УДК 517.968.4

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА СО МНОГИМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Аширбаева А.Ж., д.ф.-м.н., проф., aijarkyn.osh@mail.ru
ОшТУ, имени М.М. Адышева,
Садыкова Гульхан Курманбековна
ОшГУ, аспирант, г. Ош, Кыргызская республика

Аннотация: В работе для решения системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка используется метод дополнительного аргумента. В статье рассмотрена задача Коши. Использование метода дополнительного аргумента, разработанного кыргызскими учеными, для новых классов дифференциальных, интегро-дифференциальных уравнений и систем таких уравнений актуально и сегодня. Особенность этого метода в том, что задача сводится к системе интегральных уравнений, эквивалентной поставленной задаче. Это делается путем введения новой дополнительной переменной. Существование и единственность решения системы интегральных уравнений доказаны на основе принципа сжатых отображений. Особенность статьи в том, что начальная задача для системы уравнений многих переменных сводится к системе интегральных уравнений. Для подтверждения результатов в статье приводится конкретный пример и решение.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, частные производные, нелинейная система, дополнительный аргумент, сжатое отображение, задача Коши, многомерный случай.

КӨП ӨЗГӨРҮЛМӨЛҮҮ СЫЗЫКТУУ ЭМЕС БИРИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ЖЕКЕЧЕ ТУУНДУЛУУ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН СИСТЕМАСЫНЫН ЧЕЧИМИН ИЗИЛДӨӨ

Аширбаева Айжаркын Жоробековна, ф.-м.и.д., профессор, aijarkyn.osh@mail.ru
М.М. Адышев атындагы ОшТУ,
Садыкова Гульхан Курманбековна
ОшМУ, окутуучу, Ош ш., Кыргыз республикасы

Аннотация: *Бул эмгекте биринчи даражадагы сызыктуу эмес жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелердин системасын чечүү үчүн кошумча аргумент кийирүү ыкмасы колдонулат. Макалада Коши маселеси каралган. Дифференциалдык, интегро-дифференциалдык теңдемелердин жана мындай теңдемелердин системаларынын жаңы класстары үчүн кыргыз окумуштуулары тарабынан иштелип чыккан кошумча аргумент кийирүү ыкмасын колдонуу бүгүнкү күндө да актуалдуу. Бул методдун өзгөчөлүгү, маселе коюлган маселеге эквиваленттүү болгон интегралдык теңдемелер системасына келтирилгендигинде. Бул жаңы кошумча өзгөрмө киргизүү аркылуу ишке ашырылат. Интегралдык тендемелер системасынын чечиминин жашашы жана жалгыздыгы кысып чагылтуулар принцибинин негизинде далилденген. Макаланын өзгөчөлүгү – көп өзгөрмөлүү теңдемелер системасы үчүн баштапкы маселе интегралдык теңдемелер системасына келтирилген. Натыйжаларды ырастоо үчүн, макалада конкреттүү маселе каралып**,** чечими алынган.*

Түйүндүү сөздөр: *дифференциалдык тендеме, жекече туундулар, сызыктуу эмес система, кошумча аргумент, кысып чагылтуу, Коши маселеси, көп өлчөмдүү учур*.

INVESTIGATION OF SOLUTIONS TO A SYSTEM OF NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS IN FIRST ORDER PARTIAL DERIVATIVES WITH MULTIPLE VARIABLES

Ashirbayeva Aizharkyn Zhorobekovna, Professor,
aijarkyn.osh@mail.ru

OshTU, named after M.M. Adysheva,
Sadykova Gulkhan Kurmanbekovna
OshSU, Senior Lecturer (Osh, Kyrgyz Republic)

Abstract: *In this work the method of an additional argument is used for solving a system of nonlinear partial differential equations of the first order. The Cauchy problem is considered in the article. The usage of the additional argument method, developed by Kyrgyz scientists, for new classes of differential, integro-differential equations and systems of such equations is still relevant today. The peculiarity of this method is that the problem is reduced to a system of integral equations that is equivalent to the task posed. This is achieved by introducing a new additional variable. The existence and uniqueness of the solution of the system of integral equations are proved on the basis of the contraction mapping principle. The peculiarity of the article is that the initial problem for a system of equations of many variables is reduced to a system of integral equations. A specific example and its solution is given in the article to confirm the results.*

Keywords: *differential equation, partial derivatives, non-linear system, additional argument, compressed mapping, Cauchy problem, multidimensional case.*

Введение.

