УДК: 517.9

Алымбаев А. Т., докт. физ.-мат. наук, профессор,
КГУ им. И. Арабаева
Бапа кызы А., ст. преподаватель
ИГУ им. К. Тыныстанова, Кыргызстан

СУЩЕСТВОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА. МЕТОД ФУНКЦИИ ГРИНА

В статье рассматривается задача построения и установления существования периодического решения квазилинейного дифференциального уравнения второго порядка. На основе функции Грина дифференциальное уравнение сводится к интегральному, и его решение находится методом последовательных приближений. Доказана сходимость приближений к решению интегрального уравнения и его единственность. Оценена погрешность разности между точным решением и приближенным решением, полученной методом Галеркина интегрального уравнения.

Ключевые слова: *метод Грина, периодическое решение квазилинейного дифференциального уравнения второго порядка, существование решения, метод Галеркина, мера погрешности.*

Алымбаев А. Т., физ.-мат. илимд. докт., профессор,
И. Арабаев ат. КМУ
Бапа кызы А., ага окутуучу
К. Тыныстанов ат. ЫМУ, Кыргызстан

ЭКИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕНИН МЕЗГИЛДИК ЧЫГАРЫЛЫШЫНЫН БОЛУШУ. ГРИН ФУНКЦИЯСЫНЫН МЕТОДУ

Макалада Гриндин методун колдонуп экинчи тартиптеги квазисызыктуу дифференциалдык теңдеменин мезгилдик чыгарылышынын болушун далилдөө жана аны түзүү маселеси каралат. Гриндин функциясынын негизинде, дифференциалдык теңдеме интегралдык теңдемеге келтирилип, анын чыгарылышы удаалаш жакындаштыруу ыкмасы менен изделет. Интегралдык теңдеменин мезгилдик чыгарылышынын жалгыздыгы далилденет жана так чыгарылыш жана Галеркиндин методу менен табылган жакындаштырылган чыгарылыштын ортосундагы айырманын ченинин өлчөмү аныкталат.

Өзөктүү сөздөр: *Гриндин методу, экинчи тартиптеги квазисызыктуу дифференциалдык теңдеменин мезгилдик чыгарылышы, чыгарылыштын болушу, Галеркиндин методу, катанын өлчөмү.*

Alymbaev A. T., doctor of physics and mathematics
of science, professor, KGU I. Arabaeva
Bapa kyzy Ainura senior teacher
IGU K. Tynystanov,
Kyrgyzstan

THE EXISTENCE OF A PERIODIC SOLUTION OF A SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATION. GREEN'S FUNCTION METHOD

The article deals with the problem of constructing and establishing the existence of a periodic solution to a second-order quasilinear differential equation. Based on the Green's function, the differential equation is reduced to an integral one, and its solution is found by the method of successive approximations. The convergence of approximations to the solution of the integral equation and its uniqueness are proved. The error of the difference between the exact solution and the approximate solution obtained by the Galerkin method of the integral equation is estimated.

Keywords. *Green's method, periodic solution of a second-order quasilinear differential equation, existence of a solution, Galerkin's method, measure of error.*

Через $C^r(\mathcal{T}\times\mathcal{D})$ обозначим пространство r раз непрерывно дифференцируемых относительно $(t,x)\in\mathcal{T}\times\mathcal{D}$ функций $f(t,x)$, периодических по t с периодом 2π, где $\mathcal{T}=[0,2\pi]$, $\mathcal{D}$ некоторая ограниченная область в $t\in(-\infty,+\infty)$. Для элементов этого пространства введем норму:

$$|f|_0=\max_{\mathcal{T}\times\mathcal{D}}\|f(t,x)\|,\qquad \|f\|_0=\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|f\|^2dt\right|^{\frac{1}{2}}.$$

Рассмотрим квазилинейную дифференциальную уравнению второго порядка вида

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}=Ax(t)+f\big(t,x(t)\big)\quad, \tag{1}$$

где A-вещественное число, $f(t,x)$ 2π-периодическое по t функция.

