE OF THE COEFFICIENT FUNCTION DEGENERATION AT INTERNAL POINTS OF THE INTERCEPTION

Karakeev T. T., Dr Sc, professor, Kyrgyz National
University J. Balasagyn, Bishkek, Kyrgyz Republic
ttkarakeev@gmail.com
Bolotbek kyzy N., magistracy, mailto:nurkan2022@icloud.com
Zulpuyeva B., magistracy, zulpuyevabarchynai@gmail.com
OshSU,Osh, Kyrgyz Republic

Abstract: *In this work, questions of regularization of nonlinear two-dimensional Volterra integral equations of the third kind in the space of continuous functions are studied. The method of regularization of the Lavrentiev type is substantiated, the convergence of the regularized solution to the exact solution with respect to the uniform metric and the uniqueness of the solution of the equation in the space of continuous functions are proved.*

Keywords: *Volterra integral equation, regularization, small parameter, uniform convergence.*

Вопросы регуляризации интегральных уравнений Вольтерра третьего рода исследованы в работах [1-4]. Получены регуляризация лавретьевского типа с сохранением вольтерровости уравнения. Эти же вопросы изучается в анной работе для системы

$$p(x)u(x)+\int_0^x N_0\big(x,t,u(t)\big)dt \ = g(x), \tag{1}$$

где

$$p(x)=\begin{cases}p_1(x), & x\in[0,b_1],\\ p_2(x), & x\in[b_1,b],\end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases}f_1(x), & x\in[0,b_1],\\ f_2(x), & x\in[b_1,b],\end{cases}$$

$N_0\big(x,t,u(t)\big)=K(x,t)u(t)+N\big(x,t,u(t)\big)$.

Пусть $K(x,t)-$ $n\times n$ -матричная функция и известные скалярная функция $p(x)$ и вектор – функция $g(x)$ подчиняются условиям:

А) $K_{i,j}(x,t)\in C(D), i,j=\overline{1,n},\ \ D=\{(x,t)/\ 0\ \le t\le x\le b\}$;

Б) $f_1(x)=colon\big(\mu_1(x),\dots,\mu_n(x)\big)$,

$f_2(x)=colon\big(\varphi_1(x),\dots,\varphi_n(x)\big), \qquad f_1(b_1)=f_2(b_1)$;

$p_1(x)\in C^1[0,b_1],\quad p_1(x)$ - невозрастающая скалярная функция,

$p_1(x)>0,\qquad \forall x\in[0,b_1),\qquad p_1{}^{(i)}(b_1)=0,\qquad i=0,1$;

$p_2(x)\in C[b_1,b],\quad p_2(x)$ - неубывающая скалярная функция,

$p_2(x)>0,\qquad \forall x\in(b_1,b],\qquad p_2(b_1)=0$;

В) $G(x)=K(x,x),\ \ \|G(x)\|\le C_1\lambda(x),\qquad \lambda(x)\ge d_1,\qquad 0<d_1,\ C_1=const$,

$\lambda(x)=\min\limits_{1\le i\le n}\lambda_i(x),\qquad \lambda_i(x)\quad (i=\overline{1,n})$ – собственные значения матрицы

$[G(x)+G^*(x)]/2,\qquad G_1{}^*(x)$ - сопряженная матрица к матрице $G(x)$;

Г) вектор-функции $N\big(x,t,u(t)\big)$ непрерывна в области $D_2=D\times R^1, D=\{(x,t)/0\le t\le x\le b\}$

$N(x,x,u)=0$ и

$$\|N(x,s,u)-N(x,s,\omega)-N(t,s,u)+N(t,s,\omega)\|\le L_N(x-t)\|u-\omega\|, 0<L_N=const.$$

Если $x\in[0,b_1]$, то из системы уравнений (1) получим

$$p_1(x)z(x)+\int_0^x N_0\big(x,t,z(t)\big)dt=\mu(x),\quad x\in[0,b_1]. \tag{2}$$

Систему (2) приведем к виду

$$p_1(x)z(x)+\int_0^x G(t)z(t)dt=\int_0^x L(x,t)z(t)dt-\int_0^x N\big(x,t,z(t)\big)dt+\ f_1(x), \tag{3}$$

$x\in[0,b_1]$, где $L(x,t)=K(t,t)-K(x,t)$.

Рассмотрим систему уравнений

$$\big(\varepsilon+p_1(x)\big)z_\varepsilon(x)+\int_0^x G(t)\,z_\varepsilon(t)dt=\int_0^x L(x,t)z_\varepsilon(t)dt-\int_0^x N\big(x,t,z_\varepsilon(t)\big)dt+ \\ +f_1(x)+\varepsilon z(0), \tag{4}$$

где ε - малый параметр из интервала (0,1).

