DOI: https://doi.org/10.69722/1694-8211-2024-57-40-48
УДК: 517.968

Сражидинов А., *канд. физ. - мат. наук, профессор*
Srazhidinov.adi@gmail.com
ORCID: 0009-0006-8303-6050
Кызылкийский гуманитарно-педагогический институт БатГУ
г. Кызыл-Кия, Кыргызстан

МЕТОД ПЕРЕХОДА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СВЕРТКИ НА ПРОСТОМ ПРИМЕРЕ

Суть так называемого метода перехода для уравнений свертки состоит в том, что интегральные уравнения первого и второго рода Вольтерра свертки с помощью специального продолжения ядра, решения и свободного члена с отрезка [0,1] на отрезок [0,2] сводится к эквивалентным уравнениям Фредгольма с разностным ядром первого или второго рода, что позволяет к последним применять известную богатую теорию Гильберта-Шмитда о симметричных операторах в гильбертовом пространстве. Все это демонстрируется на частном примере. Для удобства читателю приведена теорема 1 с доказательством, предложенная автором в [1]. Как показывает ниже приведенный пример, для получения достаточного условия непрерывности решения уравнений свертки, необходимо налагать дополнительные требования на правую часть f(t) более жесткие, нежеле ее равномерной сходимости к себе ряда Фурье.

Ключевые слова: *поучительный пример, метод перехода для уравнений свертки, интегральные уравнения I и II рода свертки, интегральные уравнения Фредгольма I и II рода с разностным ядром, теория Гильберта-Шмитда по линейным симметричным операторам в гильбертовом пространстве.*

Сражидинов А., *физ-мат. илимд. канд. профессор*
Srazhidinov.adi@gmail.com
ORCID: 0009-0006-8303-6050
БатМУнун Кызыл-Кыя гуманитар-педагогикалык институту
Кызыл-Кыя ш., Кыргызстан

ТҮЙҮН ТЕҢДЕМЕЛЕРИ ҮЧҮН ӨТМӨК МЕТОДУ ЖӨНӨКӨЙ МИСАЛДА

Түйүн теңдемелери үчүн өтмөк методунун [1] маңызы – Вольтерранын ядросу аргументтердин (t-s тен) көз каранды болгон I же II тектеги теңдемелерин аларга эквиваленттүү болгон Фредгольмдун ядросу |t-s| тен көз каранды болгон теңдемелерине алып өтүүдө баштапкы теңдемедеги ядро, белгисиз чечим жана берилген функция [0,1] аралыгынан

[0,2] аралыгына атайын ыкма менен узартылат. Алынган теңдемеге Гильберт-Шмидттин гильберт мейкиндигиндеги сызыктуу симметриялуу операторлор жөнүндөгү белгилүү теориясы колдонулуп, алгачкы теңдемелер үчүн жыйынтыктар алынган. Алар каралып жаткан макалада жөнөкөй мисал аркылуу түшүндүрүлгөн жана изилдөөчүлөргө ыңгайлуулук үчүн зарыл болгон теорема 1 [1] далилдөөсү менен келтирилди.

Макаладагы мисалдарда көрүнүп тургандай, конволюциялык теңдемелерди чечүүнүн үзгүлтүксүздүгүнүн жетишээрлик шартын алуу үчүн оң жагына f(t) кошумча талаптарды коюу зарыл, алар анын бирдей жакындашуусуна караганда катуураак болоору көрсөтүлгөн.

Түйүндүү сөздөр: *түшүндүрмө мисал, түйүн теңдемелери үчүн өтмөк методу, I же II тектеги интегралдык түйүн тендемелери, ядросу аргументтердин айрымасынын модулунан көз каранды болгон Фредгольмдун I же II тектеги теңдемелери, Гильберт-Шмитдтин гильберт мейкиндигиндеги сызыктуу симметриялуу операторлор жөнүндөгү теориясы.*

Srashidinov A., *cand. of physical-mathem. sciences,*
associate professor, Srazhidinov.adi@gmail.com
ORCID: 0009-0006-8303-6050
Kyzyl-Kiya Humanitarian-Pedagogica Institute
Batken State University,
Kyzyl-Kiya, Kyrgyzstan

TRANSITION METHOD FOR CONVOLUTION EQUATIONS FOR EXAMPLE

The essence of the so-called transition method for convolution equations [1] is that the integral equations of the first and second kind of Volterra convolution with the help of a special continuation of the kernel , solution and free term from the interval [0,1] to the interval [0,2] is reduced to equivalent to the Fredholm equations with a difference kernel of the first or second kind, which allows the well-known rich Hilbert-Schmitt theory of symmetric operators in a Hilbert space to be applied to the latter. All this is demonstrated on a private measurement. For the convenience of the reader, we present Theorem 1 with a proof proposed by the author in [1].

