УДК: 517.91

УДААЛАШ ЖАКЫНДАШТЫРУУ ЫКМАСЫ АНЫН ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕНИН МЕЗГИЛДИК ЧЫГАРЫЛЫШЫН ИЗИЛДӨӨДӨГҮ КОЛДОНУЛУШУ

Алымбаев А. Т., ф.-м.и.д., проф., asangul1953@gmail.com
Солтонкулова Ж. М., ф.-м.и.к., доц. soltonkulova77@mail.ru
***Тайырова Р.У.**, ага окутуучу,*
reyna.tayyrova@mail.ru, И. Арабаев атындагы КМУ,
Бишкек шаары, Кыргыз Республикасы

Аннотация: *Макала сызыктуу эмес дифференциалдык теңдеменин жакындаштырылган мезгилдик чыгарылышын изилдөө маселесине арналат жана аны тургузуунун алгоритми каралат. Негизги басым, удаалаш жакындаштырып чыгаруу ыкманын сандык мисалдын мезгилдик чыгарылышын тургузуу маселесине арналат. Так жана мезгилдик чыгарылыштардын ортосундагы айырманын ченинин өлчөмү аныкталат.*

Негизги сүйлөмдөр: *Мезгилдик чыгарылыш, удаалаш жакындаштырып чыгаруу ыкмасы, так жана жакындаштырылган мезгилдик чыгарылыш, катанын ченинин өлчөмү.*

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Алымбаев А. Т., д.ф.-м.н., проф., asangul1953@gmail.com
Солтонкулова Ж. М., к.ф.-м.н., доц., soltonkulova77@mail.ru
Тайырова Р. У., ст.препод., reyna.tayyrova@mail.ru,
КГУ имени И. Арабаев
город Бишкек, Кыргызская Республика

Аннотация: *В статье рассматривается нелинейная дифференциальная уравнения. Рассматривается задача исследования периодическое решение уравнение и алгоритм его построение. Основной упор делается, задача построение методом последовательных приближений, периодических решений конкретных числовых примеров. Определена величина погрешности, разности между точным и приближенными решениями.*

Ключевые слова: *периодическое решение, метод последовательных приближений, точно и приближенное периодическое решение, величина размера погрешности.*

THE METHOD OF SUCCESSIVE APPROXIMATIONS AND ITS APPLICATION IN THE STUDY OF PERIODIC SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

Alymbaev A.T., d.f.-m.s., prof., asangul1953@gmail.com
Soltonkulova Zh. M., c.f.-m.s., assistant professor.
soltonkulova77@mail.ru
Тайырова Р.У., senior lecturer, reyna.tayyrova@mail.ru,
KSU named after I. Arabaev, Bishkek city, Kyrgyz Republic

Annotation: *The article considers a nonlinear differential equation. The problem of studying the periodic solution of the equation and the algorithm for its construction are considered. The main emphasis is on the task of constructing periodic solutions of specific numerical examples by the method of successive approximations. The value of the error, the difference between the exact and approximate solutions, is determined.*

Keywords: *periodic solution, method of successive approximations, exact and approximate periodic solution, error size.*

Киришүү

Азыркы учурда дифференциалдык теңдемелердин мезгилдик чыгарылышын изилдөөнүн жана аны тургузуунун көптөгөн ыкмалары бар. Мындай ыкмаларга асимптотикалык, сандык, аналитикалык, сан-аналитикалык ыкмаларды, атасак болот [1-5]. Удаалаш жакындаштырып изилдөө ыкмасы, аналитикалык ыкманын түрүнө кирип, эффективдүү, универсалдык ыкмалардын тизмесине кирет. Бул жагдайда Дж Хейлдин [2], А.М.Самойленко, Н.Х.Ронтонун [1], Е.А.Гребников, Ю.А.Рябовдун [3] жана К.Алымкуловдун [4] монографияларын атасак болот. Бул авторлордун эмгектеринде, мезгилдик чыгарылышты тургузуунун алгоритмдерин кароо менен бирге, бар экендиги жана жалгыздыгы сыяктуу маселелер каралган.

