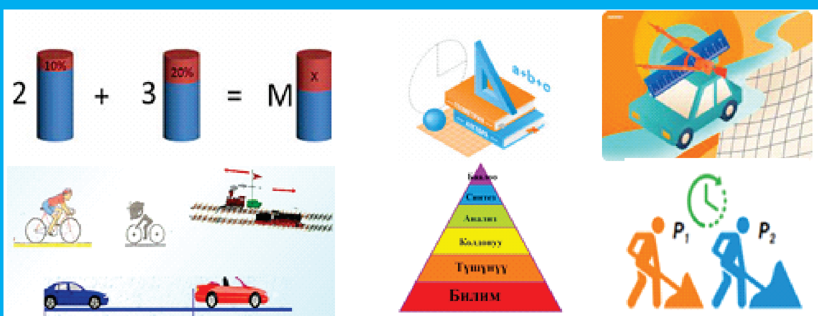
АЛЫМБАЕВА К. У., ДЖАПАРОВА С. Н.

ТЕКСТТИК МАСЕЛЕЛЕРДИ ЧЫГАРУУДА МАТЕМАТИКАЛЫК МОДЕЛЬ ТҮЗҮҮНҮН ТЕХНОЛОГИЯСЫ



Каракол 2024

АЛЫМБАЕВА К. У., ДЖАПАРОВА С. Н.

ТЕКСТТИК МАСЕЛЕЛЕРДИ ЧЫГАРУУДА МАТЕМАТИКАЛЫК МОДЕЛЬ ТҮЗҮҮНҮН ТЕХНОЛОГИЯСЫ

Кыргыз Республикасынын Билим берүү жана илим министрлиги тарабынан жогорку окуу жайлардын студенттери үчүн окуу-методикалык колдонмо катары уруксат берилген

Каракол 2024

УДК 519.8
ББК 22.1
А 59

Рецензенттер:
Б.М. Биймурсаева, С. Нааматов ат. Нарын мамлекеттик университетинин проф.м.а., п.и.к., доцент;
Б.А. Байболотов, К. Тыныстанов ат. Ысык-Көл мамлекеттик университетинин доценти, ф-м.и.к., Каракол шаары

Алымбаева К. У., Джапарова С. Н.
А 59 Тексттик маселелерди чыгарууда математикалык модель түзүүнүн технологиясы. Окуу методикалык колдонмо. – Б.: 2024. 163 б.

ISBN 978-9967-9535-0-5

Бул окуу методикалык колдонмо жогорку окуу жайлардын «Математиканы окутуунун методикасы» дисциплинасында тексттик маселелерди: кыймылга карата, жумушка карата, химиялык маанидеги маселелерди, геометриялык маселелерди, даяр чиймелердин жардамы менен берилген маселелерди чыгаруунун жолдорун, Блумдун таксономиясынын жардамы менен геометриялык маселелерди чыгаруу каралат. Тригонометриялык тегеректин жардамы менен градустук ченден радиандык ченге өтүү, 0^{o}тан 360^{o}ка чейинки тригонометриялык функциялардын маанилерин оозеки табууну камтыйт. Бул окуу методикалык колдонмо жалпы билим берүүчү мектептердин окуучуларына, жаш мугалимдерге, педагогикалык ЖОЖдордун студенттерине сунуш кылынат. Колдонмонун материалдары К. Тыныстанов ат. ЫМУда, С. Нааматов ат. НМУда, «Ысык-Көл Кут Билим» окуу тарбия комплексинде, Ысык-Көл областтык билим берүү институтунда апробацияланган.

УДК 519.8
ББК 22.1

ISBN 978-9967-9535-0-5

КИРИШҮҮ

«**Тексттик маселелерди чыгарууда математикалык модель түзүүнүн технологиясы**» деген окуу методикалык колдонмосу «Математиканы окутуунун методикасы» дисциплинасы боюнча студенттер үчүн маселелер жыйнагы мектептин окуу китептерине ылайыкташтырылып жазылган жана кошумча булак болуп эсептелинет. Окуу методикалык колдонмодо жана стабилдүү окуу китептеринде материалдын жайгашуу тартибинин туура келиши окутуучулардын иштөөсүнө ыңгайлуулук жаратат. Окутуучуларга окуу китептериндеги көнүгүүлөргө кошумча материалдын керек экендигин иш-тажрыйбалар көрсөттү. Окутуучулар тексттик маселелерди түшүндүрүүдө жана чыгарууда ар кандай технологияларды колдонуусу учурдун талабы.

Бул окуу методикалык колдонмо окутуучуларга арифметика жана алгебранын башталышына тиешелүү материалдарды, ошондой эле геометриялык материалдардын логикалык структурасын ачык элестетүүсүнө мүмкүндүк түзө алат жана студенттерди келечекте окуучулардын ЖРТга жана мамлекеттик сынакка даярдоого жардам берет.

Окуу методикалык колдонмо, негизинен, жогорку татаалдыктагы маселелерди чыгарылыштары менен көрсөтүп, кошумча окшош маселелерди өз алдынча чыгарууга жардамчы боло алат.

Азыркы мезгилде математикалык маселелерди чыгарууда жаңы технологияларды колдонуу менен математикалык моделдерди түзүү талап кылынууда. Ошондуктан окуу методикалык колдонмодо студенттерге, жогорку окуу жайдын окутуучуларына, ошондой эле мектеп окуучуларына, мектеп мугалимдерине да чоң жардам берет жана ЖРТ га даярдап жаткан мугалимдерге толук көмөк көрсөтөт деп ишенебиз.

Технология сөзү латын тилинен которгондо «техно» - искусство, чеберчилик, өнөр; «логос» - илим дегенди түшүндүрөт.

Эң алгач бул термин өндүрүшкө жаңылыктарды киргизүүнүн жыйынтыгын түшүндүргөн.

«Эмнени окутуш керек?»; «Эмне үчүн окутуш керек?»; «Кантип окутуш керек?» деген суроолор менен бирге эле «кантип окутканда жакшы жыйынтыкка жетебиз?» деген суроолордун жообун издөө окумуштууларды жана практиктерди окуу процессин технологиялаштырууга алып келди.

Педагогикада жаңы багыт – педагогикалык технология пайда болду.

«Модель» жана «моделдештирүү» терминдери латындын «modus», «modulas» - өлчөм, образ, жолу деген сөзүнөн келип чыккан. Заманбап билим берүү системасында таанып – билүүнүн негизги методу болуп саналат. Моделдин көп типтери бар. Анын ичинен бизге керектүү моделдин үч тибине көңүл буралы:

I. *Физикалык*
II. *Аналогиялык*
III. *Математикалык*

I. Физикалык модель – бул объектинин же системанын чоңойтулган же кичирейтилген түрү.

Мисалы:

1) Конструкциялана турган самолётту 1:72 масштабда кичирейтип жасалып, аэродинамикалык трубада сынашат.

2) Архитектурада үйдүн проектисин чийүүдө 1:100 масштабы колдонулат.

3) Үй куруудa көп кабаттуу үйдүн кичирейтилген моделин жасап, аны ошол жердин шартында жер титирөөгө, шамалга болгон туруктуулугун сынап андан кийин гана үйдү салууга киришишет.

4) Кеме курууда да масштабды кичирейтүү колдонулат.

II. Аналогиялык модель – бул изилденүүчү объектиге окшош реалдуу объект, бирок анын өзү эмес.

Мисалы: Үч шаарды көмүр менен камсыз кылуу үчүн бир кампа салуу керек. Негизги талап: кампа үчүн транспорттук чыгымы эң аз болгондой орунду табыш керек. (Ар бир жүк ташуунун чыгымы кампадан ошол шаарга чейинки аралыкта ташылуучу товардын салмагына көбөйткөнгө барабар жана тонна/км менен ченелет).

