DOI: https://doi.org/10.69722/1694-8211-2024-57-83-89
УДК: 517.968

Алымбаев А. Т., *физ.-мат. илимд. докт., профессор*
asangul1952@gmail.com
ORCID: 0009-0008-5478-7677
И. Арабаев ат. КМУ, Бишкек ш.
Мусаева Б. М, *окутуучу*
egaiymmusaeva00@gmail.com
ORCID: 0009-0005-8719-5203
И. Абдраимов ат. Кыргыз авиациялык институту
Бишкек ш.
Бапа кызы Айнура, *ага окутуучу, магистр,*
bapakyzya@iksu.kg
ORCID: 0009-0004-0956-407X
К. Тыныстанов ат. ЫМУ, Каракол ш.
Кыргызстан

ЭКИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ТУУНДУСУНА КАРАТА ЧЕЧИЛБЕГЕН ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕ ҮЧҮН ЧЕКТИК МАСЕЛЕНИН ЧЫГАРЫЛЫШЫН КОЛЛОКАЦИЯ-АСИМПТОТИКАЛЫК МЕТОД МЕНЕН ТАБУУ

Кадимки дифференциалдык теңдемелер үчүн чектик маселелер дифференциалдык теңдемелердин жалпы теориясынын бир бөлүмү болуп эсептелет. Чектик маселе Коши маселеден айырмаланып, дифференциалдык чыгарылышы чектик шарты жалгыз чекитте эмес, бир канча чекиттеги шартты канагаттандырышы керек.

Көп кездешүүчү чектик маселелерге эки чекиттик чектик маселени атоого болот. Эки чекиттик маселенин чыгарылышы, маселе каралуучу интервалдын чектик чекиттеринде коюлган шартты канагаттандырышы зарыл. Мындан сырткары эки чектүү чектик маселенин жекече учуру, дифференциалдык теңдеменин теориясынын өтө маанилүү бөлүмү болгон, термелүү кыймылынын теориясын камтыйт.

Макалада экинчи тартиптеги туундусуна карата чечилбеген кичине параметрди камтыган экинчи тартиптеги дифференциалдык теңдеме үчүн чектик маселенин чыгарылышын кичине параметрдин даражасына карата катар түрүндө ажыратуу маселеси каралат. Чектик маселенин чыгарылышы коллокация-асимптотикалык методун алгоритми алкылуу тургузулат. Чектик маселе үчүн сандык маселе каралып, анын кичине параметрге карата ажыратылыштын биринчи эки мүчөсү каралат.

Түйүндүү сөздөр: *туундусуна карата чечилбеген дифференциалдык теңдеме, кичине параметр, коллокация - асимптотикалык метод.*

Алымбаев А. Т., *докт. физ.-мат. наук*
asangul1952@gmail.com
ORCID: 0009-0008-5478-7677
КГУ им. И. Арабаева, г. Бишкек
Мусаева Б. М., *преподаватель*
egaiymmusaeva00@gmail.com
ORCID: 0009-0005-8719-5203
КАИ им. И. Абдраимова, г. Бишкек
Бапа кызы Айнура*, ст. преп., магистр.,*
bapakyzya@iksu.kg
ORCID: 0009-0004-0956-407X
ИГУ им. К. Тыныстанова, г. Каракол
Кыргызстан

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПО МАЛОМУ ПАРАМЕТРУ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА, НЕРАЗРЕШЕННОЙ ОТНОСИТЕЛЬНО СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений является одной из разделов общей теории дифференциальных уравнений. Отличие краевой задачи от задачи Коши в том, что решение дифференциального уравнения должно удовлетворять граничным условиям, связывающим значения искомой функции более чем в одной точке.

Наиболее часто встречающийся краевой задаче относится двухточечные краевые задачи, для которых граничные условия задаются в двух точках на концах интервала, на котором ищется решения. Кроме того, частный случай двухточечных краевых задач охватывает и такой важный раздел теории дифференциальных уравнений, как теория колебаний.

В настоящей статье рассматривается задача построение асимптотического разложения по малому параметру решении краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка неразрешенной относительно старшей производной искомого решения.

Решение краевой задачи находится согласно алгоритму коллокационно-асимптотического метода. Рассмотрен численный пример краевой задачи и построен асимптотическое разложение решение задач относительно малого параметра, включающей в себя первых двух членов разложений.