Keywords: *instructive example, Transition method for convolution equations, integral equations of I and II kind of convolution, integral equations Fredholm of the I and II kind with a difference kernel, the Hilbert-Schmitd theory on linear symmetric operators in the Hilbert space.*

Во время обсуждения моего научного доклада на семинаре Института математики НАН Кыргызской Республики мне предложили привести простой поучительный пример, на котором объяснить соответствующие результаты доклада. Исходя из этого, я решил опубликовать этот пример с отражением некоторых затронутых тогда вопросов. Конечно, при этом пришлось повторить определенные результаты доклада.

Материалы и методы исследования. Покажем на примере $\int_0^t \varphi(s)ds = t,\ 0 \le t \le 1$ соответствующие результаты работы. Начнем с рассмотрения того, что справедлива

Лемма 1. Если

$$\lambda\psi(1-t) = \int_0^t \psi(s)ds, 0 \le t \le 1, \psi(0) = 0, \quad (1)$$

то $\psi(t) = 0,\ 0 \le t \le 1.$

Доказательство. При $\lambda=0$ из (1) непосредственно получаем , что $\psi(t)= 0$, значит $\lambda\neq 0$. Уравнение (1) перепишем в виде

$$\lambda\psi(t) = \int_0^{1-t} \psi(s)\, ds, 0 \le t \le 1, \quad (2)$$

т.е. $$\psi(t) = \frac{1}{\lambda}\int_0^{1-t} \psi(s)ds. \quad (3)$$

Откуда

$\psi(t) = \frac{1}{\lambda^2}\int_0^{1-t}\int_0^{1-s}\psi(\sigma)d\sigma ds$. (4)

Из (2) в силу предположения $\psi(0)=0$ находим

$\int_0^1 \psi(s)\, ds = 0.$ (5)

Тогда из (4) имеем $\psi(0) = \frac{1}{\lambda^2}\int_0^1\int_0^{1-s}\psi(\sigma)d\sigma ds$, т.е.

$\int_0^1\int_0^{1-s}\psi(\sigma)d\sigma ds = 0$. (6)

Применяя к (6) формулу Дирихле, находим $\int_0^1\int_\sigma^1\psi(\sigma)dsd\sigma = 0$, т. е.

$\int_0^1(1-\sigma)\psi(\sigma)d\sigma = 0$. (7)

Из (7) в силу (5) следует, что

$\int_0^1 s\psi(s)ds = 0.$ (8)

Как и выше, из (3) и (4) получим

$\psi(t) = \frac{1}{\lambda^3}\int_0^{1-t}\int_0^{1-s}\int_0^{1-\sigma}\psi(\tau)d\tau\, d\sigma ds$ (9)

Полагая t=0, имеем $\int_0^1\int_0^{1-s}\int_0^{1-\sigma}\psi(\tau)d\tau\, d\sigma ds = 0.$ Обозначив

$f(\sigma) = \int_0^{1-\sigma}\varphi(\tau)d\tau,$ (10)

имеем $\int_0^1\int_0^{1-s}f(\sigma)d\sigma ds = 0.$

Откуда меняя местами переменных интегрирования, получаем

$\int_0^1\int_0^{1-s}f(\sigma)dsd\sigma = 0.$ (11)

Отсюда $\int_0^1 f(\sigma)(1-\sigma)d\sigma = 0$, или с учетом (10) -

$\int_0^1\int_0^{1-\sigma}\psi(\tau)d\tau(1-\sigma)d\sigma = 0.$

Поступая, как и выше, получаем

$\int_0^1\int_0^{1-\tau}\psi(\tau)(1-\sigma)d\sigma d\tau = 0,$ $\int_0^1\psi(\tau)\int_0^{1-\sigma}(1-\sigma)\ d\sigma d\tau = 0,$ $-\int_0^1\psi(\tau)\int_0^{1-\tau}(1-\sigma)d(1-\sigma)d\tau = 0,$ $\int_0^1\psi(\tau)\frac{(1-\sigma)^2}{2}\Big|_0^{1-\tau}d\tau = 0,$