Ал үчүн ошол аймактын картасын фанерага чапташат. Андан кийин үч шаардын ордун тешип, тешик аркылуу үч жип өткөрүп, жиптин учтарына ар бир шаарга керектелүүчү көмүрдүн салмагына пропорциялуу болгон үч жүктү илишет. Жиптин бош учтарын бириктирип бир түйүн кылышат да коё беришет.

Oордук күчүнүн таасири астында система тең салмактуу абалга келет. Фанерадагы түйүн ээлеген орун салына турган складдын оптималдуу орду болуп эсептелет.

Тексттик маселелер болгон кыймылга жана жумушка байланышкан маселелерди чыгаруунун технологиясына көңүлүңүздөрдү бурмакчыбыз, б.а. окуучуларды окутууда тексттик маселелерди жакшы чыгаруу көндүмдөрүнө ээ болот деген суроого жооп берели.

III. Тексттик маселелерди чыгаруунун **математикалык моделдөө методу** үч этаптан тураарын эсиңиздерге салып кетели.

1. Формалдаштыруу.

Берилген маселени математика тилине которуу, математикалык модель түзүү.

2. Алынган математикалык модели:

- теңдемелерди;
- теңдемелер системасын;
- сан туюнтмасын;
- тамга туюнтмасын;
- салыштырууну;
- функцияны;
- функциянын эң чоң жана эң кичине маанилерин табуу;
- барабарсыздыкты;
- барабарсыздыктар системасын чыгаруу.

3. Табылган чыгарылышты интерпретациялоо.

Алынган чыгарылыштарды математика тилинен баштапкы маселенин тилине которуу.

Эгерде маселе чыгаруунун биринчи этабын окуучулардын өздөштүрүп кетишине жетише алсак, анда экинчи жана үчүнчү этаптарын оңой эле чыгарып кете алышат.

Бул эмгек маселелерди чыгаруунун биринчи этабы болгон маселени анализдөөгө жана математикалык моделин түзүүгө арналмакчы. Ошондой эле Блумдун таксономиясын колдонуп геометриялык маселелерди, даяр чиймелердин жардамы менен берилген маселелерди чыгаруу каралган.

1. МАТЕМАТИКАЛЫК МОДЕЛЬ ТҮЗҮҮ

В.Лебедев мектеп математика курсунда тексттик маселелерди чыгаруу окуучулардын кабыл алуусу жана өздөштүрүүсү эң кыйын бөлүмдөрдүн бири катары каралышы кандайдыр бир тексттик маселесин система катары, ал кыймылга карата, жумушка карата, аралашмалар же эритмелерге карата, пайыздарга карата ж.б. кароого мүмкүндүк бере турган аналитикалык аппараттын иштелип чыкпагандыгынан деп эсептейт.

Маселени кунт коюп окуп чыгып, төмөнкүлөрдү аныктайбыз:

- маселенин элементтерин;
- элементтердин арасындагы байланыштардын мүнөзүн.

а) Маселенин элементтерин **катышуучулар** деп атайбыз. Алар: машина, велосипед, кайык, сал, моторлуу кайык, теплоход, самолет, жумушчулар, жер казуучулар, станоктор ж.б.

б) Маселедеги **компоненттер**:

s - аралык

v – ылдамдык

t - убакыт

A – жумуштун көлөмү

N - өндүрүмдүүлүк

t – убакыт

в) Катышуучулардын компоненттеринин арасында ар кандай өзгөрүүлөр:

-кыймылдын ылдамдыгынын көбөйүп же азайышы;

-жолугушканга чейинки кыймыл, жолугушкандан кийинки кыймыл;

-башталышында чогуу иштеши;

-ар биринин өз алдынча иштеши;

-агым боюнча кыймыл;

-агымга каршы кыймыл ж.б.д.у.с. өзгөрүүлөр **окуялар** деп аталат.

г) Компоненттердин арасындагы **байланыштар.**

Байланыштардын төрт түрү бар:

А. Бир абалдагы катышуучулардын арасындагы байланыш **горизонталдык байланыш** же **теңдештирүүчү байланыш** деп аталат.

Б. Ар бир катышуучунун компоненттеринин арасындагы байланыш **вертикалдык байланыш** деп аталат.

С. Бир катышуучунун ар кайсы абалдагы компоненттердин арасындагы байланыштары С байланышы деп аталат.

Д. Ар кандай катышуучулардын ар кайсы окуялардагы компоненттеринин арасындагы байланыштар Д байланышы деп аталат.

$$S = v \cdot t \qquad A = N \cdot t$$

$$v = \frac{S}{t} \qquad N = \frac{A}{t}$$

жана

$$t = \frac{S}{v} \qquad t = \frac{S}{N}$$

байланыштары вертикалдык байланыштарга кирет

Байланыштар:

- туюнтмалар;
- теңдемелер;
- теңдемелер системасы;
- барабарсыздык;
- барабарсыздыктар системасы;
- функция болушу мүмкүн.

а), б), в), г) пунктарындагыларды төмөндөгүдөй таблицага толтурабыз [10].

Маселенин тиби	**1 -катышуучу**	**2-катышуучу**	**Жалпы байланыш**
окуя 1	Компоненттер_1^1	Компоненттер_1^2	$\text{Компоненттер}_1^{ж}$
окуя 2	Компоненттер_2^1	Компоненттер_2^2	$\text{Компоненттер}_2^{ж}$
окуя 3	Компоненттер_3^1	Компоненттер_3^2	$\text{Компоненттер}_3^{ж}$
…	…	…	…

Каралып жаткан технологияны конкреттүү маселелерди анализдөө жана чыгаруу менен түшүндүрөлү.

1-маселе: А жана В пунктарынан бири бирин көздей бир моментте эки мотоциклист чыгып, жолугушкандан кийин биринчиси В га 2,5 саатта, экинчиси А га 1,6 саатта жеткендиги белгилүү болсо ар бир мотоциклист жолдо канча убакыт болгон?

Анализдөө жана математикалык модель түзүү:

Белгилөөлөрдү киргизели.

t (саат) - эки мотоциклист жолукканга чейинки убакыт ($t > 0$)

x (км/саат) - 1 -мотоциклисттин ылдамдыгы ($x > 0$)

y (км/саат) - 2-мотоциклисттин ылдамдыгы ($y > 0$)

катышуучулар - I-мотоциклист,
II-мотоциклист;

окуялар - жолукканга чейин;
жолуккандан кийин.

Жогорудагы маселенин шарты боюнча берилгендерди жана белгилөөлөрдү эске алуу менен таблица түзөбүз:

<table>
<tr><th>Окуялар</th><th>Компонент-тер</th><th>I-мотоциклист</th><th>II-мотоциклист</th><th>Байланыш</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Жолугушканга чейин</td><td>S (км)</td><td>(11) 1,6 y</td><td>(12) 2,5 x</td><td></td></tr>
<tr><td>V (км/с)</td><td>(3) x</td><td>(4) y</td><td></td></tr>
<tr><td>t (саат)</td><td>(1) t</td><td>(2) t</td><td>$t = \frac{1,6y}{x}$ (верт. байланыш)
$t = \frac{2,5x}{y}$ (верт. байланыш)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Жолугушкандан кийин</td><td>S (км)</td><td>(7) 2,5 x</td><td>(10) 1,6 y</td><td></td></tr>
<tr><td>V (км/с)</td><td>(6) x</td><td>(9) y</td><td></td></tr>
<tr><td>t (саат)</td><td>(5) 2,5</td><td>(8) 1,6</td><td></td></tr>
</table>

Байланыштар

(5) · (6) = (7) - вертикалдык байланыш (В байланыш)

(8) · (9) = (10) - вертикалдык байланыш (В байланыш)

(7) = (12) - Д-байланыш

(10) = (11) - Д-байланыш (Бири басып өткөн жолду экинчиси жолуккандан кийин басып өтөт)

(1) = (11) : (3) - вертикалдык байланыш

(2) = (12) : (4) - вертикалдык байланыш

(3) = (6) - С-байланышы

(4) = (9) - С-байланышы

Математикалык модель катары

$\begin{cases} t = \frac{1{,}6y}{x} \\ t = \frac{2{,}5x}{y} \end{cases}$ системасын алабыз.