Ключевые слова: *дифференциальное уравнение неразрешённый относительно производной, малый параметр, коллокационно – асимптотический метод.*

Alymbaev A. T., *doctor of physical and mathem. sciences,*
asangul1952@gmail.com
ORCID: 0009-0008-5478-7677
Kyrgyz State University named after I. Arabaev, Bishkek
Musaeva B. M., *teacher of mathematics,*
Kyrgyz Aviation Institute named afterI. Abdraimov, Bishkek
ORCID: 0009-0005-8719-5203
Bapa kyzy Ainura, *master of physics and mathematics education,*
senior lecturer,bapakyzya@iksu.kg
ORCID:0009-0004-0956-407X
Issyk-Kul State University named after K. Tynystanov, Karakol, Kyrgyzstan.

ASYMPTOTIC SOLUTION WITH RESPECT TO A SMALL PARAMETER OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FORSECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATION UNSOLVED WITH RESPECT TO THE HIGHEST DERIVATIVE

Boundary value problems for ordinary differential equations is one of the sections of the general theory of differential equations. The difference between the boundary value problem and the Cauchy problem is that the solution of the differential equation must satisfy boundary conditions connecting the values of the desired function at more than one point.

The most common boundary value problem refers to two-point boundary value problems for which boundary conditions are set at two points at the ends of the interval on which solutions are being sought. In addition, the special case of two-point boundary value problems also covers such an important section of the theory of differential equations as the theory of oscillations.

In this article, the problem of constructing an asymptotic expansion in a small parameter for solving a boundary value problem for a second-order differential equation of an unresolved relative to the highest derivative of the desired solution is considered. The solution of the boundary value problem is found according to the algorithm of the collocation-asymptotic method. A numerical example of a boundary value problem is considered and an asymptotic decomposition is constructed for solving problems with a relatively small parameter, including the first two terms of the expansions.

Keywords: *The differential equation is unresolvable with respect to the derivative, small parameter, collocation-asymptotic method.*

Киришүү

Дифференциалдык теңдемелер үчүн чектик маселелердин теориясы колдонмо математиканын бөлүктөрүнүн тез өнүгүүчү багытынын бири болуп эсептелет. Кичине оң параметрди кармаган дифференциалдык теңдемелер үчүн чектик маселелердин чыгарылыштарын изилдөө үчүн асимптотикалык ыкмалар кеңири колдонулат. Бул багытта биринчи болуп француз математиги А. Пуанкаре [1] тарабынан иштелип чыккан асимптотикалык ыкманы атаса болот. Азыркы учурда асимптотикалык ыкманын көптөгөн түрлөрү бар. Алардын бири – Н. Н. Боголюбов, Н. А. Митропольский тарабынан иштелип чыккан дифференциалдык теңдемелер үчүн “ортоктоо” (усреднение) асимптотикалык ыкмасы [2]. Дагы бир ыкма - А. А. Андронов жана анын жолун жолдоочу окуучулары тарабынан иштелип чыккан “чектик чагылтуу” ыкма [3].

Изилдөөнүн предмети жана жыйынтыгы

Төмөндөгүдөй чектик маселени карайлы

$y''(x) + \varepsilon F\big(x, y''(x)\big) + a(x)y'(x) = f(x)$(1)

$y(a,\varepsilon) = a_1 + a_2\varepsilon + a_3\varepsilon^2 + \cdots, y(b,\varepsilon) = b_1 + b_2\varepsilon + b_3\varepsilon^2 + \cdots,$ (2)

Мында $F(x,y)$ – аргументтерине карата жогорку тартиптеги туундуга ээ болгон үзгүлтүксүз, $[a,b]$ – кесиндисинде аныкталган функция, $a(x)$ – берилген функция, ал эми $a_1, a_2, a_3, \dots, b_1, b_2, b_3 \dots$. берилген заттык сандар. (1), (2) чектик маселенин чыгарылышын төмөндөгүдөй катар түрүндө издейбиз:

$y(x,\varepsilon) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \cdots.$ (3)

Бул функционалдык катарды (1) теңдемеге коёбуз:

$$y_0''(x) + \varepsilon y_1''(x) + \varepsilon^2 y_2'' + \cdots + \varepsilon F(x, y_0''(x) + \varepsilon y_1'' + \cdots) + a(x)y_0'(x) + \\ + \varepsilon a(x)y_1'(x) + \varepsilon^2 a(x)y_2'(x) + \cdots = f(x)\,. \quad (4)$$

$\phi(\varepsilon)$ – аркылуу төмөндөгүдөй катарды белгилейбиз

$$F(x, y_0''(x) + \varepsilon(x)y_1''(x) + \varepsilon^2(x)y_2''(x) + \cdots) = \phi(\varepsilon) = \\ = \phi(0) + \frac{\phi'(0)}{1!}\varepsilon + \, + \frac{\phi''(0)}{2!}\varepsilon^2 + \cdots. \quad (5)$$