Периодическое решение уравнения (1) ищем в виде

$$x_m(t)=a_0+\sqrt{2}\sum_{n=1}^{m}(a_k cosk\varphi+b_k sink\varphi)\,, \tag{2}$$

коэффициенты которого находим из системы уравнений

$$\frac{d^2x_m(t)}{dt^2}=Ax_m(t)+S_mf\big(t,x_m(t)\big), \tag{3}$$

где

$$S_mf\big(t,x_m(t)\big)=A_0^{(m)}+\sqrt{2}\sum_{k=1}^{m}\Big(A_k^{(m)}coskt+B_k^{(m)}sinkt\Big),$$

$$A_0^{(m)}=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}f\big(t,x_m(t)\big)\,dt,$$

$$A_k^{(m)}=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}f\big(t,x_m(t)\big)coskt\,dt\;,\qquad B_k^{(m)}=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}f\big(t,x_m(t)\big)\,sinktdt.$$

В работе [3] доказано утверждение, если система имеет 2π-периодическое решение $\hat{x}(t)$, то для всех достаточно больших m приближения Галеркина (2) существуют и равномерно сходятся при $m\to\infty$ к точному периодическому решению $\hat{x}(t)$.

В данной работе определяем условии, при выполнении которых из существования приближения Галеркина (2) любого порядка $m \geq m_0$, следует существование периодического решения дифференциального уравнения (1). Эту задачу решаем методом функции Грина.

Построим функцию Грина, для уравнения (1) такая, что решение уравнения (1) ограничено при $t \in (-\infty, +\infty)$ [4].

Находим частные решения уравнения $x^4(t) - Ax(t) = 0$.

Образуем характеристическое уравнение $\lambda^2 - A = 0$ и решая находим корни $\lambda_1 = \sqrt{A}$, $\lambda_2 = -\sqrt{A}$. Отсюда следует две частных решений

$x_1(t) = e^{\sqrt{A}t}$ которая ограничена при $t \to -\infty$ и функция $x_2(t) = e^{-\sqrt{A}t}$ ограничена при $t \to \infty$.

Функцию Грина ищем в виде

$$G(t,s) = \begin{cases} \varphi(s)e^{\sqrt{A}t}, & -\infty < t \leq s, \\ \psi(s)e^{-\sqrt{A}t}, & s \leq t < +\infty. \end{cases} \tag{4}$$

Определяя функции $\varphi(s), \psi(s)$ из условий:

$$G(t,t+0) - G(t,t-0) = 0, \quad G'_t(t,t+0) - G'_t(t,t-0) = 1, \tag{5}$$

Отсюда имеем

$$\begin{cases} \psi(t)e^{-\sqrt{A}t} - \varphi(t)e^{\sqrt{A}t} = 0, \\ -\sqrt{A}\psi(t)e^{-\sqrt{A}t} - \sqrt{A}\varphi(t)e^{\sqrt{A}t} = 1. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим

$$\psi(t) = -\frac{e^{\sqrt{A}t}}{2\sqrt{A}}, \quad \varphi(t) = -\frac{e^{-\sqrt{A}t}}{2\sqrt{A}}. \tag{6}$$

Поставляя (4) в (2), получим функцию Грина.

$$G(t,s) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\sqrt{A}} e^{\sqrt{A}(t-s)}, & -\infty < t \leq s, \\ -\dfrac{1}{2\sqrt{A}} e^{\sqrt{A}(s-t)}, & s \leq t < +\infty. \end{cases} \tag{7}$$

Покажем, что функция Грина удовлетворяет уравнению $G_{tt} - AG = 0$.