$-\int_0^1\psi(\tau)[\frac{\tau^2}{2}-\frac{1}{2}]d\tau = 0.$ Откуда $\int_0^1\psi(\tau)\tau^2 d\tau = 0.$

Итак, если $\Psi(0) = 0$, то $\int_0^1\Psi(s)ds = 0$, $\int_0^1\Psi(s)sds = 0$, $\int_0^1 s^2\Psi(s)ds = 0.$

Далее, можно завершить доказательство по индукции. Действительно из (3) и (9) имеем

$\psi(t) = \frac{1}{\lambda^2}\int_0^{1-t}\int_0^{1-t_1}\int_0^{-t_2}\int_0^{1-t_3}\Psi(\tau)d\tau dt_3 dt_2 dt_1.$ (12)

Отсюда, полагая t=0,

$\int_0^1\int_0^{1-t_1}\int_0^{1-t_2}\int_0^{1-t_3}\Psi(\tau)d\tau dt_2 dt_1 = 0.$ (13)

Обозначив

$f(t_3) = \int_0^{1-t_3}\psi(\tau)d\tau,$ (14)

имеем $\int_0^1\int_0^{1-t_1}\int_0^{1-t_2}f(t_3)dt_3\, dt_2 dt_1 = 0.$

Поменяв местами переменных интегрирования t_2 и t_1, получаем

$\int_0^1\int_0^{1-t_2}[\int_0^{1-t_2}f(t_3)dt_3\,]dt_2 dt_1 = 0,$

$\int_0^1\int_0^{1-t_2}f(t_3)\,dt_3\,(1-t_2)dt_2 = 0,$ (15)

$\int_0^1\int_0^{1-t_2}f(t_3)\,dt_3\,dt_2 - \int_0^1 t_2\int_0^{1-t_2}f(t_3)dt_3 dt_2 = 0.$

Отсюда, с учетом (11) , (12), (13) и (14) последовательно имеем:

$\int_0^1 \int_0^{1-t_2} \int_0^{1-t_3} \Psi(\tau)d\tau dt_3 dt_2$ - $\int_0^1 t_2 \int_0^{1-t_2} f(t_3)dt_3 dt_2 = 0$,

$\int_0^1 \int_0^{1-t_2} t_2 f(t_3) dt_2 dt_3 = 0$, $\int_0^1 f(t_3) \int_0^{1-t_3} t_2 dt_2 dt_3 = 0$, $\int_0^1 f(t_3)\frac{(1-t_3)^2}{2} dt_3 = 0$.

Откуда в силу обозначения (14)

$\int_0^1 \int_0^{1-t_3} \Psi(\tau)d\tau \frac{(1-t_3)^2}{2} dt_3 = 0$.

На этот раз переставив местами переменных интегрирования τ и t_3, получаем

$\int_0^1 \int_0^{1-\tau} \frac{(1-t_3)^2}{2} dt_3 \Psi(\tau)\, d\tau = 0$.

Итак, (15) тоже установлено. Далее, поступая аналогично (8), можно при любом натуральном n получить $\int_0^1 s^{n-1}\psi(s)ds = 0$, n=1,2,....

Так как $\Psi(t)$ непрерывна на [0,1], то отсюда $\int_0^1 \psi^2(s) = 0$,

следовательно, $\psi(t) = 0$, $0 \le t \le 1$.

Тем самым единственность решения уравнения (1), обращающего в нуль при t=0, доказана для всех λ.

Действительно, если при данном λ уравнение (1) имеет два ненулевых решения, то постоянные c_1, c_2 в сумме

$c_1\psi_1(t)+c_2\psi_2(t)$ могли бы выбрать так , чтобы $c_1\psi_1(0)+c_2\psi_2(0) = 0$.

Отсюда $\psi_1(t) = c\psi_2(t)$ лемма доказана.

