УДК 517.928

СИНГУЛЯРДЫК КОЗГОЛГОН КАДИМКИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕНИН ЧЕЧИМИН ИЗИЛДӨӨ

Абдилазизова А.А., улук окутуучу, abdilazizovaa@mail.ru.
Эрмекбаева А.Т., улук окутуучу, ОшМУ,
aijana.ermekbaeva@mail.ru., Ош. Кыргызстан

Аннотация: *Бул жумушта туруктуулук шарты алмашкан учурда сингулярдык козголгон кадимки дифференциалдык теңдеме үчүн баштапкы Коши маселеси каралган. Сингулярдык аймак аныкталган жана ал аймак үчүн баалоо алынган. Козголгон жана козголбогон маселелердин чечимдеринин жакындыгы далилденген. Негизги өзгөчөлүк изилденүүчү функциянын интегралынын чыныгы бөлүгүнүн нөлү чыныгы сандар талаасында жок. Комплекстүү тегиздикте аймак аныкталган. Изилденген маселеге баалоо берилген.*

Түйүндүү сөздөр: *козголуу,дифференциалдык теңдеме, баштапкы шарт, Коши маселеси, асимптотика, чечим, интегралдоо жолу.*

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Абдилазизова А.А., ст. Препод., abdilazizovaa@mail.ru.
Эрмекбаева Айжана Турдубековна, ст. преподаватель,
aijana.ermekbaeva@mail.ru., ОшГУ, Ош. Кыргызстан

Аннотация: *В данной работе рассматривается начальная задача Коши для сингулярно возмущенного обыкновенного дифференциального уравнения в случае смены устойчивости. Определена сингулярная область и на этой области получена оценка. Доказывается близости решений возмущенной и невозмущенной задачи. Особенность заключается в том, что действительная часть интеграла интегрируемой функции не имеют нули в пространстве действительных чисел. Определено область в комплексной плоскости. Дано оценка исследуемой задачи.*

Ключевые слова: *возмущение, дифференциальное уравнение, начальное условие, задача Коши асимптотика, решение, пути интегрирование.*

STUDY OF SOLUTIONS OF SINGULARLY PERTURBED ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION

Abdilazizova A. A., Senior Lecturer, abdilazizovaa@mail.ru.
Ermekbaeva Ayzhan Turdubekovna, Senior Lecturer,
aijana.ermekbaeva@mail.ru., OshSU, Osh, Kyrgyzsta

Abstract: *In this paper, we consider the initial Cauchy problem for a singularly, perturbed ordinary differential equation in the case of a change in stability. A singular region is defined and an estimate is obtained on this region. The proximity of the solution of the perturbed and unperturbed problems is proved. The peculiarity lies in the fact that the real part of the integral of the integrable function does not have zeros in the space of real numbers. The area in the complex plane is defined. An estimate of the problem under study is given.*

Keywords: *perturbation, differential equation, initial condition, Cauchy problem, asymptotics, solution, ways of integration.*

Киришүү. Жумушта биринчи тартиптеги сызыктуу бир тектүү эмес скалярдык теңдеме каралат. Негизги өзгөчөлүгү болуп $a(t)$ функциясынын интегралынын чыныгы бөлүгүнүн нөлү чыныгы сандар талаасында жашабайт.

Маселенин коюлушу.

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon) = a(t)x(t,\varepsilon) + \varepsilon f(t), \tag{1}$$

$$x_0(t,\varepsilon) = x^0(\varepsilon), \ \left|x^0(\varepsilon)\right| = O(\varepsilon), \tag{2}$$

Төмөнкү шарт аткарылсын:

U. $a(t), f(t) \in \Phi(H_0)$, $a(t) < 0 : t < 0$; $a(t) > 0 : t > 0$; $a(t) = 0$, $t = 0$.

$\Phi(H_0) - H_0$ - до аналитикалык функциялардын мейкиндиги. Мында $x(t,\varepsilon)$ чечимин $\Phi(H_0)-$ классынан t боюнча издейбиз.