Вычислим

$$G_t(t,s) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} e^{\sqrt{A}(t-s)}, & -\infty < t \leq s, \\ -\dfrac{1}{2} e^{\sqrt{A}(s-t)}, & s \leq t < +\infty. \end{cases}$$

$$G_{tt}(t,s) = \begin{cases} -\dfrac{\sqrt{A}}{2} e^{\sqrt{A}(t-s)}, & -\infty < t \leq s, \\ -\dfrac{\sqrt{A}}{2} e^{\sqrt{A}(s-t)}, & s \leq t < +\infty. \end{cases}$$

Отсюда имеем

$$G_{tt}(s,t)-AG(t,s)=\begin{cases}-\frac{\sqrt{A}}{2}e^{\sqrt{A}(t-s)}+\frac{\sqrt{A}}{2}e^{\sqrt{A}(t-s)}=0, & -\infty<t\le s,\\ -\frac{\sqrt{A}}{2}e^{\sqrt{A}(s-t)}+\frac{\sqrt{A}}{2}e^{\sqrt{A}(s-t)}=0, & s\le t<+\infty.\end{cases}$$

Пусть функция $x=x^0(t)$ решение интегрального уравнения вида

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}G(t,s)f(s,x(s))ds. \qquad (8)$$

Покажем, что функция $x=x^0(t)$ является решением уравнения (1). Представим (8) в виде

$$x(t)=\int_{-\infty}^{t-0}G(t,s)f(s,x(s))ds-\int_{+\infty}^{t+0}G(t,s)f(s,x(s))ds.$$

Отсюда, получим с учетом свойств функции Грина (5).

$$x'(t)=\big(G(t,t-0)-G(t,t+0)\big)f(t,x(t))+\int_{-\infty}^{+\infty}G_t(t,s)f(s,x(s))ds=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}G_t(t,s)f(s,x(s))ds, \qquad (9)$$

$$x''(t)=\big(G_t(t,t-0)-G_t(t,t+0)\big)f(t,x(t))+\int_{-\infty}^{+\infty}G_{tt}(t,s)f(s,x(s))ds=$$

$$=f(t,x(t))+\int_{-\infty}^{+\infty}G_{tt}(t,s)f(s,x(s))ds. \qquad (10)$$

Поставляя (8) -(10) в уравнение (1), получим

$$f(t,x^0(t))+\int_{-\infty}^{+\infty}G_{tt}(t,s)f(s,x^0(s))ds-A\int_{-\infty}^{+\infty}G(t,s)f(s,x^0(s))ds=f(t,x^0(t)),$$

$$f(t,x^0(t))+\int_{-\infty}^{+\infty}[G_{tt}(t,s)-AG(t,s)]f(s,x^0(s))ds=f(t,x^0(t)),$$

$$f(t,x^0(t))=f(t,x^0(t)).$$

Таким образом, утверждение доказано.

Теорема 1. Пусть функция $x=x^0(t)$, является решением уравнения (1) и существует функция Грина вида (2) от ограниченных решений обладающей свойством (4). Тогда функция $x=x^0(t)$, также является решением интегрального уравнения вида (8).

Покажем, что уравнение (6) имеет периодическое решение. Для этого уравнения (8) методом последовательных приближений, приняв за начальное приближение $x_0(t)$ т.е приближение $x_m(t)$ Галеркина достаточно большем m.

$$x_{k+1}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)f\big(s, x_k(s)\big)ds, \qquad x_0(t) = \bar{x}_m(t). \quad k = 0,1,2,\dots \tag{11}$$

Из представления (7) следует оценка

$$\|G(t,s)\| \le Me^{-\lambda(t-s)}, \qquad t,s \in R, \quad t \neq s, \tag{12}$$

где $M = -\frac{1}{2\sqrt{A}}, \quad \lambda = \sqrt{A}.$

Оценим разность $x_1(t) - x_0(t)$, учитывая, что

$$x_0(t) = \bar{x}_m(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)S_m f\big(s, \bar{x}_m(s)\big)ds. \tag{13}$$

Из соотношений (11),(13) получаем равенство

$$x_1(t) - x_0(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)\big[f\big(s,\bar{x}_m(s)\big) - S_m f\big(s,\bar{x}_m(s)\big)\big]ds. \tag{14}$$

Так как, согласно равенству Парсеваля, справедливо равенство

$$f\big(t,\bar{x}_m(t)\big) - S_m f\big(t,\bar{x}_m(t)\big) = \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{k^2}\big[\|A_k\|^2 + \|B_k\|^2\big], \tag{15}$$

где A_k, B_k-коэффициенты ряда Фурье разложения функции $f\big(t,\bar{x}_m(t)\big)$.