Мында $\phi(0) = F(x, y_0''(x))$,

$$\phi'(\varepsilon) = F'(\varepsilon) = F_u(x,u)(y_1''(x) + 2\varepsilon y_2''(x) + \cdots)$$

$$\phi''(\varepsilon) = F_{uu}(x,u)(y_1''(x) + 2\varepsilon y_2''(x) + \cdots)^2 + F_u(x,u)(2y_2''(x) + \\ + 6\varepsilon y_3''(x) + \cdots).$$

$$\phi'(0) = F_u(x, y_0''(x))y_1''(x), \qquad \phi''(0) = F_{uu}\big(x, y_0''(x)\big)y_1''(x) + \\ + 2F_u(x, y_0''(x))y_2''(x).$$

Бул туютмаларды эске алып, (5) асимптотикалык катарды төмөндөгүдөй түрдө жазабыз:

$$\phi(\varepsilon) = F\big(x, y_0''(x)\big) + F_u\big(x, y_0''(x)\big)y_1''(x)\varepsilon + \big[F_{uu}\big(x, y_0''(x)\big){y_1''}^2(x) + \\ + 2F_u(x, y_0''(x))y_2''(x)\big]\varepsilon^2 + 0(\varepsilon^3). \quad (6)$$

(6) ажыратылыштын негизинде, (4) барабарсыздыктан (3) асимптотикалык катардын коэффициенттерине карата төмөндөгүдөй реккуренттик чектик маселелердин көптүгүн алабыз:

$y_0''(x) + a(x)y_0'(x) = f(x),$ (7_0)

$y_0(a) = a_1,\ y_0(b) = b_1.$ (8_0)

$y_1''(x) + F\big(x, y_0''(x)\big) + a(x)y_1' = 0,$ (7_1)

$y_1(a) = a_2, \quad y_1(b) = b_2.$ (8_1)

$y_2''(x) + F_{uu}\big(x, y_0''(x)\big){y_1''}^2(x) + 2F_u\big(x, y_0''(x)\big)y_2''(x) + a(x)y_2'(x) = 0,$ (7_2)

$y_2(a) = a_3, \quad y_2(b) = b_2$$(8_2)$

(7_0), (8_0) - (7_2), (8_2) чектик маселенин жакындаштырылган чыгарылыштарын коллокация методунун алгоритминин негизинде табабыз.

Коллокация-асимптотикалык методдун төмөндөгүдөй түрдөгү чектик маселенин чыгарылышын табуудагы колдонулушун карайлы:

$y''(x) + \frac{\varepsilon}{x^2}{y''}^2(x) - \frac{1}{x}y'(x) = 3x,$ (9)

$y_1(1,\varepsilon) = 2 + 3\varepsilon + 5\varepsilon^2 + \cdots, \quad y_1(2,\varepsilon) = 9 + 5\varepsilon + 7\varepsilon^2 + \cdots.$ (10)

(9), (10) чектик маселенин чыгарылышын (3) туютманын негизинде издейбиз. Бул учурда $\phi(0), \phi'(0),\ \phi''(0)$ туютмалары

$\phi(0) = y''^2_0(x), \phi'(0) = 2y_0''y_1'', 2y''^2_1 + 4y_0''y_2''.$

(3) ажыратылыштын $y_0(x), y_1(x), y_2(x)$ коэффициенттерине карата төмөндөгүдөй рекуренттик чектик маселелердин системасын алабыз:

$y_0''(x) - \frac{1}{x}y_0'(x) = 3x \quad (11_0)$

$y_0(1) = 2,\ y_0(2) = 9. \quad (12_0)$

$y_1''(x) - \frac{1}{x}y_1'(x) = -\frac{1}{x^2}y_0''(x), \quad (11_1)$

$y_1(1) = 3,\ y_1(2) = 5. \quad (12_1)$

$y_2''(x) - \frac{1}{x}y_2'(x) = -\frac{2}{x^2}y_0''(x)y_1''(x), \quad (11_2)$

$y_2(1) = 5,\ y_2(2) = 7. \quad (12_2)$

(11_0),(12_0) чектик маселенин чыгарылышын $y_0(x) = 7x - 5 + c_1(x - -1)(x - 2) + c_1(x-1)^2(x-2) + c_3(x-1)^3(x-2)$ (13) түрдө издейбиз $y_0(1) = 7 * 1 - 5 = 2,\ (2) = 7 * 2 - 5 = 9$ болгондуктан, (13) туюнтма (12_0) чектик шартты канагаттандыра тургандыгына ынанабыз. (13) туюнтмадан $y_0'(x), y_0''(x)$ туундуларын табабыз.