Эки теңдемени мүчөлөп көбөйтсөк: $t \cdot t = \frac{1{,}6y}{x} \cdot \frac{2{,}5x}{y}$

$t^2 = 4$

$t = \pm 2$ маселенин шарты боюнча $t > 0$ болгондуктан

$t = 2$

жолугушканга чейин ар бир мотоциклист 2 саат жүрсө,

I мотоциклист 2 саат + 2.5 саат = 4.5 саат,

II мотоциклист 2 саат + 1.6 саат = 3.6 саат жол жүрүшкөн.

Жообу: 4.5 саат; 3.6 саат.

2-маселе. Эки велосипедист бири А дан В ны экинчиси В дан А ны көздөй чыкты. Ылдамдыктары турактуу. Биринчи жолу алар В дан 40 км аралыкта жолугушту. Алар көздөгөн жерине жеткенден кийин токтолбостон бурулушуп жолун улашып, экинчи жолугушуусу биринчи жолуккандан 8 сааттан кийин А дан 20 км аралыкта болду. А дан В га чейинки аралыкты жана ар бир велосипедисттин ылдамдыгын тапкыла.

Анализдөө жана математикалык модель түзүү.

I велосипедисттин ылдамдыгы - x км/саат (x.>0)

II велосипедисттин ылдамдыгы -y км/саат (y>0)

АВ пунктарынын арасындагы аралык –S км (S>0) деп белгилейли

Таблицага түшүндүрмө. (1), (2) - ылдамдыктарын белгилейбиз.

1-сүрөт

К – биринчи жолуккандагы чекит дейли (1-сүрөт).

Таблицаны толтуралы:

Окуялар	**Компо-ненттер**	**I мотоциклист**	**II мотоциклист**	**Байланыш**
Биринчи жолугуш - канга чейин	S (км)	**(3)** S-40	**(4)** 40	
	V (км/с)	**(1)** x	**(2)** y	
	t (саат)	**(5)** $\frac{S-40}{x}$	**(6)** $\frac{40}{y}$	**(7)** $\frac{S-40}{x}=\frac{40}{y}$ (горизонталдык байланыш)
Экинчи жолугуш - канга чейин	S (км)	**(9)** S+20	**(10)** S-20	**(11)** 8x= S+20 (вертикалдык байланыш)
	V (км/с)	**(1)** x	**(2)** y	**(12)** 8y= S-20 (вертикалдык байланыш)
	t (саат)	**(8)** 8	**(8)** 8	

(3) – I велосипедист   АК = S - 40 км

(4) – II велосипедист   ВК = 40 км жүрөт

(5) – Биринчи жолугушканга чейин I велосипедист $\frac{S-40}{x}$ саат жүрөт

(6) – II велосипедист $\frac{40}{y}$ саат жүрөт.

(7)–Горизонталдык байланыш: эки велосипедист бир моментте чыккандыктан алардын 1-жолугушканга чейинки убактысы барабар.

Экинчи жолуккан чекитти L десек,

2-сүрөт

(8) – экөө тең 8 сааттан жүрүшөт

(9) – I-велосипедисттин маршруту К → В → L

KB + BL = 40 + (S - 20) = 40 + S - 20 = S + 20 (км жүрөт).

(10) – П-велосипедисттин маршруту К → А → L (2-сүрөт).

KA + AL = (S - 40) + 20 = S - 20 (км)

(11) – (1); (8); (9) ду байланыштырган вертикалдык байланыш

$$8x = S + 20$$

(12) – (9); (2); (10) ду байланыштырган вертикалдык байланыш

$$8y = S - 20$$

(7); (11); (12) боюнча математикалык модель түздүк:

$$\begin{cases} \frac{S-40}{x} = \frac{40}{y} \\ 8x = S + 20 \\ 8y = S - 20 \end{cases}$$

үч өзгөрмөлүү үч теңдеменин системасын чыгаруу менен,

Жообу: $S = 100$ км Адан Вга чейинки аралык

$x = 15$ км/саат I велосипедисттин ылдамдыгы

$y = 10$ км/саат II велосипедисттин ылдамдыгы деген жоопторду алабыз.

2. ЖУМУШКА КАРАТА МАСЕЛЕЛЕРДИ АНАЛИЗДӨӨ

3-маселе. Эки жумушчу берилген тапшырманы **10** күндө бүтүрүшмөк. 7 күн бирге иштегенден кийин бири ооруп калып, калган жумушту экинчиси дагы 9 күн иштеп, калган ишти бүтүргөн. Бардык тапшырманы ар бир жумушчу жалгыз иштеп канча күндө бүтмөк [11]?

Белгилөөлөрдү киргизели:

Эгерде ар бири жалгыз иштесе:

1-жумушчу жумушту x күндө (x > 10)

2-жумушчу жумушту y күндө (y > 10) бүтмөк.

Таблица түзөлү:

Окуялар	**Компо-ненттер**	**I жумушчу**	**II жумушчу**	**Экөө биригип**	**Байланыш**
План боюнча	A	(1) 1	(2) 1	(11) 1	верт. байланыш $N = \frac{A}{t}$
	N	(5) $\frac{1}{x}$	(6) $\frac{1}{y}$	(12) $\frac{1}{10}$	$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{10}$ горизонталдык байланыш
	t	(3) x	(4) y	(13) 10	—
Иш жүзүндө	A	(11) $\frac{7}{x}$	(12) $\frac{16}{y}$	(14) 1	$\frac{7}{x} + \frac{16}{y} = 1$ горизонталдык байланыш
	N	(7) $\frac{1}{x}$	(8) $\frac{1}{y}$	—	—
	t	(9) 7	(10) 7 + 9= 16	—	—

Теңдемелер системасын алабыз

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{10} & (1) \\ \frac{7}{x} + \frac{16}{y} = 1 & (2) \end{cases}$$

биринчи теңдемени -7 ге көбөйтүп, экинчисине кошсок төмөнкү теңдемени алабыз:

$$\frac{9}{x} = \frac{3}{10} \text{ мындан } x = 30$$

x тин маанисин (1)-теңдемеге коюп y=15 маанисин алабыз

Жообу: I-жумушчу 30 күндө

II-жумушчу 15 күндө бүтмөк.

4-маселе. Эки жер казуучуга арык казууга 3 саат 36 минута берилген. Бирок биринчи жер казуучу жумуштун $\frac{1}{3}$ ин бүткөндө гана экинчиси келгенде таарынып кетип калды. Калган жумушту экинчиси жалгыз бүтүрдү. Арык казганга бардыгы 8 саат кетсе, ар бири өзү жалгыз иштесе, канча убакытта бүтмөк [7]?

Бул маселени анализдөөдө төмөнкү суроолорго жооп беребиз.