Моделирование многих физических процессов сводится к системе дифференциальных уравнений с частными производными. Найти решения таких систем сложно. Использование метода дополнительного аргумента для решения системы уравнений в частных производных является актуальной задачей. Однако мы не можем применить этот метод ко всем системам.

Постановка задачи.

В данной работе мы рассмотрим следующую систему, в которой можно использовать МДА:

$$\frac{\partial u_i(t,\mathrm{x})}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}a_k(t,\mathrm{x},\mathrm{u})\frac{\partial u_i(t,\mathrm{x})}{\partial x_k}=f_i(t,\mathrm{x},\mathrm{u}), \qquad (1)$$

$(t,\mathrm{x})\in G_{n+1}(T)=[0,T]\times R^n$, $\mathrm{u}=(u_1(t,\mathrm{x}),\ldots u_1(t,\mathrm{x}))$, $\mathrm{x}=(x_1,\ldots,x_n)$, $(t,\mathrm{x})\in G_{n+1}(T)=[0,T]\times R^n$.

Для системы (1) рассмотрим начальную задачу:

$$u_i(0,\mathrm{x})=\varphi_i(\mathrm{x}),\quad i=1,2,\ldots,n,\quad \mathrm{x}\in R^n, \qquad (2)$$

МДА применяли для различных систем дифференциальных уравнений в частных производных (СДУ в ЧП). Эти применения мы можем видеть в научных статьях М.И. Иманалиева, С.Н. Алексеенко, А.Ж. Аширбаевой.

В [2] рассмотрена задача (1), (2) с

$a_i(t,\mathrm{x},\mathrm{u})=u_i(t,\mathrm{x}),\quad i=1,\ldots,n.$

Доказательство существования решения задачи (1), (2) с $a_i(t,\mathrm{x},\mathrm{u})=a_i(t,\mathrm{x},u_{n-1})$ приведено в [2].

Пространства функций $\overline{C}^{\alpha_1,\ldots,\alpha_l}$, $Lip(N|_w, M|_v, \ldots)$ из [1,2] используются в данной работе.

Теорема. Пусть функции $\varphi_i(\mathrm{x})\in\overline{C}^1(R^n)$,

$a_i(t,\mathrm{x},\mathrm{u}),f_i(t,\mathrm{x},\mathrm{u})\in\overline{C}^{0,\underbrace{1,\ldots,1}_{n\,раз},\underbrace{1,\ldots,1}_{n\,раз}}(G_{n+1}(T)\times R^n)$. i=1,2,..,n.

Тогда СДУ в ЧП (1) с условием (2) имеет единственное, ограниченное решение в $G_{n+1}(T^*)$, где T^* ($0\le T^*\le T$) определяется из исходных данных.

Доказательство. Для СДУ в ЧП (1) с условием (2) используем МДА. Рассматриваемая задача эквивалентна системе интегральных уравнений (СИУ):

$$\begin{cases} u_i(t,\mathrm{x})=\varphi_i(\mathrm{p}(0,t,\mathrm{x}))+\int_0^t f_i(\nu,\mathrm{p}(\nu,t,\mathrm{x}),\mathrm{u}(\nu,\mathrm{p}(\nu,t,\mathrm{x})))d\nu \\ p_i(s,t,\mathrm{x})=x_i-\int_s^t a_i(\nu,\mathrm{p}(\nu,t,\mathrm{x}),\mathrm{u}(\nu,\mathrm{p}))d\nu, \end{cases} \qquad (3)$$