Из (15), с учетом неравенства Буняковского-Шварца, получим оценку

$$\big|f\big(t,\bar{x}_m(t)\big) - S_m f\big(t,\bar{x}_m(t)\big)\big|_0 \le \sigma(m)|f|_0, \tag{16}$$

где $\sigma(m) = \left[\frac{2}{(m+1)^4} + \frac{2}{(m+2)^4} + \cdots\right]^{1/2}, \quad \frac{\sqrt{2}}{(m+1)^2} < \sigma(m) < \frac{\sqrt{2}}{m^2}$

вычислим интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda(t-s)}ds = e^{-\lambda t}\int_{-\infty}^{t} e^{\lambda s}ds + e^{\lambda t}\int_{t}^{+\infty} e^{-\lambda s}ds = \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\cdot e^{\lambda t} + \frac{1}{\lambda}e^{\lambda t}\cdot e^{-\lambda t} = \frac{2}{\lambda}.$$

Из равенства (14) получим

$$|x_1(t) - \bar{x}_m(t)|_0 \le \int_{-\infty}^{+\infty} \|G(t,s)\|\big|f\big(s,\bar{x}_m(s)\big) - S_m f\big(s,\bar{x}_m(s)\big)\big|_0 ds.$$

Отсюда, с учетом (14), получим оценку

$$|x_1(t) - \bar{x}_m(t)|_0 \le \sigma(m)|f|_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \|G(t,s)\|ds \le \sigma(m)|f|_0 M \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda(t-s)}ds \le$$

$$\le \frac{2M}{\lambda}\sigma(m)|f|_0. \tag{17}$$

Оценим разность

$$x_{k+1}(t) - x_k(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)\left[f\left(s, x_k(s)\right) - f\left(s, x_{k-1}(s)\right)\right]ds =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s) f_x\left(s, x_k(s) + \theta\left(x_{k-1}(s) - x_k(s)\right)\right)\left(x_k(s) - x_{k-1}(s)\right)ds,$$

$0 \le \theta \le 1, \qquad k = 1,2,3,\ldots$

отсюда получим

$$|\, x_{k+1}(t) - x_k(t)|_0 \le \int_{-\infty}^{+\infty} \|G(t,s)\| |f_x|_0 |x_k(s) - x_{k-1}(s)|_0 ds \le$$

$$\le \frac{2M \cdot |f|_1}{\lambda} \sigma(m) |x_k(t) - x_{k-1}(t)|_0 \qquad \text{при} \;\; k = 1,2,3,\ldots$$

Таким образом, получим оценку

$$|\, x_{k+1}(t) - x_k(t)|_0 \le \frac{2M \cdot |f|_1}{\lambda} |\, x_k(t) - x_{k-1}(t)|_0 \le \left(\frac{2M \cdot |f|_1}{\lambda}\right)^2 |\, x_k(t) - x_{k-2}(t)|_0$$

$$\le \cdots$$

$$\le \left(\frac{2M \cdot |f|_1}{\lambda}\right)^{k-1} |\, x_2(t) - x_1(t)|_0 \le \left(\frac{2M \cdot |f|_1}{\lambda}\right)^{k} |\, x_1(t) - x_0(t)|_0 \le$$

$$\le \left(\frac{2M \cdot |f|_1}{\lambda}\right)^{k} \frac{2M}{\lambda} \sigma(m) |f|_0.$$

Оценим разность $x_{n+k}(t) - x_k(t)$

$$|\, x_{n+k}(t) - x_k(t)|_0 \le |\, x_{n+k+1}(t) - x_{n+k}(t)|_0 + |\, x_{n+k}(t) - x_{n+k-1}(t)|_0 + \cdots$$

$$\ldots + |\, x_{k+2}(t) - x_{k+1}(t)|_0 + |\, x_{k+1}(t) - x_k(t)|_0 \le [q^{n+k} + q^{n+k-1} + \cdots + q^k] \cdot$$

$$\cdot \frac{2M}{\lambda} \sigma(m) \cdot |f|_0, \qquad\qquad q = \frac{2M \cdot |f|_1}{\lambda}.$$