Канча катышуучу бар? - 3

- I-жер казуучу,
- II-жер казуучу
- Экөө биригип

1. Бул жумушту аткарууда канча окуя бар? - 3

- Ар бири жеке иштегендеги жумуш;
- I-жер казуучу иштеген жумуш;
- II-жер казуучу иштеген жумуш.

Маселедеги суроого

I- жумушчу – x саатта

II- жумушчу – y саатта бүтмөк деген өзгөрмөлөрдү кийиребиз жана таблицаны толтурабыз

3 саат 36 минута = 3,6 саат

мында: $x > 3,6$

$y > 3,6$

Окуялар	**Компо-ненттер**	**I-жумушчу**	**II-жумушчу**	**Экөө биригип**	**Байланыш**
План боюнча	A	**(1)** 1	**(2)** 1	**(7)** 1	
	N	**(5)** $\frac{1}{x}$	**(6)** $\frac{1}{y}$	**(9)** $\frac{1}{3,6}$	$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3,6}$ Горизонталдык байланыш
	t	**(3)** x	**(4)** y	**(8)** 3,6	
Иш жүзүндө	A	**(10)** $\frac{1}{3}$	**(13)** $\frac{2}{3}$	—	
	N	**(11)** $\frac{1}{x}$	**(14)** $\frac{1}{y}$	—	
	t	**(12)** $\frac{1}{3}:\frac{1}{x}$	**(15)** $\frac{2}{3}:\frac{1}{y}$	**(16)** 8	$\frac{1}{3}:\frac{1}{x}+\frac{2}{3}:\frac{1}{y}=8$ Горизонталдык байланыш

Биринчи теңдемени (5), (6), (9) горизонталдык байланышынан алабыз.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3,6} \qquad (1)$$

(12) + (15) = (16) - клеткаларды байланыштырып горизонталдык байланышын алабыз

$$\frac{1}{3} \div \frac{1}{x} + \frac{2}{3} \div \frac{1}{y} = 8$$

$$\frac{x}{3} + \frac{2y}{3} = 8 \qquad (2)$$

(1) жана (2) теңдемелерден система түзүп чыгарып,

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3{,}6} \\ \frac{x}{3} + \frac{2y}{3} = 8 \end{cases}$$

$x_1 = 6$ жана $x_2 = 14.4$

$y_1 = 9$ $y_2 = 4.8$ чыгарылыштарын алабыз.

Демек берилген жумушту өз алдынча

I жер казуучу 6 саатта	же	I жер казуучу 14.4 саатта
II жер казуучу 9 саатта		II жер казуучу 4.8 саатта казып бүтмөк.

Жогоруда жумушка арналган эки маселе, кыймылга арналган эки маселе камтылды. Ушул типтеги маселелерди 5-класстан баштап эле таблица түзүү менен математикалык модель табууну үйрөнө билишсе, окуучулар жогорку класстардан жогорку татаалдыктагы маселелерди чыгарып кетээрине толук ишеним бар.

3. МАСЕЛЕЛЕРДИ АНАЛИЗДӨӨ

Мектеп окуучулары математика сабагында дайыма математикалык модель менен иш алып барышарын көпчүлүгү сезе беришпейт. Математикалык моделдин материалдык гана модели (мисалы: геометриялык фигуралар) бар деп ойлошот.

Математикалык моделдештирүүнүн эки негизги тиби бар:

- предметтик-көрсөтмөлүү (визуалдык)
- абстрактуу белгилер (абстрактно-знаковое).

Математикада көбүнчө экинчи тип колдонулат.

Мектептин математика боюнча окуу китептеринде тилекке каршы тексттик маселелерди чыгаруунун бирдиктүү системасы жок.

Негизинен окуучулар теңдемелер, барабарсыздыктар жана алардын системаларын чыгаруунун алгоритми менен таанышышат.

Бир-эки шарты бар элементардык мазмундагы гана тексттик маселелер берилет.

Мектептин математикасында тексттик маселелер, өзгөчө 5-класста (автору Виленкин) көп берилген. «Кыймылга» карата маселелер жүзгө жакын. 6,7-класстарда өтө аз кездешет да, кыймылга карата маселелер 8-класста квадраттык теңдемени жана бөлчөктүү - рационалдык теңдемелерди чыгарууну өткөндөн кийин кездешет. Ортодогу эки жылдын ичинде көпчүлүк окуучулар маселе чыгарууну унутуп калышат.

Математикалык модель түзүүдө таблицанын жардамы менен чыгаруу оң жыйынтык берет.

Математикалык модель түзүүнү төмөндөгүдөй мисал менен салыштырсак болот.

Балдар бакчасында кийим салынган шкаф текчелерге бөлүнгөн жана төмөндөгүдөй маркировкаланган.

	Айдин	Нуржеңиш	Адина	Нурайым
Баш кийим	1.1	1.2	1.3	1.4
Үстүңкү кийим	2.1	2.2	2.3	2.4
Астыңкы кийим	3.1	3.2	3.3	3.4
Бут кийим	4.1	4.2	4.3	4.4

Айдиндин свитерин 2.1 текчесинен, Адинанын юбкасын 3.3 текчесинен, Нуржеңиштин калпагын 1.2 текчесинен табабыз. Окутууда жана таанып билүүдө математикалык моделдөө усулунун баалуулугу анын универсалдуулугунда бир эле модель ар кандай объектилер жана кубулуштарды сүрөттөйт. Ошондуктан бир эле математикалык моделге ээ болгон ар кандай сюжеттеги маселелерди чыгарууга ылайыктуу.

5-маселе. Теплоход көлдө 23 км/саат ылдамдык менен 3 саат, андан кийин 4 саат дарыя боюнча жүрдү. Эгерде дарыяда көлгө караганда 3 км/саатка тез ылдамдык менен жүргөнү белгилүү болсо, теплоход 7 саатта канча км жүргөн?

Ушул маселеге типтеш сатып алууга төмөнкүдөй маселе түзсөк болот.

6-маселе. Апам базардан килограммы 23 сом болгон 3 кг помидор жана 4 кг бадыраң сатып алды. Эгерде бадырандын килограммы помидорго караганда 3 сомго арзан болсо, 7 кг жашылчага канча сом төлөнгөн?

7-маселе. Жумушчу саатына 23 деталь жасап 3 саат иштеди, ал эми анын үйрөнчүгү 4 саат иштеди. Эгерде үйрөнчүгү жумушчуга караганда саатына 3 деталь аз жасаары белгилүү болсо, алар ушул убакытта канча деталь жасаган?

Жогорудагы үч маселе мааниси боюнча ар түрдүү болгону менен үчөөнө тең бир математикалык модель түзүлөт.

Алынган математикалык моделибиз төмөнкү сан туюнтмасы болот.

$$23 \cdot 3+4 \cdot (23-3)$$

1. Маселени талкулоо:

- Маселеде канча катышуучу бар? - Бирөө, ал теплоход.
- Канча окуя бар? - Эки: көлдө жана дарыяда.
- Берилгендерди төмөндөгүдөй таблицага толтурабыз.

Окуялар **Компоненттер**	**Көлдө**	**Дарыяда**	**Бардыгы**
S (км)	5) 23·3	6) 4· (23-3)	7) 23·3+4· (23-3)
V (км/с)	3) 23	4) 23-3	8) __
T (сааты)	1) 3	2) 4	9) __

Кандай иретте толтурулушу таблицада көрсөтүлгөн. 8,9-клеткаларды толтуруунун кажети жок, ошондуктан чийилип коюлат.

Окуучулар менен талкуу жүргүзүлөт:

- таблицаны толтурууда канча байланыш колдонулду?

- эки вертикалдык жана бир горизонталдык байланыш.