U шартына ылайык: $t_0 \le t_1 < 0$ үчүн $\operatorname{Re} a(t) < 0$; $t = 0$ болгондо $\operatorname{Re} a(0) = 0$; $0 < t_1 \le -t_0$ болгондо $\operatorname{Re} a(t) > 0$ болору келип чыгат. Демек, (1) теңдеменин тең салмактуулук абалынын туруктуулук шарты $[t_0, 0]$ интервалында аткарылып, $(0, -t_0]$-кесиндиде туруктуулук шарты орун албайт.

t_0- туруктуу интервалга тиешелүү чекит, б. а. $t_0 \in (-\infty, 0)$ болот жана ал $-t_0 = \ln(\sqrt{2}-1)$ маанисин кабыл алат. Кармалуу убактысы $\delta : \delta = |t_0|$ болот, бул максималдуу кармалуу убактысы болуп эсептелет.

Теорема. U 1 шарты аткарылсын, анда (1)-(2) маселенин $t_0 \le t \le -t_0 - \alpha(\varepsilon)$ аралыгында жалгыз чечими жашайт жана $\|x(t,\varepsilon)\| \le c\omega(\varepsilon)$, баалоосу орун алат, мында, $\alpha(\varepsilon)$ - монотондуу кемүүчү функция жана $\alpha(0) = 0$, $0 < c - const$. $\omega(\varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon, & t_0 < t \le -t_0 - \alpha(\varepsilon); \\ \sqrt{\varepsilon}, & -t_0 - \alpha(\varepsilon) < t < -t_0. \end{cases}$

Далилдөө. $a(t)$ функциясынын нөлдөрү мезгили 2π болгон ордината огуна карата мезгилдүү экендиги белгилүү. Натыйжада, изилденген аймак ордината огунда 2π мезгилдүү болот. Бирок, биз **абцисса огун кармаган** H_0 аймагын алабыз.

(1), (2) маселе төмөнкү интегралдык теңдеме менен тең күчтүү болот:

$$x(t,\varepsilon) = E(t,t_0,\varepsilon)x^0(\varepsilon) + \int_{t_0}^{t} E(t,\tau,\varepsilon) f(\tau) d\tau, \tag{3}$$

мында $E(t,t_0,\varepsilon) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right)$, $E(t,\tau,\varepsilon) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t} a(s)ds\right)$.

Бул теңдеме H_0 аймагында изилденет.

(3) теңдемени $x(t,\varepsilon) = A(t,\varepsilon) + J(t,\varepsilon)$ деп белгилеп алабыз. Биринчи кошулуучусуна асимптотикалык баалоо жүргүзөбүз. $A(t,\varepsilon) = e^{\frac{1}{\varepsilon}[(cht - cht_0) + i(sht - sht_0)]}$,

болот жана H_0 аймагында $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} y_0 e^{\frac{1}{\varepsilon}[(cht - cht_0) + i(sht - sht_0)]} = 0.$

Ал эми (3) теңдеменин $J(t,\varepsilon)$ кошулуучусуна баалоо жүргүзөбүз.

$$J(t,\varepsilon) = e^{\frac{1}{\varepsilon}(cht + isht)} \int_{-t_0}^{t} f(\tau) e^{-\frac{1}{\varepsilon}(ch\tau + ish\tau)} d\tau,$$

болот, мындан төмөнкүгө ээ болобуз: $J(t,\varepsilon) = -\dfrac{\varepsilon f(t)}{sht + icht} + \dfrac{\varepsilon f(t_0) e^{\frac{1}{\varepsilon}((cht + isht) - (cht_0 + isht_0))}}{sht_0 + icht_0} -$

$$-\varepsilon e^{\frac{1}{\varepsilon}(cht + isht)} \int_{-t_0}^{t} e^{-\frac{1}{\varepsilon}(ch\tau + ish\tau)} \cdot \left(\frac{ch\tau + ish\tau}{(sh\tau + ich\tau)^2} f(\tau) + f(\tau) \frac{1}{sh\tau + ich\tau} \right) d\tau$$

Мында $cht + isht \ne 0$. Туруктуу аралыкта $t \in [-t_0, 0]$, cht функциясы кемүүчү болгондуктан $(cht - ch\tau)$ белгиси терс болот, ошентип төмөндөгү жыйынтыкка келебиз: $|J(t,\varepsilon)| = 0(\varepsilon)$.

Мында $cht + isht = 0$. Туруктуу аралыкта $t \in [-t_0, 0]$, cht функциясы кемүүчү болгондуктан $(cht - ch\tau)$ белгиси терс болот, ошентип төмөндөгү жыйынтыкка келебиз: $|J(t,\varepsilon)| = 0(\varepsilon)$.