$\mathrm{p}(s,t,\mathrm{x})=(p_1(s,t,\mathrm{x}),p_2(s,t,\mathrm{x}),\ldots,p_n(s,t,\mathrm{x}))$,

$i=1,2,\ldots,n,\quad (s,t,\mathrm{x})\in Q_{n+2}(T)=\{(s,t,\mathrm{x})\,|\,0\le s\le t\le T,\ \mathrm{x}\in R^n\}.$

Для СДУ в ЧП (1) с условием (2) применяя МДА, приходим к СИУ. Мы можем видеть такие применения в работах [1-3]. И наоборот, из СИУ получим СДУ в ЧП (1) с условием (2). При этом докажем эквивалентность.
Из (3) имеем:

$$\frac{\partial u_i(t,\mathrm{x})}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}a_k(t,\mathrm{x},\mathrm{u})\frac{\partial u_i(t,\mathrm{x})}{\partial x_k}=f_i(t,\mathrm{x},\mathrm{u})+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_i}\left[\frac{\partial p_i(0,t,\mathrm{x})}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}a_k(t,\mathrm{x},\mathrm{u})\frac{\partial p_i(0,t,\mathrm{x})}{\partial x_k}\right]+$$

$$+\int_0^t\left(\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_l}+\sum_{r=1=}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial u_r}\frac{\partial u_r}{\partial x_l}\right)\left[\frac{\partial p_l(\nu,t,\mathrm{x})}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}a_k(t,\mathrm{x},\mathrm{u})\frac{\partial p_l(\nu,t,\mathrm{x})}{\partial x_k}\right]d\nu. \quad (4)$$

Из (4) следует:

$$\frac{\partial p_i(s,t,\mathrm{x})}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}a_k(t,\mathrm{x},\mathrm{u})\frac{\partial p_l(s,t,\mathrm{x})}{\partial x_k}=0, \quad (5)$$

$$p_i(t,t,\mathrm{x})=x_i,\, i=1,2,..,n.$$

Учитывая (5), **из СИУ получим** СДУ в ЧП (1) с условием (2).
Заменим в (3) переменную t через s, переменные x_i через $p_i(s,t,\mathrm{X}),\quad i=1,2,\ldots,n,$ **из СИУ (3) получаем следующую СИУ:**

$$\begin{cases}\omega_i(s,t,\mathrm{x})=\varphi_i(\mathrm{p}(0,t,\mathrm{x}))+\int_0^s f_i(\nu,\mathrm{p}(\nu,t,\mathrm{x}),\mathrm{w}(s,t,\mathrm{x}))d\nu\\ p_i(s,t,\mathrm{x})=x_i-\int_s^t a_i(\nu,\mathrm{p}(\nu,t,\mathrm{x}),\mathrm{w}(s,t,\mathrm{x}))d\nu,\end{cases} \quad (6)$$

Где $\omega_i(s,t,\mathrm{X})=u_i(s,\mathrm{p}(s,t,\mathrm{X}))$, $\mathrm{W}(s,t,\mathrm{X})=(\omega_1(s,t,\mathrm{X}),\omega_2(s,t,\mathrm{X}),\ldots,\omega_n(s,t,\mathrm{X})),$

$i=1,2,..,n,\quad (s,t,\mathrm{x})\in Q_{n+2}(T).$

При этом использовали доказанное в [1] равенство:

$p_i(s,t,\mathrm{X})=p_i(s,\tau,\mathrm{p}(\tau,t,\mathrm{X}))$, $i=1,2,..,n,\quad (s,t,\mathrm{X})\in Q_{n+2}(T).$

Докаже им существование единственного решения СИУ (6), принадлежащее $\overline{C}^{\underbrace{1,1,\ldots1}_{n\,раз},\underbrace{1,\ldots1}_{n\,раз}}([0,T]\times[0,T]\times R^{2n}).$