(1) · (3)=(5) - вертикалдык байланыш

(2) · (4)=(6) - вертикалдык байланыш

(5) · (6)=(7) - горизонталдык байланыш

Сатып алууга карата маселе дагы ушу сыяктуу эле талкууланып төмөнкү таблица түзүлөт.

Катышуучулар **Компоненттер**	**Помидор**	**Бадыраң**	**Бардыгы**
Канча төлөндү	23·3	4· (23-3)	23·3+4· (23-3)
1 кг баасы	23	23-3	—
кг	3	4	—

Үчүнчү маселенин математикалык моделин түзүү

Катышуучулар **Компоненттер**	**Жумушчу**	**Үйрөнчүк**	**Бардыгы**
A (жумуш)	23·3	4· (23-3)	23·3+4· (23-3)
N (өндүрүмдүүлүк)	23	23-3	
t сааты	3	4	

Биринчи этап

Биз үч маселени тең формалдаштырып, б.а. кыргыз тилинен математика тилине которуп математикалык моделдин бир түрүн: сан туюнтмасын алдык.

Экинчи этап

Алынган математикалык моделдин, б.а. сан туюнтмасынын маанисин табабыз.

$23 \cdot 3+4 \cdot (23-3)=23 \cdot 3+4 \cdot 20=69+80=149$

Үчүнчү этап

Дайыма эле математикалык моделдин жообу маселенин жообу боло бербейт, аны кийинки маселелерде көрөбүз.

Маселенин суроосун кайрадан окуп чыгып, ар бир маселенин жообун жазабыз.

1-маселенин жообу: 149 км.

2-маселенин жообу: 149 сом.

3-маселенин жообу: 149 деталь.

Математикалык модели сан туюнтмасы болгон маселелерди таблицанын ичинде эле чыгарып коюу максатка ылайыктуу деп ойлойбуз.

8-маселе. Эки пристандын ортосундагы аралык 378км. Эгерде теплоходдун агым боюнча ылдамдыгы 27км/саат, агымга каршы ылдамдыгы 21км/саат болсо, ал барып келгенге канча убакыт кетирет? [3]

Маселенин математикалык моделин түзүү үчүн анализдейбиз.

- Канча катышуучу бар?

- Бир: теплоход.

- Канча окуя бар?

- Эки: 1) 378 км барды.

2) 378 км кайра келди.

- Барганга кеткен убакытты кантип табабыз?

- Келгенге кеткен убакытты кантип табабыз?

- Барып-келгенге кеткен убакытты кантип табабыз?

Мына ушулардын бардыгын талкуулагандан кийин математикалык моделди алыш үчүн таблица түзөбүз.

Окуялар **Компоненттер**	**Баратканда**	**Келатканда**	**Бардыгы**
S (км)	(1) 378	(2) 378	(7) —
V (км/саат)	(3) 27	(4) 21	(8) —
t (сааты)	(5) $\frac{378}{27}=14$	(6) $\frac{378}{21}=18$	(9) 14+18=32

$(5) = (1):(3)$ вертикалдык байланыш

$(6) = (2):(4)$ вертикалдык байланыш

$(9) = (5) + (6)$ горизонталдык байланыш

Жообу: 32 саат

9-маселе. Турист 378 км басып өттү. Ал поезд менен 4 саат, мотоцикл менен 3 саат жүрдү. Эгерде поездин ылдамдыгы 60 км/саат болсо, мотоцикл менен кандай ылдамдыкта жүргөн? [3]

Катышуучулар **Компоненттер**	**Поезд**	**Мотоцикл**	**Бардыгы**
S (км)	(5) 60·4=240	(6) 378-240=138	(1) 378
V (км/с)	(4) 60	(7) $\frac{138}{3}=46$	—
t (сааты)	(2) 4	(3) 3	—

Таблицаны толтуруунун ирети кашаадагы цифралар менен көрсөтүлдү.

Ушул эле маселени өзгөртмө кийирүү жолу менен чыгарып көрөлү.

Биринчи этап

Мотоциклдин ылдамдыгын x км/саат десек,

Катышуучулар **Компоненттер**	**Поезд**	**Мотоцикл**	**Бардыгы**
S (км)	(6) 60·4	(7) 3x	(1) 378
V (км/с)	(4) 60	(5) x	
t (сааты)	(2) 4	(3) 3	

Мында (6)=(2)×(4) вертикалдык байланыш

(7)=(3) · (5) вертикалдык байланыш

(6)+(7)=(1) горизонталдык байланыш

Математикалык модель – 60·4+3x=378

Экинчи этап

Математикалык моделди чыгарабыз

60·4+3x=378

240+3x=378

3x=378-240

3x=138

$x=\frac{138}{3}$

x=46

Үчүнчү этап

Маселенин суроосуна жооп беребиз.

Мотоциклдин ылдамдыгын х менен белгилегендиктен, анын ылдамдыгы 46 км/саат болот.

Жообу: 46 км/саат.

10-маселе. Теплоход дарыянын агымы боюнча 2,5 саат, агымга каршы 3,2 саат жүрдү. Эгерде теплоходдун өздүк ылдамдыгы 22 км/саат, ал эми агымдын ылдамдыгы 3 км/саат болсо, бул убакытта канча км жүргөн? [3]

Берилгендерди анализдеп таблицага түшүрөлү:

Окуялар **Компоненттер**	**Агым боюнча**	**Агымга каршы**	**Бардыгы**
S (км)	(5) 2,5· (22+3)	(6) 3,2· (22-3)	(7) 2,5· (22+3)+ 3,2·(22+3)=123,3
V (км/с)	(3) 22+3	(4) 22-3	
t (сааты)	(1) 2,5	(2) 3,2	

Окуучулар ушул китептеги маселелерди 5-класста чыгарууну жакшы түшүнүшсө, 8-9-класстарда кездешүүчү маселелерди чыгарууну тез эле өздөштүрүп кетишет.

Ушул эле маселеден бир нече башка маселелерди түзүүгө болот:

1-маселе: Теплоход дарыянын агымы боюнча 2,5 саат, агымга каршы 3,2 саатта бардыгы 123,3 км жүрдү. Эгерде теплоходдун ылдамдыгы 22 км/саат болсо, дарыянын агымынын ылдамдыгын тапкыла.

2-маселе: Теплоход дарыянын агымы боюнча 2,5 саат, агымга каршы 3,2 саатта бардыгы 123,3 км жүрдү. Эгерде дарыянын агымынын ылдамдыгы 3 км/саат болсо, теплоходдун өздүк ылдамдыгын тапкыла.

3-маселе: Теплоход дарыянын агымы боюнча 2,5 саат, агымга каршы бир нече саатта бардыгы 123,3 км жүрдү. Эгерде теплоходдун өздүк ылдамдыгы 22 км/саат, ал эми агымдын ылдамдыгы 3 км/саат экендиги белгилүү болсо, агымга каршы канча саат жүргөн?

4-маселе: Теплоход дарыянын агымы боюнча бир нече саат, агымга каршы 3,2 саатта бардыгы 123,3 км жүрдү. Эгерде теплоходдун өздүк ылдамдыгы 22 км/саат, ал эми агымдын ылдамдыгы 3 км/саат экендиги белгилүү болсо, агым боюнча канча саат жүргөн?

5-маселе: Теплоход агым боюнча 62,5 км, агымга каршы 60,8 км жүрүп бардык жолго 5,7 саат убакыт кетирди. Эгерде дарыянын агымынын ылдамдыгы 3 км/саат экендиги белгилүү болсо, теплоходдун дарыянын агымы боюнча ылдамдыгын тапкыла.