Туруктуулук шарты орун албаган аралыкта $t \in [0, t_0]$, $(cht - ch\tau)$-белгиси оң, терс же нөлгө барабар болушу мүмкүн. Ошондуктан, изилдөөдө чыныгы сандар талаасы жетишсиз болот, изилдөөнү комплекстик өзгөрмөлөр талаасында улантабыз: $t = t_1 + it_2, \tau = \tau_1 + i\tau_2$, мында $t_1, t_2, \tau_1, \tau_2 \in R$.

Комплекстик сандар талаасында H_0 аймагы экинчи тартиптеги ийрилер-гиперболалардын бутактары менен төмөн жагынан чектелген аймак болот.

Төмөнкүгө ээ болобуз: $u(t_1,t_2) = \mathrm{Re}\int\limits_{t_0}^{t_1+it_2} a(s)ds = \left[\sqrt{2}cht_1\cos\left(t_2 + \frac{\pi}{4}\right) - c\right]$.

$\forall (t_1, t_2) \in H_0$ үчүн $A(t,\varepsilon)$ кошулуучусуна $|A(t_1,t_2,\varepsilon)| = 0(\varepsilon)$ баалоосу алынат, себеби бул жерде $u(t_1,t_2) \le 0, |t_1| \le t_0$ шарттары орун алат.

$J(t_1,t_2,\varepsilon)$ интегралын карайбыз: $|J(t_1,t_2,\varepsilon)| \le \int\limits_l f(\tau_1,\tau_2) e^{\frac{1}{\varepsilon}[u(t_1,t_2) - u(\tau_1,\tau_2)]}\sqrt{d\tau_1^2 + d\tau_2^2}$.

l үч жолдон турат, б.а., $l = l_1 \cup l_2 \cup l_3$ удаалаш түрдө төмөнкү чекиттерди туташтырат:

$$(-t_0, 0), (-t_0, \frac{\pi}{4}), (t_1, \frac{\pi}{4}), (t_1, t_2).$$

$l_1: \tau_1 = -t_0, -\frac{\pi}{4} \le \tau_2 \le 0$ интегралдоо жолунда баалоо жүргүзөбүз.

$$J_1 \le e^{\frac{u(t_1,t_2)}{\varepsilon}} \int\limits_{-\pi/4}^{0} e^{-\frac{\sqrt{2}cht_0}{\varepsilon}\left[\cos(\tau_2 + \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{\sqrt{2}}\right]} d\tau_2 =$$

$$= e^{\frac{u(t_1,t_2)}{\varepsilon}} \int\limits_{-\pi/4}^{0} e^{-\frac{\sqrt{2}cht_0}{\varepsilon}\left[\cos(\tau_2 + \frac{\pi}{4}) - \cos(\frac{\pi}{4})\right]} d\tau_2 = e^{\frac{u(t_1,t_2)}{\varepsilon}} \int\limits_{-\pi/4}^{0} e^{-\frac{\sqrt{2}cht_0}{\varepsilon} \cdot 2\sin\frac{\tau_2}{2}\sin\frac{\tau_2 + \frac{\pi}{2}}{2}} d\tau_2,$$

$\sin x < \frac{2}{\pi}x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ барабарсыздыгын пайдаланып, $\sin\frac{\tau_2}{2}\sin\frac{\tau_2 + \frac{\pi}{2}}{2} \le \frac{\tau_2}{\pi} \cdot \frac{\tau_2 + \frac{\pi}{2}}{\pi}$, $-\frac{\pi}{4} < \tau_2 < 0$ жазып алууга болот. Мындан төмөнкүгө ээ болобуз: $J_1 \le e^{\frac{u(t_1,t_2)}{\varepsilon}} \int\limits_{-\pi/4}^{0} e^{\frac{\sqrt{2}cht_0}{2\varepsilon\pi^2}\tau_2(2\tau_2 + \pi)} d\tau_2 = O(\varepsilon)$. l_2 жолу боюнча эсептейбиз: $\tau_2 = -\frac{\pi}{4}, t_0 \le \tau_1 \le t_1 < -t_0$ болгон учурда $\phi\left(\tau_1, -\frac{\pi}{4}\right)$ функциясын изилдейбиз.