Систему уравнений (4) преобразуем к виду

$$z_\varepsilon(x)=-\frac{1}{\varepsilon+p_1(x)}\int_0^x \mathrm{X}_{1\varepsilon}(x,t)\frac{G_1(t)}{\varepsilon+p_1(t)}\Big\{\int_0^t L(t,s)z_\varepsilon(s)ds-\int_0^x L(x,s)z_\varepsilon(s)ds+ \\ +\int_0^t N\big(t,s,z_\varepsilon(s)\big)ds-\int_0^x N\big(x,s,z_\varepsilon(s)\big)ds+f_1(t)-f_1(x)\Big\}dt+\frac{\mathrm{X}_{1\varepsilon}(x,0)}{\varepsilon+p_1(x)}\Big\{\int_0^x L(x,s)\times \\ \times z_\varepsilon(s)ds+\int_0^x N\big(x,t,z_\varepsilon(t)\big)dt+f_1(x)+\varepsilon u(0)\Big\} \tag{5}$$

где $\mathrm{X}_\varepsilon(x,t)$ – функция Коши системы

$\frac{dv}{dx}=-(\varepsilon+p_1(x))^{-1}G(x)\mathcal{V}(x),$

При выполнении условий *А)-Г)* функция Коши удовлетворяет неравенству Важевского [4]:

$$\|X_\varepsilon(x,t)\|\le\sqrt{n}\,exp\left(-\int_t^x\frac{\lambda(s)}{\varepsilon+p(s)}ds\right), \qquad (6)$$

С помощью подстановки $\eta_\varepsilon(x)=z_\varepsilon(x)-z(x)$, из (5) получим

$\eta_\varepsilon(x)=-\frac{1}{\varepsilon+p_1(x)}\int_0^x X_{1\varepsilon}(x,t)\frac{G(t)}{\varepsilon+p_1(t)}\{\int_0^t L(t,s)\eta_\varepsilon(s)ds-\int_0^x L(x,s)\eta_\varepsilon(s)ds+$

$-\int_0^t[N(t,s,z_\varepsilon(s))-N(t,s,z(s))+N(x,s,z_\varepsilon(s))-N(x,s,z(s))]ds-$

$+\int_t^x[N(x,s,z_\varepsilon(s))-N(x,s,z(s))]ds+\varepsilon(z(t)-z(x))\}dt+\frac{1}{\varepsilon+p_1(x)}X_{1\varepsilon}(x,0)\times$

$$\times\left\{\int_0^x L_1(x,t)\,\eta_\varepsilon(t)dt+\int_0^x[M_1(x,t,z_\varepsilon(t))-M_1(x,t,z(t))]dt+\varepsilon(z(0)-z(x))\right\} \qquad (7)$$

Произведем оценки в системе (6). С учетом (6) имеем

$\left\|\frac{1}{\varepsilon+p(x)}\int_0^x X_\varepsilon(x,t)\frac{G(t)}{\varepsilon+p(t)}\{\int_0^t[L(x,s)-L(t,s)]\,\eta_\varepsilon(s)ds+\int_t^x L(x,s)\eta_\varepsilon(s)ds\}dt\right\|\le$

$\le 2\frac{C_2L_k\sqrt{n}}{d_1\theta_2^2}\int_0^x\|\eta_\varepsilon(t)\|\,dt,\ \ 0<L_K=Lip(K(x,t)|x),\ \ \theta_1+\theta_2=1,\ \ \theta_2\in(0{,}1),$

$$\left\|\frac{1}{\varepsilon+p(x)}X_\varepsilon(x,0)\int_0^x L(x,t)\,\eta_\varepsilon(t)dt\right\|\le\frac{C_2L_k\sqrt{n}}{d_1p(0)e}\int_0^x\|\eta_\varepsilon(t)\|\,dt$$

$\left\|\frac{1}{\varepsilon+p_1(x)}\int_0^x X_{1\varepsilon}(x,t)\frac{G_1(t)}{\varepsilon+p_1(t)}\times\right.$

$\left.\times\int_0^t[N(x,s,z_\varepsilon(s))-N(x,s,z(s))-N(t,s,z_\varepsilon(s))+N(t,s,z(s))]dsdt\right\|\le$