Для этого запишем СИУ (6) в виде: $\theta(s,t,\mathrm{X})=A(s,t,\mathrm{X};\theta),$ (7)

где $\theta=(\theta_0^1,\theta_0^2,\ldots,\theta_0^n,\theta_1^1,\theta_1^2,\ldots,\theta_1^n)$ - функция переменных (s,t,x), компоненты которой есть искомые функции $\theta_0^i=p_i(s,t,\mathrm{x})$, $\theta_1^i=\omega_i(s,t,\mathrm{x}),\quad i=1,2,\ldots,n,$ а компоненты оператора $A=(A_0^1,A_0^2,\ldots,A_0^n,A_1^1,A_1^2,\ldots,A_1^n)$:

$$A_0^i\theta=x_i-\int_s^t a_i(\nu,\theta_0^1(\nu,t,\mathrm{x}),\ldots,\theta_0^n(\nu,t,\mathrm{x}),\theta_1^1(\nu,t,\mathrm{x}),\ldots,\theta_1^n(\nu,t,\mathrm{x}))d\nu,$$

$$A_1^i\theta=\varphi_i(\theta_0^1(0,t,\mathrm{x}),\ldots,\theta_0^n(0,t,\mathrm{x}))+$$

$$+\int_0^s f_i(\rho,\theta_0^1(\rho,t,\mathrm{x}),\ldots,\theta_0^n(\rho,t,\mathrm{x}),\theta_1^1(\rho,t,\mathrm{x}),\ldots,\theta_1^n(\rho,t,\mathrm{x})d\rho,$$

$i=1,2,\ldots,n.$

Обозначим $M=\max\{\max\{\|a_i\|_{Q_{n+2}(T)}T,\|\varphi_i\|_{R^n}+\|f_i\|_{Q_{n+2}(T)}T\}:i=1,..n\}$.

Покажем, что уравнение (7) при достаточно малом $T^*<T$ имеет в шаре $S:\rho(\theta_x,\theta)\le M$ единственное решение.

Имеем при $t\le T^*\le T$: $\left\|A_0^i\theta-x_i\right\|\le\|a_i\|_{Q_{n+2}(T)}T;\left\|A_1^i\theta\right\|\le\|\varphi_i\|+\|f_i\|_{Q_{n+2}(T)}T, i=1,\ldots,n,$

Обозначим $M = \max\{\max\{\|a_i\|_{Q_{n+2}(T)}T, \|\varphi_i\|_{R^n} + \|f_i\|_{Q_{n+2}(T)}T\} : i = 1,..n\}$.

Покажем, что уравнение (7) при достаточно малом $T^* < T$ имеет в шаре $S:\rho(\theta_x,\theta)\le M$ единственное решение.

Имеем при $t \le T^* \le T$: $\left\|A_0^i\theta - x_i\right\| \le \|a_i\|_{Q_{n+2}(T)}T; \left\|A_1^i\theta\right\| \le \|\varphi_i\| + \|f_i\|_{Q_{n+2}(T)}T, i = 1,\ldots,n,$

то есть оператор A отображает шар S в себя.

Далее, $\left|A_0^i\theta^1 - A_0^i\theta^2\right| \le \Omega_{0i}(T)\rho(\theta^1,\theta^2)$, $\left|A_1^i\theta^1 - A_1^i\theta^2\right| \le \Omega_{i1}(T)\rho(\theta^1,\theta^2)$,

где $\Omega_{0i}(S) = (\sum_{k=1}^{n} L_k^i + K_k^i)S;\quad \Omega_{1i}(S) = \sum_{k=1}^{n} H_k^i S + \sum_{k=1}^{n}(M_k^i + N_k^i)S, i = 1,\ldots,n,$

$a_i(t,\mathrm{x},\mathrm{u}) \in Lip(L_1^i\big|_{x_1}, L_2^i\big|_{x_2},\ldots,L_n^i\big|_{x_n}, K_1^i\big|_{u_1}, K_2^i\big|_{u_2},\ldots,K_n^i\big|_{u_n}),$