6-маселе: Теплоход агым боюнча 62,5 км, агымга каршы 60,8 км жүрүп бардык жолго 5,7 саат кетирди. Эгерде теплоходдун өздүк ылдамдыгы 22 км/саат болсо, дарыянын агымынын ылдамдыгын тапкыла.

Жогорудагы 6 маселенин математикалык моделдерин түзүш үчүн таблица толтуралы:

1-маселе

Катышуучулар Компоненттер	Агым боюнча	Агымга каршы	Бардыгы
S (км)	2,5· (22+x)	3,2· (22-x)	123,3
V (км/с)	22+x	22-x	__
t (сааты)	2,5	3,2	__

Математикалык модель – 2,5×(22+x)+3,2×(22-x)=123,3

2-маселе

Катышуучулар Компоненттер	Агым боюнча	Агымга каршы	Бардыгы
S (км)	2,5· (x+3)	3,2· (x-3)	123,3
V (км/с)	x+3	x-3	__
t (сааты)	2,5	3,2	__

Математикалык модель – 2,5×(x+3)+3,2×(x-3)=123,3

3-маселе

Катышуучулар Компоненттер	Агым боюнча	Агымга каршы	Бардыгы
S (км)	2,5· (22+3)	X· (22-3)	123,3
V (км/с)	22+3	22-3	__
t (сааты)	2,5	x	__

Математикалык модель – 2,5· (22+3)+x· (22-3)=123,3

4-маселе

Катышуучулар Компоненттер	Агым боюнча	Агымга каршы	Бардыгы
S (км)	25x	19·2,5	123,3
V (км/с)	22+3=25	22-3=19	__
t (сааты)	x	3,2	__

Математикалык модель – 2,5×x+19×3,2=123,3

5-маселе

Катышуучулар Компоненттер	Агым боюнча	Агымга каршы	Бардыгы
S (км)	62,5	60,8	__
V (км/с)	x+3	x-3	__
t (сааты)	$\frac{62,5}{x+3}$	$\frac{60,8}{x-3}$	5,7

Шарт: x>3. Математикалык модель – $\frac{62,5}{x+3} + \frac{60,8}{x-3} = 5,7$

6-маселе

Катышуучулар Компоненттер	Агым боюнча	Агымга каршы	Бардыгы
S (км)	62,5	60,8	—
V (км/с)	22+x	22-x	—
t (сааты)	$\frac{62,5}{22+x}$	$\frac{60,8}{22-x}$	5,7

Шарт: x<22. Математикалык модель – $\frac{62,5}{22+x}+\frac{60,8}{22-x}=5,7$

Жогорудагы берилген негизги маселенин жана андан келип чыккан кошумча 1-4-маселелердин жооптору болуп, математикалык моделдин жооптору болуп эсептелет.

Бирок дайыма эле математикалык моделдин чыгарылышы маселенин чыгарылышы боло бербейт. Буга акыркы эки маселени кошсо болот.

5-маселенин математикалык модели $\frac{62,5}{x+3}+\frac{60,8}{x-3}=5,7$ тендемесинин жооптору x=22; $x=-\frac{7}{19}$

Өзгөрмөнү кийиргенде, ага сөзсүз чектөө боюнча шарт коюш керек.

x – теплоходдун өздүк ылдамдыгы болгондуктан, ал дайыма дарыянын агымынын ылдамдыгынан чоң болушу керек.

Демек, шарт: x > 3

Үчүнчү этапта маселенин суроосуна жооп беребиз.

x=22

$x=-\frac{7}{19}$ маселенин шартына туура келбейт.

Маселеде теплоходдун дарыянын агымы боюнча ылдамдыгын тапкыла деген.

22+3=25

Демек, маселенин жообу болуп 25 км/саат эсептелет.

1-4- маселелерде математикалык модель болуп бүтүн теңдемелер, ал эми 5-6- маселелердин математикалык моделдери бөлчөктүү-рационалдык теңдемелер болду.

Жогоруда берилген алты маселенин биринчи гана этабы: формалдаштыруу, б.а маселенин математикалык моделин түзүү этабы гана берилди. Экинчи жана үчүнчү этапты иштөө окурмандарга сунушталат.

Орточо ылдамдыкты табуу

11-маселе. Автомобиль бир шаардан экинчи шаарга 60 км/саат ылдамдык менен барып, кайра келе жатканда 80 км/саат ылдамдык менен келди. Автомобилдин орточо ылдамдыгын тапкыла [14].

Бул маселени окуганда оозеки эле $\frac{(60+80)}{2} = 70$ дешибиз мүмкүн.

5-класста «Орточо арифметикалык сан» деген теманы карасак.

$$\boxed{\text{Орточо ылдамдык} = \frac{\text{бардык басып өткөн жол}}{\text{бардык убакыт}}}$$

Маселеге кайрылып таблица түзөлү. Эки пункттун арасындагы аралыкты S менен белгилейли, мында S>0.

1-этап.

Компоненттер	Баратканда	Келатканда	Бардыгы
S (км)	S	S	2S
V (км/с)	60	80	$\dfrac{2S}{\frac{S}{60}+\frac{S}{80}}$
t (сааты)	$\dfrac{S}{60}$	$\dfrac{S}{80}$	$\dfrac{S}{60}+\dfrac{S}{80}$

Биз математикалык моделди: $\dfrac{2S}{\frac{S}{60}+\frac{S}{80}}$ туюнтмасын алдык.

2-этап. Математикалык моделди чыгарабыз. Башкача айтканда туюнтманы жөнөкөйлөтөбүз.

$$\frac{2S}{\frac{S}{60}+\frac{S}{80}} = \frac{2S}{\frac{7S}{240}} = \frac{2S\cdot 240}{7S} = \frac{480}{7} = 68\frac{4}{7}$$

3-этап. Маселенин суроосуна жооп беребиз.

Автомобилдин орточо ылдамдыгы $68\frac{4}{7}$ км/саат.

12-маселе. Моторлуу кайык кайсы учурда тез келет: дарыя боюнча 20 км барып кайра келгендеби же көл боюнча 40 км жүргөндөбү?

1-этап. Формалдаштыруу

Моторлуу кайыктын өздүк ылдамдыгы – x км/с (x>0)

Дарыянын агымынын ылдамдыгы – a км/с (a>0) деп белгилеп таблица толтурабыз.

$$0 < a < x$$

Катышуучулар **Компоненттер**	**Агым боюнча**	**Агымга каршы**	**Бардыгы**	**Көлдө**
S (км)	20	20	40	40
V (км/с)	x+ a	x- a	—	x
t (сааты)	$\frac{20}{x+a}$	$\frac{20}{x-a}$	$\frac{20}{x+a}+\frac{20}{x-a}$	$\frac{40}{x}$

Математикалык модель

$\frac{20}{x+a}+\frac{20}{x-a} \vee \frac{40}{x}$ Мында $\vee$ – салыштыруу белгиси.

2-этап. Математикалык моделди чыгарабыз.

1-жол

Оң жагы $\frac{20}{x+a}+\frac{20}{x-a}=\frac{(20x-20a+20x+20a)}{x^2-a^2}=\frac{40x}{x^2-a^2}$

Сол жагы $\frac{40}{x}=\frac{40x}{x^2}$

Эки бөлчөктүн алымдары бирдей болгондуктан, кайсынысынын бөлүмү чоң болсо, ошол бөлчөк кичинекей.