Негизги текст

Дифференциалдык теңдемелердин мезгилдик чыгарылышын табуу маселеси, теңдеме үчүн, эки чекиттүү чектик маселенин чыгарылышын түзүү маселесинин жекече учуру болуп, - эсептелет.

Мезгилдик чыгарылышты табуу маселеси, дифференциалдык теңдемелер үчүн эки маселени изилдөөдөн турат. Биринчиси – чыгарылышка умтулуучу функциялардын удаалаштыгынын мүчөлөрүн түзүү. Экинчиси – удаалаштыктын мүчөлөрүнүн ичинен, теңдеменин мезгилдик чыгарылышын жаратуучу, чыгарылыштын баштапкы маанилерин берүүчү бируркациялык (аныктоочу) теңдемелерди түзүү жана аны чыгаруу.

Бизге R=(−∞,∞) аныкталып, мезгили T барабар болгон, мезгилдүү $f(t)$ функция берилсин: $f(t)$=$f(t+T)$. $f(t)$ символу аркылуу функциянын орточо маанисин белгилейбиз

$$\bar{f}(t) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt.$$

Лемма 1. Эгерде $\bar{f}(t) = 0$ болсо, анда

$S(t) = S(t+T),\ S(t) = \int_0^t f(s)ds.$

Далилдөө.

$S(t+T) = \int_0^{t+T} f(s)ds = \int_0^T f(s)ds + \int_T^{t+T} f(s)ds =$

$= \int_0^T f(s)ds + \int_0^t f(s+T)ds = \int_0^t f(s+T)ds = \int_0^t f(s)ds = S(t).$

$|f(t)|_0$ символу менен $f(t)$ функциянын $[0,T]$ кесиндидеги нормасын белгилейбиз:

$$|f(t)|_0 = \max_t |f(t)|,\ \ t \in [0,T].$$

Лемма 2. $f(t)$ $[0,T]$ кесиндисинде аныкталган үзгүлтүксүз функция болсо, анда

$\left|\int_0^t \left(f(s) - \bar{f}(s)\right) ds\right| \le \alpha(t)|f(t)|_0 \le \frac{T}{2}|f(t)|_0.$

Функция түзөлү: $g(t) = f(t) - \bar{f}(t)$.

Лемма 1 негизинде, төмөндөгүдөй лемманы далилдөөгө болот.

Лемма 3. $g(t)$ функциясы T – мезгилдүү функция жана

$$S(t) = \int_0^t g(s)ds = S(t+T).$$

Далилдөө.

$g(t+T) = f(t+T) - \bar{f}(t+T) = f(t) - \bar{f}(t) = g(t).$

$$S(t+T) = \int_0^{t+T} g(s)ds = \int_0^{t+T}\left(f(s) - \bar{f}(s)\right)ds = \int_0^T \left(f(s) - \bar{f}(s)\right)ds +$$
$$+\int_0^{t+T} g(s)ds = \int_0^T f(s)ds - \frac{T}{T}\int_0^T f(s)ds + \int_0^t g(s+t)ds =$$
$$= \int_0^T f(s)ds - \int_0^T f(s)ds + \int_0^t g(s)ds = \int_0^t g(s)ds = S(t).$$

Дифференциалдык теңдеме берилсин

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t,x), \tag{1}$$

мында $f(t,x)$ t боюнча T – мезгилдүү функция, $x \in D \subset (-\infty,\infty)$ жана

$$(t,x) \in R \times D = (-\infty,\infty) \times D \subset (-\infty,\infty) \tag{2}$$

областа аныкталып, төмөндөгүдөй шарттарды канаатандырсын:

$$|f(t,x)| \le M, \tag{3}$$

$$|f(t,x') - f(t,x'')| \le K|x' - x''|, \tag{4}$$

мында M, K – турактуу оң сандар.