Результаты и обсуждения. Теперь покажем, что уравнение (1) только при указанных ниже же значениях m_n имеет ненулевые решения, причем их можно описать следующим образом:

$\varphi_n(t) = c \sin m_n (1- t)$, где $m_n = \frac{\pi}{2} + n\pi$, n=0,1,2,.., c- любая постоянная.

Ищем решения уравнения (1) в виде

$\varphi(t) = \sin m (1- t)$, (16)

где m - пока неопределенный параметр. Из (16) находим

$\varphi'(t) = - m \cos m(1 - t)$, $\varphi'(1 - t) = - m \cos m$. (17)

Так как

$\lambda\varphi'(1-t) + \varphi(t) = 0$, (18)

$\sin m (1- t) = \sin m \cos mt - \sin mt \cos m$, (19)

то подставляя (16), (17) и (19) в (18) получаем

$\sin m(1-t) - \lambda m \cos mt = 0$, т.е.

$-\lambda m \cos mt + \sin m \cos mt - \sin mt \cos m = 0$.

Собирая коэффициенты при cos mt и sin mt, получаем

$(-\lambda m + \sin m) \cos mt - \cos m \sin mt = 0$.

Приравнивая их коэффициенты к нулю, находим

$\begin{cases} \cos m = 0, \\ -\lambda m + sinm = 0, \end{cases} \begin{cases} m = \frac{\pi}{2} + n\pi, \\ \lambda m = (-1)^n, \end{cases}$ n =0,$\pm 1, \pm 2, \pm, \ldots$,

$$\begin{cases} m = \frac{\pi}{2} + n\pi \\ \lambda = \frac{(-1)^n}{\frac{\pi}{2}+n\pi} \end{cases} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm, \ldots. \qquad (20)$$

Теперь покажем, что можно считать n =0,1, 2, ...

Действительно, при n =0,1, 2, ... получаем, что

$m_0 = \frac{\pi}{2}$, $\lambda_0 = \frac{1}{\pi/2}$; $m_1 = \frac{3\pi}{2}$, $\lambda_1 = -\frac{1}{3\pi/2}$; $m_2 = \frac{5\pi}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1}{5\pi/2}$; $m_3 = \frac{7\pi}{2}$, $\lambda_3 = -\frac{1}{7\pi/2}$, ... (21)

Аналогично находим

$m_{-1} = -\frac{\pi}{2}$, $\lambda_{-1} = -\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)-\pi} = \frac{1}{\pi/2}$; $m_{-2} = -\frac{3\pi}{2}$, $\lambda_{-2} = -\frac{1}{3\pi/2}$; $m_{-3} = -\frac{5\pi}{2}$, $\lambda_{-3} = \frac{1}{5\pi/2}$, ...

Итак, мы убедились в том, что при положительных целых n получаем, что

$\lambda_n = \lambda_{-n-1}$, $m_n = -m_{-n-1}$, а с другой стороны наше решение sin m(1- t) является относительно m нечетной функцией. Поэтому из первой системы (20) можно заключить, что если при параметре m функция sin m(1- t) решение уравнения (1) , то при параметре –m, функция sin(- m(1- t)) также является решением того же уравнения (1) при постоянной c = -1, c sin m(1-t). Поэтому мы можем ограничиться случаем, когда n =0,1, 2, ...

Итак, в случае (21) приведены собственные числа

$\lambda_0 = \frac{2}{\pi}$, $\lambda_1 = -\frac{2}{3\pi}$, $\lambda_{-2} = \frac{2}{5\pi}$, ... $\lambda_n = \frac{(-1)^n}{n\pi+\pi/2}$

$m_0 = \frac{\pi}{2}$, ; $m_1 = \frac{3\pi}{2}$, ; $m_2 = \frac{5\pi}{2}$, ... $m_n = \frac{(2n+1)\pi}{2}$, m=0,1,.... (22)

Ряд (22) определяет собственные функции:

$\varphi_0(t) = \sin\frac{\pi}{2}(1-t)$, $\varphi_1(t) = \sin\frac{3\pi}{2}(1-t)$,.... Учитывая, что

$$\int_0^1 \sin^2 m(1-t)dt = \int_0^1 \sin^2 mt\,dt = \int_0^1 \frac{1-\cos 2mt}{2}dt = \frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{\cos 2mt}{2}dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{4m}\int_0^1 d\sin 2mt = \frac{1}{2} - \frac{1}{4m}[\sin 2m - 0] = \frac{1}{2} - \frac{1}{4m}2\sin m\cos m = \frac{1}{2}.$$

Мы учли, что *cos m=0.* Поэтому нормированными собственными функциями будут

$\varphi_n(t) = \sqrt{2}\sin m_n(1-t)$, n =0,1,2, ... (23)

Теперь покажем ортонормированность системы (23). Обозначим p и q два различных значения параметра m из (23), т.е.