Демек, $\frac{40x}{x^2-a^2}>\frac{40x}{x^2}$

2-жол

Эгерде a - b>0 болсо, анда a > b

Эгерде a - b<0 болсо, анда a < b аныктамасын колдонобуз

$$\frac{20}{x+a}+\frac{20}{x-a}-\frac{40}{x}=\frac{20x(x-a)+20x(x+a)-40(x+a)(x-a)}{x(x-a)(x+a)}=\frac{40a^2}{x(x^2-a^2)}$$

Шарт боюнча 0< a <x болгондуктан $\frac{40a^2}{x(x^2-a^2)}$>0, айырмасы оң сан болгондуктан, сол жагы чоң деген жыйынтыкка келебиз.

$$\frac{20}{x+a}+\frac{20}{x-a}>\frac{40}{x}$$

3-этап

Маселенин суроосуна жооп берүү.

$\frac{20}{x+a}+\frac{20}{x-a}>\frac{40}{x}$ болгондуктан моторлуу кайык дарыя боюнча 20 км барып, кайра 20 км келгенге караганда көлдө 40 км ди тез келет.

Жообу: көлдө тез келет.

Бул маселенин математикалык модели болуп туюнтмаларды салыштыруу эсептелет.

4. ХИМИЯЛЫК МАСЕЛЕЛЕРДИН МАТЕМАТИКАЛЫК МОДЕЛИН ТҮЗҮҮ

13-маселе. Коргошун кармаган эки ар кандай куйма бар. Биринин салмагы 6 кг, экинчисиники – 12 кг. Ар биринен бирдей салмактагы бөлүкчөнү кесип алгандан кийин алмаштырып калдыктары менен куюшкан. Жыйынтыгында эки куймада коргошундун процентинин составы бирдей болуп калган. Ар бир кесилген бөлүкчөнүн салмагы канча болгон?

Бул маселени чыгарууда:

1) Процентти бөлчөккө айландыруу
2) Пропорция
3) Сызыктуу теңдемени чыгаруу
4) Параметрлүү теңдемени чыгаруу
5) Сандын бөлүгүн табуу билимдери керектелет.

Маселенин шартын алуучулар абдан жакшы түшүнүү менен жана төмөндөгү суроолорго жооп бере алышы керек.

I. Маселеде канча катышуучу бар?

- Эки (1-куйма, 2-куйма), эки жаңы куйма.

II. Куймада коргошундун процентинин составы бирдейби?

- Бирдей эмес, ошондуктан 1-куймада a%, 2-куймада b% коргошун бар деп эсептейли. $a \neq b$

III. Кесилген бөлүкчөнүн салмагы белгилүүбү?

- Жок, маселенин шартында ошону сурап жаткандыктан анын салмагын x менен белгилейли.

Мында $0<x<6$

IV. Бул маселеде канча окуя бар?

1. Болгон (эски куймалар)

2. Кесилип алынган

3. Калды

4. Алмаштырып аралаштырышы

5.Болду (жаңы куймалар)

a % = $\frac{a}{100}$ бөлүк,

b% =$\frac{b}{100}$ бөлүк

Берилгендерди жана жаңы белгилөөлөрдү колдонуу менен төмөнкү таблицаны толтуралы.

Түшүнүктүү болсун үчүн торчолорду эки цифра менен номерлейли.

Мында биринчи цифрасы - вертикалдык,

экинчи цифрасы - горизонталдык ячейка.

Таблицаны төмөнкү анализдин негизинде толтурдук.

(1.1), (1.3) – маселенин шарты боюнча.

(1.2), (1.4), (2.2), (2.4), (3.2), (3.4), (4.2), (4.4) – нерсенин бөлүгүн табуу.

(2.1)=(2.3) – кесилип алынган бөлүкчөнүн салмагы.

(2.3)=(4.1); (2.1)=(4.3) болгондуктан,

(2.4)=(4.2); (2.2)=(4.4)

(5.1)=(1.1)-(2.1)+(2.3)

(5.3)=(1.3)-(2.3)+(2.1)

(5.2)=(3.2)+(2.4)

(5.4)=(3.4)+(2.2)

Катышуучулар		1-куйма		2-куйма	
Окуялар		Бардыгы	Анын ичинен коргошун	Бардыгы	Анын ичинен коргошун
		(1)	(2)	(3)	(4)
Болгон (кг)	(1)	6	$\frac{a}{100}6$	12	$\frac{b}{100}12$
Кесилип алынды (кг)	(2)	x	$\frac{a}{100}x$	x	$\frac{b}{100}x$
Калды (кг)	(3)	6-x	$\frac{a}{100}(6-x)$	12-x	$\frac{b}{100}(12-x)$
Алмаштырып кошулду (кг)	(4)	x	$\frac{b}{100}x$	x	$\frac{a}{100}x$
Болду	(5)	6-x+x	$\frac{a}{100}(6-x)+\frac{b}{100}x$	12-x+x	$\frac{b}{100}(12-x)+\frac{a}{100}x$

Маселеде жаңы куймаларда коргошундун курамдары барабар болгон жаңы 1-куйма

(5.1) – 100% болгондуктан аны с менен белгилеп,

(5.2) – с%

$$c = \frac{(5.2)\cdot 100}{(5.1)} \qquad (1)$$

Жаңы 2-куйма

(5.3) – 100%

(5.4) – с%

$$c = \frac{(5.4)\times 100}{(5.3)} \qquad (2)$$

(1) жана (2) формулалар барабар болгондуктан $\frac{(5.2)\cdot 100}{(5.1)} = \frac{(5.4)\cdot 100}{(5.3)}$ маанилерин ордуна коюп төмөндөгү математикалык моделди алабыз да, математикалык моделди чыгарабыз.

$$\frac{\frac{a}{100}(6-x)+\frac{b}{100}x}{6}=\frac{\frac{b}{100}(12-x)+\frac{a}{100}x}{12}$$

$12a-2ax+2bx=12b-bx+ax$

$-2ax+2bx-ax=12b-12a$

$3bx-3ax=12b-12a$

$3x(b-a)=12(b-a)$

$x=4$

$x=4$ мааниси $0<x<6$ шартын канагаттандырат, демек ар бир куймадан 4 килограммдан кесип алып алмаштырып туруп, калгандарына кошуп, эки жаңы куйма куйганда, аларда коргошундун проценттик составы барабар болуп калат.

Жообу: 4 кг.

5. КЫЙМЫЛГА КАРАТА МАСЕЛЕЛЕР

14-маселе. Велосипед жарышынын трассасы катеттеринин айырмасы 2 км болгон тик бурчтуу үч бурчтук формасында жана жолдун гипотенуза жак бөлүгү таштак, ал эми эки катети болсо, шоссе жолу менен өтөт. Эгерде велосипедисттин ылдамдыгы шоссе боюнча 42 км/саат, ал эми таштак жолдо ылдамдыгы 30 км/саат жана шоссе жолго канча убакыт кетсе, таштак жолго ошончо убакыт кеткени белгилүү болсо, трассанын узундугун тапкыла.

AC=x мында x>0,

AB=x+2 деп белгилейли.

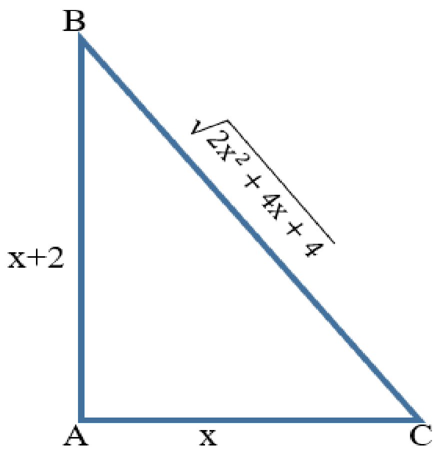
$BC^2=AC^2+AB^2$

$BC^2=x^2+(x+2)^2=x^2+x^2+4x+4=2x^2+4x+4$

$BC=\sqrt{2x^2+4x+4}$ (3-сүрөт).