Интегралдык теңдемени карайлы

$$x(t,x_0) = x_0 + \int_0^t \left(f(s,x(s,x_0)) - \overline{f(s,x(s,x_0))}\right)ds. \tag{5}$$

(5) интегралдык теңдеменин $T-$ мезгилдүү чыгарылышын тургузуу маселесин, эки маселенин чыгарылышын табууга келтиребиз. Биринчи маселе: (5) теңдеменин чыгарылышын удаалаш жакындаштыруу ыкмасынын алгоритми түрүндө издейбиз

$$x_k(t,x_0) = x_0 + \int_0^t \left(f\big(s, x_{k-1}(s,x_0)\big) - \overline{f\big(s, x_{k-1}(s,x_0)\big)}\right) ds, \tag{6}$$

мында $x_0(t,x_0) = x_0,\ k = 1,2,3,\dots$.

Экинчи маселе: мезгилдик чыгарылыштын баштапкы маанисин биффуркациялык (аныктоочу) теңдеменин нөлү болгондой кылып тандап алабыз

$$\overline{f\big(s, x_k(s,x_0)\big)} = \frac{1}{T}\int_0^T f\big(s, x_k(s,x_0)\big) ds = 0, \quad k = 1,2,3,\dots. \tag{7}$$

$g_{k-1}(s) = f\big(s, x_{k-1}(s,x_0)\big) - \overline{f\big(s, x_{k-1}(s,x_0)\big)}$ белгилесек, анда лемма 3 негизинде, $x_k(t,x_0)$ функциялары $T-$ мезгилдүү функциялар болушат.

Чынында эле

$$x_k(t+T,x_0) = x_0 + \int_0^{t+T}\left(f\big(s,x_{k-1}(s,x_0)\big) - \frac{1}{T}\int_0^T f\big(s_1,x_{k-1}(s_1,x_0)\big)ds_1\right)ds =$$

$$= x_0 + \int_0^t\left(f\big(s,x_{k-1}(s,x_0)\big) - \overline{f\big(s,x_{k-1}(s,x_0)\big)}\right)ds + \int_0^T f\big(s,x_{k-1}(s,x_0)\big)ds -$$

$$- \int_0^T f\big(s,x_{k-1}(s,x_0)\big)ds = x_0 + \int_0^t\left(f\big(s,x_{k-1}(s,x_0)\big) - f\big(s,x_{k-1}(s,x_0)\big)\right)ds =$$

$$= x_k(t,x_0).$$

$|x_k(t,x_0) - x_{k-1}(t,x_0)|_0$ – айырманын ченинин өлчөмүн эсептейли:

$$|x_k(t,x_0) - x_{k-1}(t,x_0)| = \int_0^t \Big[f\big(s,x_{k-1}(s,x_0)\big) - f\big(s,x_{k-2}(s,x_0)\big) -$$

$$- \left(\overline{f\big(s,x_{k-1}(s,x_0)\big) - f\big(s,x_{k-2}(s,x_0)\big)}\right)\Big] ds.$$

Мындан, лемма 2 жана (3), (4) барабарсыздыктарды колдонуп, төмөндөгүдөй барабарсыздыкты алабыз

$$|x_k(t,x_0) - x_{k-1}(t,x_0)|_0 \le \frac{TK}{2}|x_{k-1}(t,x_0) - x_{k-2}(t,x_0)|_0 \le \cdots$$

$$\dots \le \left(\frac{TK}{2}\right)^{k-1} |x_1(t,x_0) - x_0|_0 \le \left(\frac{TK}{2}\right)^k M. \tag{8}$$

Эгерде, $TK < 2$ шарты аткарылса, анда $K \to \infty$

$$|x_k(t,x_0) - x_{k-1}(t,x_0)|_0 = 0.$$

Ошентип

$$x_0(t,x_0), x_1(t,x_0), x_2(t,x_0), \dots, x_k(t,x_0), \dots,$$

функционалдык удаалаштык $K \to \infty$ бир калыпта жыйналып, анын предели $x^0(t,x_0)$, (5) интегралдык теңдеменин мезгилдик чыгарылышы болот.