$p = (2k_1+1)\pi/2$, $q = (2k_2+1)\pi/2$, $k_1 \neq k_2$, (24)

где k_1 и k_2 – неотрицательные целые числа.

Покажем ортогональность функций sin p(1- t), sin q(1- t). Имеем

$$2\int_0^1 \sin p(1-t)\sin q(1-t)dt = 2\int_0^1 \sin pt\sin qt\,dt = \int_0^1[\cos(p-q)t - \cos(p+q)t]dt = \frac{\sin(p-q)}{p-q} - \frac{\sin(p+q)}{p+q},$$ т.е.

$$2\int_0^1 \sin p(1-t)\sin q(1-t)dt = \frac{\sin(p-q)}{p-q} - \frac{\sin(p+q)}{p+q}. \quad (25)$$

Из (24) находим $p - q = (k_1-k_2)\pi$, $p+q = (2(k_1+k_2)+2)\pi/2 = (k_1+k_2+1)\pi$.

Так как k_1, k_2 – целые числа, то

$\sin(p-q) = 0$, $\sin(p+q) = 0$. (26)

Из (25) в силу (26) получаем $\int_0^1 \sin p(1-t)\sin q(1-t)\,dt = 0$,

т.е. ортогональность системы (23) установлена. Так что система (23) - ортонормированная система собственных функций уравнения (1). Теперь мы докажем, что система (23) определяет всю совокупность собственных функций. Сначала установим следующий факт. Обозначим

$$\omega(t) = \begin{cases} 0, 0 \le t \le 1, \\ 1, 1 < t \le 2, \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} \varphi(t), 0 \le t \le 1, \\ \varphi(2-t), 1 < t \le 2, \end{cases} \qquad z(t) = \begin{cases} \varphi(t), 0 \le t \le 1, \\ -\varphi(2-t), 1 < t \le 2 \end{cases} \quad (27)$$

Тогда между уравнениями

$\lambda\varphi(1-t) = \int_0^t \varphi(s)ds, 0 \le t \le 1,$ (28)

$\mu y(t) = \int_0^2 \omega(|t-s|\,y(s)ds, 0 \le t \le 2,$ (29)

существует следующая связь: Любая собственная функция (28), продолженная по формуле (27) является собственной функцией уравнения (29). Этот факт проверяется непосредственно. Далее, любое решение уравнения (29), без ограничения общности, можно считать либо четное на [0,2] решение, т.е. y(t)= y(2-t),$0 \le t \le 2$, либо нечетное на [0,2] решение, т.е. z(t) = -z (2- t), $0 \le t \le 2$.

Далее, также доказывается и, наоборот, сужение любого уравнения (29) является решением уравнения (28). Каждому собственному значению λ уравнения (28) соответствуют значения λ и -λ такие, что первому из них соответствует четно продолженное с [0,1] на [0,2] решение, а второму собственному значению (-λ) соответствует собственная функция уравнения (28), продолженная нечетно с [0,1] на [0,2]. И, наоборот, каждое собственное значение уравнения (29) имеет кратность 2. Это собственное значение является простым собственным значением уравнения (28).

Теперь используем известные факты из теории Гильберта-Шмидта [3,4]. Рассмотрим симметричное L_2–ядро K(t,s) при $a \le t \le b,\ a \le s \le b$, тогда имеет место разложение

$K(t,s) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i\, \varphi_i(t)\, \varphi_i(s).$ (30)

Это разложение называется билинейным разложением ядра K(t,s) по его собственным функциям и числам. Возводя обе части (30) в квадрат и интегрируя результат по t и по s, получим $\int_a^b \int_a^b |\, K(t,s)\, |^2 dtds = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2$, λ_i - собственные значения .