$\le\frac{C_1L_Nb_1}{d_1\theta_2^2}\sqrt{n}\int_0^x\|\eta_\varepsilon(t)\|\,dt;$

$\left\|\frac{1}{\varepsilon+p_1(x)}\int_0^x X_{1\varepsilon}(x,t)\frac{G_1(t)}{\varepsilon+p_1(t)}\int_t^x[N(x,s,z_\varepsilon(s))-N(x,s,z(s))]\,dsdt\right\|\le$

$\le\frac{C_1L_Nb_1}{d_1\theta_2^2}\sqrt{n}\int_0^x\|\eta_\varepsilon(t)\|\,dt;$

$\left\|\frac{X_{1\varepsilon}(x,0)}{\varepsilon+p_1(x)}\int_0^x[N(t,s,\bar{z}_\varepsilon(s))-N(t,s,\tilde{z}_\varepsilon(s))]dt\right\|\le\frac{C_1L_Nb_1}{d_1p_1(0)}\sqrt{n}\int_0^x\|\eta_\varepsilon(t)\|\,dt;$

$\le\frac{C_2L_Nb_1\sqrt{n}}{p_1(0)}\|\bar{z}_\varepsilon(x)-\tilde{z}_\varepsilon(x)\|_{C_n[0,b_1]};$

$\|\eta_\varepsilon(x)\|\le\ M_1\int_0^x\|\eta_\varepsilon(t)\|\,dt+\|(H_\varepsilon z)(x)\|.$

$(H_\varepsilon z)(x)\equiv\frac{\varepsilon}{\varepsilon+p(x)}\int_0^x exp\left(-\int_t^x\frac{G(s)}{\varepsilon+p(s)}ds\right)\frac{G(t)}{\varepsilon+p(t)}[z(x)-z(t)]\,dt-$

$-\frac{\varepsilon}{\varepsilon+p(x)}exp\left(-\int_0^x\frac{G(s)}{\varepsilon+p(s)}ds\right)[z(x)-z(0)].$

Имеет место [3] следующая

Лемма. Если выполняются условия *А)-Г)* и $u(x)\in C_n[0,b]$, то справедлива оценка

$$\|(H_\varepsilon z)(x)\|_{C_n[0,b]}\le(N_1\varepsilon+N_2\varepsilon^{1-\beta})\|z(x)\|_{C_n[0,b]}+d_3C_1\sqrt{n}\omega_u(\varepsilon^\beta),$$

где $N_1=(2+M_3)\sqrt{n},\ \ N_2=2N_1C_2/(\theta_2^2d_1e),\ \ d_3=1+\theta_2^{-1},\ \ \theta_2=1-\theta_1,$

$\omega_u(\varepsilon^\beta)=\sup_{|x-t|\le\varepsilon^\beta}\|z(x)-z(t)\|,\ \ 1/2\le\beta<1,\ \ \ M_3=\max_{[0,1]}|p'(x)|.$

При $x\in[b_1,b]$, система уравнений (1) переходит к следующему виду

$$p_2(x)y(x)+\int_{b_1}^x N_0(x,t,y(t))dt=f_2(x)-\int_0^{b_1}N_0(x,t,z(t))dt,x\in[b_1,b]. \qquad (8)$$

Пусть $F(x)=f_2(x)-\int_0^{b_1}N_0(x,t,z(t))dt$. Рассмотрим уравнение

$(\varepsilon+p_2(x))y_\varepsilon(x)+\int_{b_1}^x G(t)y_\varepsilon(t)dt=\int_{b_1}^x L(x,t)y_\varepsilon(t)dt-\int_{b_1}^x N(x,t,y_\varepsilon(t))dt+$

$$+F(x)+\varepsilon y(b_1), \quad \varepsilon \in (0,1). \tag{9}$$

Систему уравнений (10) преобразуем к виду

$$y_\varepsilon(x) = -\frac{1}{\varepsilon+p_2(x)}\int_{b_1}^{x}\frac{X_{2\varepsilon}(x,t)G(t)}{\varepsilon+p_2(t)}\Big\{\int_{b_1}^{t}[L(t,s)-L(x,s)]y_\varepsilon(s)ds - \int_t^x L(x,s)y_\varepsilon(s)ds -$$

$$-\int_0^t\big[N(t,s,y_\varepsilon(s)) - N(t,s,y(s)) + N(x,s,y_\varepsilon(s)) - N(x,s,y(s))\big]ds -$$

$$+\int_t^x\big[N(x,s,y_\varepsilon(s)) - N(x,s,y(s))\big]ds + F(t) - F(x)\Big\}dt + \frac{1}{\varepsilon+p_2(x)}X_{2\varepsilon}(x,0)\times$$

$$\times\left\{\int_0^x L(x,s)\,y(s)ds + \int_0^x N(x,t,y_\varepsilon(t))dt + F(x) + \varepsilon y(0)\right\} \tag{10}$$