Жогоруда айтылгандардан төмөндөгүдөй жыйынтыкты алабыз.

Теорема 1. (1) дифференциалдык теңдемедеги $f(t,x)$ функция $T-$ мезгилдүү функция болуп, (2) областа (3), (4) барабарсыздыктары орун алып, $TK < 2$ шарты орун алсын, анда (5) теңдеменин $T-$ мезгилдүү чыгарылышы $x^0(t,x_0)$ (6) алгоритмдин жардамы менен изделип, $k \to \infty$ (6) удаалаштыктын предели болот.

(8) барабарсыздыкты колдонуп, (5) интегралдык теңдеменин $T-$ мезгилдүү так $x^0(t,x_0)$ чыгарылышы менен (6) удаалаштыктын айырмасынын ортосундагы айырманын өлчөмүн табабыз:

$$|x^0(t,x_0) - x_k(t,x_0)| \le \frac{Mq^k}{K(1-q)}, \quad q = \frac{TK}{2}, \quad k = 0,1,2,3,\dots. \tag{9}$$

Биффуркациялык (аныктоочу) функцияларды карайлы:

$$S(x_0) = \frac{1}{T}\int_0^T f\big(t, x^0(t,x_0)\big)dt, \tag{10}$$

$$S_k(x_0) = \frac{1}{T}\int_0^T f\big(t, x_k(t,x_0)\big)dt. \tag{11}$$

(4) жана (9) барабарсыздыктардан

$$|S(x_0) - S_k(x_0)| \le \frac{Mq^k}{1-q}, \quad k = 0,1,2,3, \dots .$$

Мындан

$$a_M = S_M(x_0) - \frac{Mq^k}{1-q} \le S(x_0) \le \frac{Mq^k}{1-q} + S_k(x_0) = b_K.$$

Ошентип, (1) дифференциалдык теңдеменин чыгарылышын аныктоочу, биффуркациялык (10) функциянын графиги $[a_K, b_K]$ кесиндисинде жатып, чыгарылыштын баштапкы мааниси

$$d_K = x_k(t, x_0) - \frac{MT}{2} \le x^0(0, x_0) = x_0 \le \frac{MT}{2} + x_k(t, x_0) = c_K,$$

$[d_K, c_K]$ кесиндисинде жатышы зарыл $x_0 \in [d_K, c_K]$.

Сандык мисал

Дифференциалдык теңдеменин жакындаштырылган мезгилдик чыгарылышын тапкыла:

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) + \varepsilon\big(cos2t + 2x(t) - x^3(t)\big), \tag{12}$$

мында ε – параметр.

(6) алгоритмдин негизинде, $x_0(t, x_0) = x_0$ үчүн, $k = 1$ болгондо:

$$x_1(t, x_0) = x_0 + \int_0^t [x_0 + \varepsilon(cos2s + 2x_0 - x_0{}^3) -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(x_0 + \varepsilon(cos2s + 2x_0 - x_0{}^3)ds)]dt =$$

$$= x_0 + \int_0^t [x_0 + \varepsilon cos2t + 2\varepsilon x_0 - \varepsilon x_0^3 - x_0 - 2\varepsilon x_0 + \varepsilon x_0^3]dt =$$

$$= x_0 + \frac{\varepsilon}{2} sin2t. \tag{13}$$

$k = 2$ үчүн:

$$x_2(t, x_0) = x_0 + \int_0^t \Big[x_0 + \frac{\varepsilon}{2} sin2s + \varepsilon cos2s + 2\varepsilon x_0 + \varepsilon^2 sin2s -$$