В нашем случае, мы находим $\int_0^2 \int_0^2 \omega^2\,(|t-s|)dsdt = \int_0^1 \int_0^2 \omega^2\,(|t-s|)dsdt + \int_1^2 \int_0^2 \omega^2\,(|t-s|)dsdt = \int_0^1 \int_{t+1}^2 dsdt + \int_1^2 \int_0^{t-1} dsdt = \int_0^1 (2-t-1)dt + \int_1^2 (t-1)dt = 1$,

т.е. $\int_0^2 \int_0^2 \omega^2\,(|t-s|)dsdt = 1$.

Обозначим $\sigma = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i^2$, где λ_i – собственные значения уравнения (28), найденные нами выше, т.е.

$\lambda_0 = \frac{2}{\pi},\ \ \lambda_1 = -\frac{2}{3\pi},\ \ \lambda_{-2} = \frac{2}{5\pi},\ \dots\ \lambda_n = \frac{(-1)^n}{n\pi + \pi/2}\ \dots.$ (31)

Мы покажем, что удвоенная сумма удовлетворяет равенству

$2\sigma = 1.$ (32)

Тем самым будет доказана, что ряд (31) исчерпывает все собственные числа уравнения (28). Итак,

$2\sigma = 2\,(2/\pi)^2 + 2\,(2/3\pi)^2 + 2\,(2/5\pi)^2 + \dots = 2\,(2/\pi)^2[1 + 1/3^2 + 1/5^2 + \dots]$,

откуда $(\pi^2/16)\, 2\sigma = 1 + 1/3^2 + 1/5^2 + \dots$

Однако сумма в правой части последнего равенства равна $\pi^2/8$. Поэтому равенство (32) имеет место. Итак, (31) определяет весь набор собственных значений, а им отвечающей системой собственных функций является система (23). Поскольку в нашем примере $\int_0^t \varphi(s)ds = t,\ 0 \le t \le 1$, функция f(t)=t является сверткой функций *a(t)=1* и *φ(t)=1* то она (свертка) разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям (23) , т.е.

$t = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\ \sqrt{2} \sin m_n t,\ 0 \le t \le 1,$ (33)

где

$f_n = \sqrt{2} \int_0^1 s \sin m_n (1-s)\, ds$, n=0,1,2,… .

Докажем равномерную сходимость ряда (33).

Лемма 2. Пусть в свертке

$\int_0^t a(t-s)\varphi(s)ds = f(t),\ 0 \le t \le 1,$ (34)

функции *a(t)* и $\varphi(t)$ из L2[0,1]. Тогда их свертка (33) непрерывна на [0,1].

Доказательство. Пусть в свертке (34) функции *a(t)* и $\varphi(t)$ из L2[0,1]. Тогда их свертка (34) будет непрерывной на [0,1] . Действительно, пусть

$\int_0^t a(t-s)\varphi(s)ds = f(t),\ 0 \le t \le 1.$ Выбераем последовательность $\{\varphi_i(t)\}$ из C[0,1] такая , что $\| \varphi_n(t) - \varphi(t) \| \to 0$ в среднем при $n \to \infty$.

Пусть $f_n(t) = \int_0^t a(t-s)\varphi_n(s)ds, 0 \le t \le 1$. Очевидно , что последняя функция будет непрерывной на [0,1] . Далее, имеем

$$\left| f(t) - f_n(t) \right| \le \int_0^t | a(t-s)(\varphi(s) - \varphi_n(s)) | ds \le \left(\int_0^t a^2(s)ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t (\varphi_n(s) - \varphi(s))^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \le \| a \| \| \varphi_n - \varphi \|,$$ т. е.

$$\left| f(t) - f_n(t) \right| \le \| a \| \| \varphi_n - \varphi \|, 0 \le t \le 1. \qquad (35)$$

Так как правая часть (35) независимо от $t \in [0,1]$ стремиться к нулю при $n \to \infty$, поэтому из (35) заключаем, что f(t) также непрерывно. Лемма доказана.

Для истокообразной [3] функции (33) справедливо утверждение, напоминающее классическую теорему Гильберта – Шмидта.