Отсюда, имеем

$$|\, x_{n+k}(t) - x_k(t)|_0 \le q^k(q^n + q^{n-1} + \cdots + 1) \frac{2M}{\lambda} \sigma(m) \cdot |f|_0.$$

Предположим, что $0 < q < 1$, тогда

$$|\, x_{n+k}(t) - x_k(t)|_0 \le q^k(1 + q + q^2 + \cdots + q^k + \cdots) \frac{2M}{\lambda} \sigma(m) \cdot |f|_0 \le$$

$$\le \frac{2M \cdot \sigma(m) \cdot |f|_0 \cdot q^k}{\lambda(1-q)} \tag{18}$$

Переходя к пределу из (16) при $n \to \infty$, получим оценку точности вида

$$|\hat{x}(t) - x_k(t)|_0 \le \frac{2q^2 M\sigma(m) \cdot |f|_0}{\lambda(1-q)} \tag{19}$$

Положив $k = 0$ в (11), получим оценку между точным решением интегрального уравнения (6) и приближенным решением дифференциального уравнения найденного по методу Галеркина вида

$$|\hat{x}(t) - \bar{x}_m(t)|_0 \le \frac{2M\sigma(m)\cdot|f|_0}{\lambda(1-q)}, \qquad \frac{\sqrt{2}}{(m+1)^2} < \sigma(m) < \frac{\sqrt{2}}{m^2}.$$

С учетом, что $\sigma(m) < \frac{\sqrt{2}}{m^2}$, получим оценку

$$|\hat{x}(t) - \bar{x}_m(t)|_0 < \frac{2\sqrt{2}M|f|_0}{\lambda(1-q)m^2}.$$

Отсюда, при $m \to \infty$, следует $\bar{x}_m(t) \to \hat{x}(t)$.

$$G(t+2\pi, s+2\pi) = \begin{cases} -\frac{1}{2\sqrt{A}}e^{\sqrt{A}(t+2\pi-s-2\pi)}, \\ -\frac{1}{2\sqrt{A}}e^{\sqrt{A}(s+2\pi-t-2\pi)}. \end{cases} = \begin{cases} -\frac{1}{2\sqrt{A}}e^{\sqrt{A}(t-s)}, \\ -\frac{1}{2\sqrt{A}}e^{\sqrt{A}(s-t)}. \end{cases} = G(t,s).$$

Докажем, периодическое решение интегрального уравнения (6), с периодом 2π.

$$\hat{x}(t+2\pi) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t+2\pi, s) f\big(s, \hat{x}(s)\big) ds$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} G(t+2\pi, s+2\pi) f\big(s+2\pi, \hat{x}(s+2\pi)\big) ds =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s) f\big(s, \hat{x}(s+2\pi)\big) ds.$$

Отсюда следует, что $\hat{x}(t+2\pi) = \hat{x}(t)$.

Теорема 2. Пусть выполняется условие теоремы 1. Тогда, если выполняется следующее условие $q = \frac{2M\cdot|f|_1}{\lambda} < 1$, то существует 2π-периодическое решение $x = \hat{x}(t)$ интегрального уравнения (8), а вместе с ним и периодическое решение дифференциального уравнения (1).

Литература:

1. Алымбаев А. Т. Численные, численно-аналитические и асимптотические методы исследования краевых задач. – Бишкек, 2004, -175 с.

2. Алымбаев А. Т., Бапа к. А. Периодическое решение системы квазилинейных дифференциальных уравнений. //Известия ВУЗов Кыргызстана, №2, 2022. -С.21-26.

3. Bapa kyzy A. The Galerkin method for constructing solutions to a quasilinear differential equation of the second order. /Вестник института математики НАН КР, №1, 2022, -С.99-108.

4. Урабе М. Метод Галеркина для нелинейных периодических систем. //Механика, №3 (97),1966, -с.3-34.