$u(\tau_1,-\frac{\pi}{4}) = c(ch\tau_1 - 1) = c2sh^2\frac{\tau_1}{2}$ болорун жана интервалды эске алуу менен төмөнкүчө баалоо жүргүзүлөт: $J_2 = e^{\frac{u(t_1,t_2)}{\varepsilon}} \int\limits_{-t_0}^{t_1} e^{-\frac{c}{\varepsilon}2sh^2\frac{\tau_1}{2}} d\tau_1 = \left\| \begin{matrix} \exists\beta - const, \beta > 0, \\ \beta\tau_1^2 \le sh^2\frac{\tau_1}{2} \end{matrix} \right\| \le e^{\frac{u(t_1,t_2)}{\varepsilon}} \int\limits_{-t_0}^{t_1} e^{-\frac{2c}{\varepsilon}\beta\tau_1^2} d\tau_1 \le$

$\sqrt{\frac{\varepsilon}{2c\beta}} e^{\frac{u(t_1,t_2)}{\varepsilon}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau_1^2} d\tau_1 = 0\left(\sqrt{\varepsilon}\right)$.

Ал эми $l_3 : \tau_1 = t_1, -\pi/4 \le \tau_2 \le t_2$, болгондо, Лагранждын формуласын пайдаланып төмөнкүнү алабыз: $u(t_1,t_2) - u(t_1,\tau_2) = (t_2,\tau_2)\ u_{t_2}'(\xi) < 0,\ \xi \in (\tau_2, t_2)$,

Мында $u_{t_2}'(\xi) = -\sqrt{2}cht_1 \sin(\xi + \frac{\pi}{4}) < 0$, болгондуктан, интегралды эсептөөдөн төмөнкү баалоону алынат: $J_3 = \int\limits_{-\pi/4}^{t_2} e^{\frac{t_2-\tau_2}{\varepsilon}u_{t_2}'(\xi)} d\tau_2 = \frac{\varepsilon}{-u_{t_2}'(\xi)}\left[1 - e^{\frac{t_2-\pi/4}{\varepsilon}u_{t_2}'(\xi)}\right] = 0(\varepsilon)$.

Интегралдоо жолдорунда жогорку $J(t_1,t_2,\varepsilon)$ функциясы үчүн баалоолордун негизинде төмөнкүнү алабыз: $J(t_1,t_2,\varepsilon) = O(\omega(\varepsilon))$, мында $\omega(\varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon, & t_0 < t \le -t_0 - \alpha(\varepsilon); \\ \sqrt{\varepsilon}, & -t_0 - \alpha(\varepsilon) < t < -t_0. \end{cases}$

Баалоолордун негизинде (1)-(2) маселенин чечими үчүн төмөндөгү баа орун алат:

$$|x(t,\varepsilon)| \le c\omega(t,\varepsilon),$$

мында $c > 0$ – туруктуу сан, $\omega(\varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon, & t_0 < t \le -t_0 - \alpha(\varepsilon); \\ \sqrt{\varepsilon}, & -t_0 - \alpha(\varepsilon) < t < -t_0. \end{cases}$

$\alpha(\varepsilon)$ - монотондуу кемүүчү функция жана $\alpha(0) = 0$.

Теорема далилденди.

Корутунду. Коюлган маселенин чечимин асимптотикалык баалоодо, баштапкы чекитти туруктуу аралыктан тандап алууга жараша изилдөө аймагы өзгөрөт. Комплекстик аймакты чектеген
ийрилер экинчи тартиптеги ийрилер болот. Изилдөөлөрдүн натыйжасында козголгон тендеменин чечими козголбогон тендеменин чечимине умтулары келип чыгат.

Адабияттар:

1. Алыбаев, К.С. Метод линия уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости. [Текст] / К.С. Алыбаев //– Дисс. … д-ра физ. - мат. наук: 01.01.02. – Бишкек. 2001. – 204 с.

2. Абдилазизова, А.А. Асимптотика решения сингулярно возмущенной задачи Коши в случае смены
устойчивости. [Текст] / А.А. Абдилазизова // Евразийское Научное Объединение .– Москва. 2021. – № 7-1 (77). – С. 1-3.

3. Акматов А.А. Сингулярдык козголгон маселенин чечимин изилдөө. [Текст] / А. А. Акматов // Вестник ОшГУ. Ош. №2. – 2021. – С. 26-33.

4. Турсунов, Д.А. Асимптотическое поведение решений сингулярно возмущенных задач в случае смены устойчивости, когда собственные значения имеют n-кратный полюс. [Текст] / Д.А. Турсунов // Дисс. ... канд. физ. - мат. наук: 01.01.02. – Бишкек,2005. – 27 с.