Теорема 1. Пусть в свертке (34) функций *a(t)* и $\varphi(t)$ из L2[0,1]. Тогда разложение свертки в ряд Фурье по системе $\{\varphi_i(1-t)\}$ равномерно на [0,1] сходится к функции свертки (34), т.е. ряд

$\sum_{i=0}^{\infty} f_i\ \varphi_i(1-t),\ t \in [0,1]$,$f_i = \int_0^1 f(s)\varphi_i(1-s)ds$,

равномерно сходится к функции $f(t)$, где $\{\varphi_i(t\}$ – ортонормированная система решений уравнения

$\lambda_i\varphi_i(1-t) = \int_0^t a(t-s)\varphi_i(s)\,ds,\ 0 \le t \le 1.$

Доказательство. Пусть в свертке (34) функции *a(t)* и $\varphi(t)$ из L2[0,1]. Тогда их свертка (34) в силу леммы 2 непрерывна на [0,1]. Разложим функцию φ(t) из (34) в ряд Фурье, т.е.

$$\varphi(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i\ \varphi_i(t) + \varphi_0(t), 0 \le t \le 1, \qquad (36)$$

где φ_i - коэффициенты Фурье функции $\varphi(t)$, а $\psi_0(t)$ – решение уравнения

$\int_0^t a(t-s)\psi_0(s)ds = 0,\ 0 \le t \le 1.$

Далее, подставляя разложения (35) в левую часть (33), в пространстве L2[0,1] имеем

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i\ \varphi_i\ \varphi_i(1-t),\ 0 \le t \le 1. \qquad (37)$$

Теперь покажем , что правая часть (37) равномерно сходится на [0,1] к функции *f(t)*. Так как

$f_i = \int_0^1 f(s)\varphi_i(1-s)ds$, i=1,2,... , то

$f_i = \int_0^1 f(s)\varphi_i(1-s)ds = \int_0^1 \int_0^t a(t-s)\varphi(s)ds\varphi_i(1-t)dt = \int_0^1 \int_s^t a(t-s)\varphi(s)\varphi_i(1-t)dsdt = \int_0^1 \varphi(s) \int_s^1 a(t-s)\varphi_i(1-t)dtds = \int_0^1 \varphi(s) \int_0^{1-s} a(\sigma)\varphi_i(1-s-\sigma)d\sigma ds = \int_0^1 \varphi(s) \int_0^{1-s} a(1-s-\sigma)\varphi_i(\sigma)d\sigma ds = \lambda_i \int_0^1 \varphi(s)\varphi_i(s)ds$, т.е.

$$f_i = \lambda_i\ \varphi_i,\ \ i=1,2,..., \qquad (38)$$

где φ_i – коэффициенты Фурье функции $\varphi(t)$ в разложении (35). Положим

$$S_N(t) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i\ \varphi_i\ \varphi_i(1-t),\ \ ,\ 0 \le t \le 1. \qquad (39)$$

Функция $S_N(t)$ также в силу леммы 2 непрерывна на [0,1] . Тогда с учетом (36)-(39) последовательно имеем

|f(t)- S_N(t)| = $|\int_0^t a(t-s)\varphi(s)ds - \sum_0^N \varphi_i \int_0^t a(t-s)\varphi_i$(s)ds| = $|\int_0^t a(t-s)(\varphi(t) - \psi_0$(s))ds − $\sum_0^N \varphi_i \int_0^t a(t-s)\varphi_i$(s)ds| = $|\int_0^t a(t-s)\sum_{i=0}^{\infty}\varphi_i$φ(s)ds − $\int_0^t a(t-s)\sum_{i=0}^{N}\varphi_i\,\varphi_i$(s)ds| = $|\int_0^t a(t-s)\sum_0^{\infty}\varphi_i$φ(s)≤ $\int_0^1$ | $a(t-s)\sum_{N+1}^{\infty}\varphi_i$φ(s)ds|≤

$\| a \|\ [\int_0^1(\sum_{N+1}^{\infty}\varphi_i\varphi(s))^2\, ds]^{1/2} \le \| a \|\ (\sum_{i=N+1}^{\infty}\varphi_i^2)^{1/2}$, т.е.

|f(t) - S_N(t)|≤$\| a \|\ (\sum_{i=N+1}^{\infty}\varphi_i^2)^{1/2}$, t∈ [0,1]. (40)

Далее, так как ряд $\sum_{i=0}^{\infty}\varphi_i^{\,2}$ сходится, то правая часть неравенства (40) стремится к нулю при N→ ∞. Следовательно, частичная сумма (39) равномерно стремится к функции f(t) на [0,1]. Теорема доказана.