$y_0'(x) = 7 + c_1(2x-3) + c_2(x-1)(2x-5) + c_3(x-1)^2(4x-7),$ (14)

$y_0''(x) = 2c_1 + c_2(6x-8) + c_3(x-1)(12x-18).$ (15)

(13) алгоритмдеги c_1, c_2, c_3 турактууларды коллокация методунун негизинде табабыз. $[1;2]$ – кесиндинин $x_1 = 1, x_2 = 1{,}5,\ x_3 = 2$ түйүн чекитинде (11_0), (12_0) чектик маселени коллокация методунун алгоритминин [4] негизинде, канаагаттандыргандай кылып тандап алабыз:

$y_0''(x_i) - \frac{1}{x_i}y'(x_i) = 3x_i, \qquad i = 1, 2, 3, 4.$ (16)

(14), (15) туюнтмаларды (16) теңдемеге коебуз. Натыйжада,

$$c_1\left[2 - \frac{2x_i - 3}{x_i}\right] + c_2\left[4x_i - 7 - \frac{(x_i-1)(2x_i-5)}{x_i}\right] + c_3\left[(x_i-1)(12x_i-8) - \right.$$
$$\left. - \frac{(x_i-1)^2(4x_i-7)}{x_i}\right] = 3x_i + \frac{7}{x_i}.$$

Мындан түйүн чекиттердин маанилерин эске алып, c_1, c_2, c_3 турактууларга карата системаны алабыз.

$$3c_1 - 2c_2 + 0c_3 = 10,$$
$$2c_1 + 1{,}17c_2 + 0{,}17c_3 = 9{,}17,$$
$$1{,}5c_1 + 3{,}5c_2 + 5{,}5c_3 = 9{,}5. \ (17)$$

(17) системаны Крамердин методу менен чыгарабыз:

$$c_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad c_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \qquad c_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

Мында

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & 1{,}17 & 0{,}17 \\ 1{,}5 & 3{,}5 & 5{,}5 \end{vmatrix} = 39{,}01$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 10 & -2 & 0 \\ 9{,}17 & 1{,}17 & 0{,}17 \\ 9{,}5 & 3{,}5 & 5{,}5 \end{vmatrix} = 156{,}04$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9{,}17 & 0{,}17 \\ 1{,}5 & 9{,}5 & 5{,}5 \end{vmatrix} = -4{,}77$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 10 \\ 2 & 1{,}17 & 9{,}17 \\ 1{,}5 & 3{,}5 & 9{,}5 \end{vmatrix} = 0$$

$$c_1 = \frac{156{,}04}{39{,}01} = 4, \qquad c_2 = -\frac{4{,}77}{39{,}01} = -0{,}12, \qquad c_3 = \frac{0}{39{,}01} = 0$$

Турактуулардын маанисин (13) туюнтмага коюп, (11_0), (12_0) чектик маселенин чыгарылышын алабыз.

$$y_0(x) = 7x - 5 + 4(x-1)(x-2) - 0{,}12(x-1)^2(x-2). \qquad (18)$$

Мындан

$$y_0'(x) = -5 + 8x - 0{,}24(x-1)(x-2) - 0{,}12(x-1)^2, \qquad (19)$$

$$y_0''(x) = 8 - 0{,}48(x-1) - 0{,}24(x-2). \qquad (20)$$

(11_1), (12_1) чектик маселени карайлы

$$y_1''(x) - \frac{1}{x}y_1'(x) = -\frac{1}{x^2}y_0''(x), \qquad (21)$$

$$y_1(1) = 3, \qquad y_1(2) = 5. \qquad (22)$$

(20) туюнтманын негизинде, (21) теңдемени төмөндөгүдөй түрдө жазабыз:

$$y_1''(x) - \frac{1}{x}y_1'(x) = -\frac{1}{x^2}[8 - 0{,}48(x-1) - 0{,}74(x-2)], \qquad (23)$$

$$y_1(1) = 3, \qquad y_1(2) = 5. \qquad (24)$$

(23), (24) чектик маселенин чыгарылышын

$$y_1(x) = 2x + 1 + c_1(x-1)(x-2) + c_2(x-1)^2(x-2) + c_3(x-1)^3(x--2) (25)$$

түрүндө издейбиз. (25) туюнтмадан $y_1'(x), y_1''(x)$ туундуларды табабыз:

$$y_1'(x) = 2 + c_1(2x-3) + c_2(x-1)(3x-5) + c_3(x-1)^2(4x-7), \qquad (26)$$

$$y_1''(x) = 2c_1 + c_2(6x-8) + c_3(x-1)(12x-18). \qquad (27)$$

(26), (27) туюнтмаларды (27) теңдемеге коебуз:

$$2c_1 + c_2(6x-8) + c_3(x-1)(12x-18) - \frac{2}{x} - \frac{c_1}{x}(2x-3) - \frac{c_2}{x}(x-1)(3x--5)$$

$$-\frac{c_3}{x}(x-1)^2(4x-7) = -\frac{8}{x^2} + \frac{0{,}48}{x^2}(x-1) + \frac{0{,}24}{x^2}(x-2)$$

$$c_1\left[2 - \frac{2x-3}{x}\right] + c_2\left[6x - 8 - -\frac{(x-1)(3x-5)}{x}\right] + c_3\left[(x-1)(12x-18) - \right.$$

$$\left. -\frac{(x-1)^2(4x-7)}{x}\right] = -\frac{8}{x^2} + \frac{0{,}48}{x^2}(x-1) + \frac{0{,}24}{x^2}(x-2). \qquad (28)$$

$c_1,\ c_2,\ c_3$ турактууларды $x_1 = 1,\ x_2 = 1{,}5,\ x_3 = 2$ маанилерди (28) барабардыгына коюп, төмөндөгүдөй системадан табабыз:

$$3c_1 - 2c_2 + 0c_3 = -8{,}24,$$

$$2c_1 + 21{,}17 + 0{,}17c_3 = -3{,}5, \qquad (29)$$

$$1{,}5c_1 + 3{,}5c_2 + 5{,}5c_3 = 1{,}88.$$

$$\Delta = 39{,}01$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -8{,}24 & -2 & 0 \\ -3{,}5 & 1{,}17 & 0{,}17 \\ -1{,}88 & 3{,}5 & 5{,}5 \end{vmatrix} = -53{,}02 + 0{,}6392 + 0 - 0 - 38{,}5 + 4{,}9028 =$$

$$= -85{,}978$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -8{,}24 & 0 \\ 2 & -3{,}5 & 0{,}17 \\ 1{,}5 & -1{,}88 & 5{,}5 \end{vmatrix} = -57{,}75 - 2{,}1012 + 0 - 0 + 90{,}64 + 0{,}9588 =$$

$$= 31{,}75$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -8{,}24 \\ 2 & 1{,}17 & -3{,}5 \\ 1{,}5 & 3{,}5 & -1{,}88 \end{vmatrix} = -6{,}5988 + 10{,}5 - 57{,}68 + 14{,}4612 - 7{,}52 +$$

$+36{,}75 = -10{,}0876.$

$$c_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-85{,}978}{39{,}01} = -2{,}204, \qquad c_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{31{,}75}{39{,}01} = 0{,}814,$$

$$c_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-10{,}0876}{39{,}01} = -0{,}358$$

Табылган сандарды эске алып, (25) туюнтмадан (23), (24) чектик маселенин жакындаштырылган маанисин алабыз:

$y_1(x) = 1 + 2x - 2{,}204(x-1)(x-2) + 0{,}814(x-1)^2(x-2) - 0{,}258(x - -1)^3(x-2)$.(30)

(18), (30) туюнтмаларды эске алып (9), (10) чектик маселенин коллокация-асимптотикалык чыгарылышын жаза алабыз:

$y(x,\varepsilon) = -5 + 7x + 4(x-1)(x-2) - 0{,}12(x-1)^2(x-2) + \varepsilon[1 + 2x - 2{,}204(x-1)(x-2) + 0{,}814(x-1)^2(x-2) - 0{,}258(x-1)^3(x-2)] + +0(\varepsilon^2).$

Адабияттар:

1. Пуанкаре, А. Избранные труды, тт. I, II [Текст] / А. Пуанкаре. - М.: Наука, 1971, 1972. - с. 771; 801.

2. Боголюбов, Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний [Текст] / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. - М.: Физматгиз, 1963. -503 с.

3. Андронов, А. А. Теория колебаний [Текст] / А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. - М.: Физматгиз, 1959. - 915 с.

4. Самойленко, А. М. Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач [Текст] / А. М. Самойленко, Н. И. Ронто. - Киев: Наукова думка, 1986. - 224 с.

5. Алымбаев, А. Т. Численные, численно-аналитические и асимптотические методы исследования краевых задач [Текст] / А. Т. Алымбаев. - Бишкек: Издательство КНУ, 215. - 212 с.