$$-\varepsilon x_0^3 - \frac{3\varepsilon^2}{2} x_0^2 sin2s - \frac{3\varepsilon^3}{4} x_0 sin^2 2s - \frac{\varepsilon^4}{8} sin^3 2s -$$

$$-x_0 - 2\varepsilon x_0 + \frac{3\varepsilon^3}{8} x_0 + \varepsilon x_0^3\Big] ds = x_0 +$$

$$+\left(\frac{\varepsilon}{4} - \frac{3\varepsilon^2}{4} x_0^2 - \frac{\varepsilon^4}{32}\right)(1 - cos2t) - \frac{\varepsilon^4}{128}(1 - cos4t). \tag{14}$$

(12) дифференциалдык теңдеменин биринчи жана экинчи жакындаштырылган $x_1^0(t, x_0)$, $x_2^0(t, x_0)$ 2π – мезгилдүү чыгарылышын табабыз.

Биринчи жакындаштырылган биффуркациялык теңдемени түзөлү:

$$S_1(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(x_0 + \varepsilon(cos2s + 2x_0 - x_0^3)\right) ds = x_0 + 2x_0\varepsilon - \varepsilon x_0^3.$$

$$S_1(x_0) = x_0 + 2x_0\varepsilon - \varepsilon x_0^3 = 0. \tag{15}$$

Мындан

$$x_0 + 2x_0\varepsilon - \varepsilon x_0^3 = x_0(1 + 2\varepsilon - \varepsilon x_0^2) = 0.$$

$x_{10} = 0$, $x_{20} = \sqrt{\frac{1+2\varepsilon}{\varepsilon}}$, $x_{30} = -\sqrt{\frac{1+2\varepsilon}{\varepsilon}}$.

Эгерде $\frac{1+2\varepsilon}{\varepsilon} \ge 0$, анда (15) аныктоочу теңдеменин эки заттык тамырлары болот. Мында төмөндөгүдөй учурлардын болушу мүмкүн:

a) $\varepsilon > 0$, $1 + 2\varepsilon \ge 0$, $\varepsilon \ge -\frac{1}{2}$, $\varepsilon > 0$;

b) $\varepsilon < 0$, $1 + 2\varepsilon < 0$, $\varepsilon \le -\frac{1}{2}$.

Демек, $\varepsilon \in (-\infty, -\frac{1}{2}] \cup (0, \infty)$ үчүн (12) теңдеменин биринчи жакындаштырылган чыгарылыштары төмөндөгүдөй функциялар болушат

$x_1^{(1)}(t, 0) = \frac{\varepsilon}{2} sin2t$, $x_1^{(2)}(t, x_{20}) = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} + \frac{\varepsilon}{2} sin2t$,

$x_1^{(3)}(t, x_{30}) = -\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} + \frac{\varepsilon}{2} sin2t.$

$$\varepsilon = 4: \quad x_1^{(1)}(t,0) = 2sin2t, \quad x_1^{(2)}(t,x_{20}) = \frac{\sqrt{5}}{2} + 2sin2t,$$

$$x_1^{(3)}(t,x_{30}) = -\frac{\sqrt{5}}{2} + 2sin2t.$$

Мезгилдик чыгарылыштын экинчи жакындашуусуна кайрылсак

$$S_1(x_0) = x_0 + 2x_0\varepsilon - \frac{3\varepsilon^3}{8}x_0 - \varepsilon x_0^3 = 0. \qquad (16)$$

$$x_0\left(1 + 2\varepsilon - \frac{3\varepsilon^3}{8} - \varepsilon x_0^2\right) = 0.$$