Разложение (37) с учетом равенств (38) можно представить в виде

$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i\, \varphi_i(1-t),\ 0 \le t \le 1.$

Теперь возвращаемся к примеру

$\int_0^t \varphi(s)ds = t,\ 0 \le t \le 1.$ (41)

Правая часть f(t) = t , $0 \le t \le 1$ является сверткой функций *a(t)=1* и *φ(t) = 1.* Поэтому правая часть (41) в силу теоремы 1 разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям уравнения $\lambda_i\varphi_i$(1- t) = $\int_0^t a(t-s)\varphi_i$(s) ds, 0≤ $t \le 1$, а в нашем случае $\lambda_i\varphi_i$(1-t) = $\int_0^t \varphi_i$(s) ds, 0≤ $t \le 1$. Выше было показано, что φ_n(1- t) = $\sqrt{2}$sin m_nt, 0≤ $t \le 1$, а числа m_n определены равенствами (21). Так что имеет место разложение

$t = \sum_{i=0}^{\infty} f_i\, \varphi_i(1-t),\ 0 \le t \le 1,$

где $f_i = \int_0^1 f(s)\varphi_i$(1- s)ds= $\sqrt{2}\ \int_0^1 s \sin m_i$ sds , i=0,1,2,....

Действительно, в этом случае находим $f_i = \frac{(-1)^i}{m_i^2}\sqrt{2}$, i =0,1,..... Покажем, равномерную сходимость ряда

t=2 $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{m_i^2}sinm_i$t , $0 \le t \le 1.$ (42)

Так как правая часть ряда (41) абсолютно и равномерно сходится на [0,1]. Так что правая часть (41) непрерывная функция, а его левая часть, очевидно, непрерывна на [0,1]. Из общей теории Гильберта – Шмидта [3,4] следует, что ряд (42) имеет место в пространстве L_2[0,1]. Поэтому из непрерывности левой и правой частей заключаем, что ряд (42) имеет место в пространстве C[0,1]. Для интереса, проверим (42) при t=0 и при t=1. Первый случай очевиден. Полагая в (42) t=1, получаем

L= 2$\sum_{i=0}^{\infty} 1/m_i^2$ (43)

Заметим, что sinm_i = $(-1)^i$, i = 0, 1, 2,....

Если покажем, что L=1, то (42) справедливо при $t = 1$, из (43) получаем

L/2 = $\sum_{n=0}^{\infty} 1/m_n^2$.

Так как m_0= $\pi/2$, m_1= $3\pi/2$, m_2= $5\pi/2$,…, то

$\sum_{n=0}^{\infty} 1/m_n^2$= $(2/\pi)^2$(1+ 1/3^2+1/5^2+…). Поскольку известно, что [5, С.263].

π^2/8= 1+ 1/3^2+1/5^2+…, то L/2=$\frac{4}{\pi^2}\frac{\pi^2}{8}$, т.е. L = 1.

Значит, равенство (41) справедливо и при t = 1.

Выводы. Как показывает приведенный пример, для получения достаточного условия непрерывности решения уравнений свертки, необходимо налагать дополнительные требования на правую часть f(t) более жесткие, нежеле ее равномерной сходимости к себе ряда Фурье.

Литература:

1. Сражидинов, А. Метод перехода для уравнения свертки и некоторые его применения // Изв. вузов Кыргызстана -2021. №3. -С.14-22.
2. Сражидинов, А. Метод перехода для уравнения свертки и некоторые его применения. // II Тезисы докл. V Международ. научно-практич. конф. ИННОВАЦИИ. ИНТЕЛЕКТ. КУЛЬТУРА 22 апреля 2022 г. -Тюмен: Тюмен. инд.унив. 2022 - С. 188-192.
3. Петровский, И. Г. Лекции по теории интегральных уравнений. - М.: ФИЗ.МАТ.ЛИТ., 2009. -136 с.
4. Колмогоров, А. Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа: Учеб. для мат. спец. ун-тов, -3-е изд., перераб. - М.: Наука, 1972. - 496 с.
5. Минорский, В. П.//Сборник задач по высшей математике. - М.: Наука, 1977, - 344 с.