Вводим подстановку $\xi_\varepsilon(x) = y_\varepsilon(x) - y(x)$ в (11). Тогда

$$\xi_\varepsilon(x) = -\frac{1}{\varepsilon+p_2(x)}\int_{b_1}^{x}X_{2\varepsilon}(x,t)\frac{G_2(t)}{\varepsilon+p_2(t)}\Big\{\int_{b_1}^{t}L(s,t)\xi_\varepsilon(s)ds - \int_{b_1}^{x}L_2(x,s)\xi_\varepsilon(s)ds -$$

$$-\int_{b_1}^{t}\big[N(t,s,y_\varepsilon(s)) - N(t,s,y(s)) + N(x,s,y_\varepsilon(s)) - N(x,s,y(s))\big]ds -$$

$$-\int_t^x\big[M_2(x,s,y_\varepsilon(s)) - M_2(x,s,y(s))\big]ds + \varepsilon[y(t)-y(x)]\Big\} + \frac{1}{\varepsilon+p_2(x)}X_{2\varepsilon}(x,0)\times$$

$$\times\left\{\int_{b_1}^{x} L(x,t)\,\xi_\varepsilon(t)dt + \int_{b_1}^{x}\big[N(x,t,y_\varepsilon(t)) - N(x,t,y(t))\big]dt + \varepsilon\big(y(x)-y(b_1)\big)\right\} \tag{12}$$

Произведя в (12) оценки, как и выше, получим

$$\|\xi_\varepsilon(x)\| \le M_1\int_0^x\|\xi_\varepsilon(t)\|\,dt + \|(H_\varepsilon y)(x)\|.$$

$$(H_\varepsilon y)(x) \equiv \frac{\varepsilon}{\varepsilon+p_2(x)}\int_{b_1}^{x}exp\left(-\int_t^x\frac{G(s)}{\varepsilon+p_2(s)}ds\right)\frac{G(t)}{\varepsilon+p_2(t)}[y(x)-y(t)]\,dt -$$

$$-\frac{\varepsilon}{\varepsilon+p_2(x)}exp\left(-\int_{b_1}^{x}\frac{G(s)}{\varepsilon+p_2(s)}ds\right)[y(x)-y(b_1)].$$

Для решения $u(x)$ системы (1), которое определяется по форме:

$$u(x) = \begin{cases} z(x), & x\in[0,b_1], \\ y(x), & x\in[b_1,b], \end{cases} \qquad z(b_1) = y(b_1), \tag{13}$$

где $z(x)$ - решение системы (2), $y(x)$ - решение системы (8), регуляризованное решение $u_\varepsilon(x)$ системы уравнений (1) строим по правилу

$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} z_\varepsilon(x), & x\in[0,b_1], \\ y_\varepsilon(x), & x\in[b_1,b], \end{cases} \qquad z_\varepsilon(b_1) = y_\varepsilon(b_1), \tag{14}$$

$z_\varepsilon(x)$ - решение системы (6), $y_\varepsilon(x)$ - решение системы (9).

Теорема. Пусть выполняются условия А) – Г) и система уравнений (1) имеет решение $u(x)\in C_n[0,b]$. Тогда при $\varepsilon\to 0$ регуляризованное решение $u_\varepsilon(x)$, определенное по правилу (14) равномерно сходится к решению системы уравнений (1), которое определяется согласно (13).

Литература:

1. Асанов А. Регуляризация и единственность решений линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода [Текст] /А.Асанов, Г.Ободоева //Исслед. по интегро–дифференц. уравнениям – Фрунзе: Илим, 1994. – Вып.25. – С.65–74.
2. Каракеев Т. Т. Решение линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода в случае вырождения коэффициентной функции во внутренних точках отрезка [Текст] /Т. Т. Каракеев, Ж. Т. Бугубаева // Науч. исслед. в Кырг. Респ. (ВАК Кырг. Респ.). – Бишкек, 2020. – № 4. – С. 67-78.
3. Karakeev T.T. Regularization of Systems of Volterra Linear Integral Equations of the Third Kind / T.T.Karakeev // Lobachevskii J. of Mathematics, 2020, 41 (9), P.1816–1821.
4. Омуров Т.Д. Регуляризация и численные методы решения обратных и нелокальных краевых задач [Текст] / Т.Д.Омуров, Т.Т.Каракеев. Бишкек: Илим, 2006. – 164 с.