$\varphi_i(\mathrm{x}) \in Lip(H_1^i\big|_{u_1}, H_2^i\big|_{u_2},\ldots,H_n^i\big|_{u_n}),\ H_j^i > 0 - const,\ i, j = 1,2,\ldots,n,$

$f_i(t,\mathrm{x},\mathrm{u}) \in Lip(M_1^i\big|_{x_1}, M_2^i\big|_{x_2},\ldots,M_n^i\big|_{x_n}, N_1^i\big|_{u_1}, N_2^i\big|_{u_2},\ldots,N_n^i\big|_{u_n}),\ M_j^i > 0 - const,\ N_j^i > 0 - const,$

i,j=1,2,…,n.

Отсюда следует, что оператор A при $T^* = \min\{\Lambda(T;\Omega_{1i}(S):S) : j = 0,1; i = 1,\ldots n\}$ осуществляет сжатое отображение шара S на себя.

Пример. Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,\mathrm{x})}{\partial t} + a(t,\mathrm{x},\mathrm{u})\dfrac{\partial u(t,\mathrm{x})}{\partial x} = a(t,\mathrm{x},u) + f(t) \\ \dfrac{\partial v(t,\mathrm{x})}{\partial t} + a(t,\mathrm{x},\mathrm{u})\dfrac{\partial v(t,\mathrm{x})}{\partial x} = g(t,\mathrm{x},u) \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} &u(0,x) = x, \\ &v(0,x) = \varphi(x), \quad x \in R, \end{aligned} \tag{9}$$

Рассмотрим сначала первое уравнение системы (8). Это уравнение с условием (9) с помощью МДА сводиться к СИУ:

$$\begin{cases} u(t,x) = x - \int_0^t a(\nu, p(\nu,t,x), u(\nu,p))d\nu + \int_0^t a(\nu, p(\nu,t,x), u(\nu,p))d\nu + \int_0^t f(s)ds, \\ p(s,t,x) = x - \int_s^t a(\nu, p(\nu,t,x), u(\nu,p))d\nu, \quad (s,t,x) \in Q_2(T). \end{cases} \tag{10}$$

Из (10) получаем: $u(t,x) = x + \int_0^t f(s)ds.$

Подставляя найденное решение во второе уравнение системы (8), затем применяя МДА, получаем решение в виде:

$$v(t,x) = \varphi(q(0,t,x)) + \int_0^t g(s, q(s,t,x), q(s,t,x) + \int_0^s f(\tau)d\tau)ds,$$

где $q(s,t,x)$ -решение следующего интегрального уравнения:

$$q(s,t,x) = x - \int_s^t a(\nu, q(\nu,t,x), q(\nu,t,x) + \int_0^\nu f(\tau)d\tau)d\nu, \quad (s,t,x) \in Q_2(T).$$

Выводы. Применяя принцип сжатых отображений доказали существования единственного решения СИУ (6), которая эквивалентна к системе (5). Мы доказали, что система (5) эквивалентна СДУ в ЧП (1) с условием (2). Следовательно, решение СДУ в ЧП (1) с условием (2) существует и оно единственно. Полученные результаты могут быть использованы для решения других СДУ в ЧП.

Литература:

1. Аширбаева А.Ж. Решение нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка методом дополнительного аргумента. – Бишкек: Илим, 2013. – 134 с.

2. Иманалиев М.И. , Алексеенко С.Н. К теории систем нелинейных интегро-дифференциаль-ных уравнений в частных производных типа Уизема //Доклады АН.-1992. -Т. 325.- № 6. -С.1111-1115.

3. Аширбаева А.Ж., Мамбетов Ж.И. Мамбетов Ж.И. Решение системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со многими переменными // Международный научно-исследовательский журнал. 2018. – № 3(69). – С. 6-10.