Мындан

$$x_{10} = 0, \quad x_{20} = \sqrt{\frac{1 + 2\varepsilon - \frac{3\varepsilon^3}{8}}{\varepsilon}}, \quad x_{30} = -\sqrt{\frac{1 + 2\varepsilon - \frac{3\varepsilon^3}{8}}{\varepsilon}}. \qquad (17)$$

$$\varepsilon > 0, \quad 1 + 2\varepsilon - \frac{3\varepsilon^3}{8} \geq 0.$$

$$3\varepsilon^3 - 16\varepsilon - 8 = 0, \qquad (18)$$

теңдеменин тамырларын табалы

$$f(\varepsilon) = 8 + 16\varepsilon - 3\varepsilon^3, \quad f'(\varepsilon) = 16 - 9\varepsilon^2.$$

$$f(2) = 16 > 0, \qquad f(3) = -25 < 0.$$

Демек, (17) теңдеменин тамырларын $[2;3]$ кесиндиден издейбиз.

$\varepsilon_0 = 2{,}6$, - деп алып, Ньютондун алгоритминин негизинде

$$\varepsilon_1 = 2{,}6 - \frac{8 + 16\cdot 2{,}6 - 3\cdot(2{,}6)^3}{16 - 9\cdot(2{,}6)^2} = 2{,}531;$$

$$\varepsilon_2 = 2{,}531 - \frac{8 + 16\cdot 2{,}531 - 3\cdot(2{,}531)^3}{16 - 9\cdot(2{,}531)^2} = 2{,}528.$$

Демек, $\varepsilon^{\circ} \approx 2{,}528$. Ошентип, $\varepsilon \in [2; 2{,}528) \cup (2{,}528; 3]$ үчүн, (16) теңдеменин тамырлары (17) аркылуу аныкталат.

(14) туюнтмадан (12) дифференциалдык теңдеменин экинчи жакындаштырылган 2π – мезгилдик чыгарылышы төмөндөгүдөй формулалардын негизинде жазылат:

$$x_2^{(1)}(t,x_{10}) = \left(\frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon^4}{32}\right)(1 - cos2t) - \frac{\varepsilon^4}{128}(1 - cos4t);$$

$$x_2^{(2)}(t,x_{20}) = \sqrt{\frac{1+2\varepsilon-\frac{3\varepsilon^3}{8}}{\varepsilon}} + \left(\frac{\varepsilon}{4} - \frac{3\varepsilon}{4}\left(1 - 2\varepsilon - \frac{3\varepsilon^3}{8}\right)\right)(1 - cos2t) -$$

$$-\frac{\varepsilon^4}{128}(1 - cos4t);$$

$$x_2^{(3)}(t,x_{30}) = -\sqrt{\frac{1+2\varepsilon-\frac{3\varepsilon^3}{8}}{\varepsilon}} + \left(\frac{\varepsilon}{4} - \frac{3\varepsilon}{4}\left(1 - 2\varepsilon - \frac{3\varepsilon^3}{8}\right)\right)(1 - cos2t) - \frac{\varepsilon^4}{128}(1 - cos4t).$$

$$\varepsilon = 2: \quad x_2^{(1)}(t,0) = -\frac{1}{8}(1 - cos4t),$$

$$x_2^{(2)}(t,x_{20}) = 1 + \frac{19}{4}(1 - cos2t) - \frac{1}{8}(1 - cos4t),$$

$$x_2^{(3)}(t,x_{30}) = -1 - \frac{19}{4}(1 - cos2t) - \frac{1}{8}(1 - cos4t).$$

Адабияттар:

1. Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы исследования периодических решений // - Киев: Вища школа, 1976, - 176с.
2. Хейл Дж. Колебания в нелинейных системах // - М.: Изд. Мир, 1966, - 230с.
3. Гребенников Е.А., Рябов Ю.А. Конструктивные методы анализа нелинейных системах // - М.: Наука, 1979, - 432с.
4. Алымкулов К. Возмущенные дифференциальные уравнения с особыми точками и некоторые проблемы бифффуркационных задач // - Бишкек: Илим, 1992, - 138с.
5. Алымбаев А.Т. Численные, численно-аналитические и асимптотические методы исследования краевых задач // - Бишкек: Изд. КНУ, 2015, - 205с.