Шоссе жол – $x+(x+2)=2x+2$

Таштак жол – $\sqrt{2x^2+4x+4}$



3-сүрөт

	шоссе жол	таштак жол	байланыш
S	2x+2	$\sqrt{2x^2+4x+4}$	—
V	42	30	—
t	$\frac{2x+2}{42}$	$\frac{\sqrt{2x^2+4x+4}}{30}$	$\frac{2x+2}{42}=\frac{\sqrt{2x^2+4x+4}}{30}$

$\frac{2x+2}{42}=\frac{\sqrt{2x^2+4x+4}}{30}$ иррационалдуу теңдемесин чыгарабыз

$\frac{x+1}{21} = \frac{\sqrt{2x^2+4x+4}}{30}$

$30(x+1) = 21\sqrt{2x^2 + 4x + 4}$

$10(x+1) = 7\sqrt{2x^2 + 4x + 4}$ (квадатка көтөрөбүз)

$100(x^2+2x+1) = 49(2x^2+4x+4)$

$100x^2+200x+100 = 98x^2+196x+196$

$2x^2+4x-96 = 0$

$x^2+2x-48 = 0$

$x_1 = 6$

$x_2 = -8$ маселенин шартын канааттандырбайт

демек, кыска катет – 6км

узун катет – 6+2=8(км)

гипотенуза – 10

Трассанын узундугу: 6+8+10=24

Жообу: 24 км

15-маселе. Эки спортсмен бири Адан Вны көздөй, экинчиси Вдан Аны көздөй бир убакта чуркап чыгышты. Ылдамдыктары турактуу. Биринчи жолугушуусу Адан 300 м аралыкта жолугушушту. Алар көздөгөн жерине барышып, токтолбой кайра бурулуп, экинчи жолугушуусу Вдан 400 м аралыкта болду. АВнын узундугун тапкыла.

АВ аралыгын -S десек, мында $S>0$

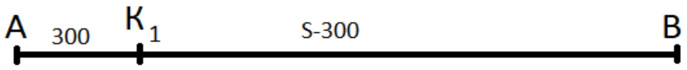
1-спортсмендин ылдамдыгы x м/сек

2-спортсмендин ылдамдыгы y м/сек, деп белгилейли

мында $x>0$, $y>0$

K_1 чекити биринчи жолугушкандагы чекит (4-сүрөт)

K_2 чекити экинчи жолугушкандагы чекит болсун (5-сүрөт)



4-сүрөт.

5-сүрөт.

	1-спортсмен	**2-спортсмен**
I – жолугушууга чейин өткөн жолу	$AK_1 = 300$	$BK_1 = S\text{-}300$
I – жолугушуудан II-жолугушууга чейинки өткөн жолу	$K_1B+BK_2 =$ $=S\text{-}300+400=S+100$	$K_1A+AK_2 =$ $=300+(S\text{-}400)= S\text{-}100$

Катышуучулар Окуялар		**I-спортсмен**	**II-спортсмен**	**байланыш**
I – жолугушууга чейин	S	300	S-300	
	V	x	y	
	t	$\frac{300}{x}$	$\frac{S-300}{y}$	$\frac{300}{x} = \frac{S-300}{y}$
I – жолугушуудан II – жолугушууга чейин	S	S+100	S-100	
	V	x	y	
	t	$\frac{S+100}{x}$	$\frac{S-100}{y}$	$\frac{S+100}{x} = \frac{S-100}{y}$

$$\begin{cases} \dfrac{300}{x} = \dfrac{S-300}{y} \\ \dfrac{S+100}{x} = \dfrac{S-100}{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 300y = (S-300)x \\ (S+100)y = (S-100)x \end{cases}$$ биринчи жана экинчи теңдемени мүчөлөп бөлсөк

$$\frac{300y}{(S+100)y} = \frac{(S-300)x}{(S-100)x}$$

$$\frac{300}{S+100} = \frac{S-300}{S-100}$$

$300S-30000 = S^2-200S-30000$

$S^2-500S = 0$

$S(S-500) = 0$ S=0 маселенин шартын канааттандырбайт

S=500

Жообу: 500м

16-маселе. Моторлуу кайык агымга каршы А пунктунан В пунктуна чейин 5 саатта келген, ал эми В пунктунан А пунктуна чейин жөнөтүлгөн плот 10 саатта келери белгилүү болсо, моторлуу кайык В пунктунан А пунктуна чейин канча убакытта келет?

$V_{м.к.}$ – x км/с

$V_{агым}$ – a км/с деп белгилейли, мында $0 < a < x$

	Моторлуу кайык агымга каршы АВ	Моторлуу кайык агым боюнча ВА	Плот ВА
S	10 a	10 a	10 a
V	x- a	x+ a	a
t	5	t = $\frac{10\,a}{x+a}$	10

1) $x - a = \frac{10a}{5}$

$x - a = 2a$

$x = 3a$

2) $t = \frac{10a}{x+a} = \frac{10a}{3a+a} = \frac{10a}{4a} = 2,5$

Жообу: 2,5 саатта

17-маселе. Жасалма көлмө бир жагы экинчи жагынан 1 кмге узун болгон тик бурчтук формасында. Эки балыкчы бул көлмөнүн бурчунда жолугушуп, карама каршы бурчун көздөй бири кайык менен бири көлмөнү бойлой жөө жөнөштү. Эгерде экөөнүн тең ылдамдыктары бирдей 4 км/саат жана алардын бирөө экинчисине караганда 30 мин эрте жеткендиги белгилүү болсо, көлмөнүн өлчөмдөрүн тапкыла.

Чыгаруу:

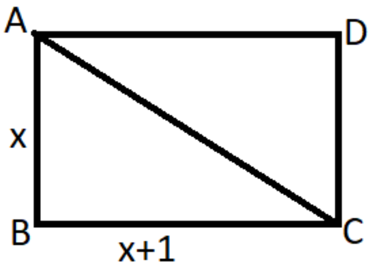
30 мин. =0,5 саат

AB = x десек, мында x>0.

BC = x+1 (6-сүрөт).

$AC^2 = x^2+(x+1)^2 = x^2+x^2+2x+1 = 2x^2+2x+1$

$AC = \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$



6-сүрөт

1)	I-балыкчы	II-балыкчы	айырмасы
S (км)	x+x+1=2x+1	$\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$	-
V (км/с)	4	4	-
t (саат)	$\frac{2x + 1}{4}$	$\frac{\sqrt{2x^2 + 2x + 1}}{4}$	0.5

2) Горизонталдык байланышты колдонуп төмөнкү теңдемени алабыз.

$$\frac{2x + 1}{4} - \frac{\sqrt{2x^2 + 2x + 1}}{4} = 0,5$$

$2x + 1 - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2$

$\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$=2x+1-2

$\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$=2x-1

$2x^2 + 2x + 1=(2x-1)^2$

$2x^2 + 2x + 1= 4x^2-4x+1$

$2x^2 - 6x = 0$

2x(x-3)=0

а) 2x=0 x=0 маселенин шартын канааттандырбайт.

б) x-3=0 x=3

3) AB=3 (км)

BC=x+1=3+1=4 (км)

Жообу: узуну – 4 км.

туурасы – 3 км.

18-маселе. Шаардан 60 км аралыкта турган айылдан атасы велосипед менен дем алыш күнү өтүүчү иш-чарага келмек. Бирок ал иш-чара башка күнгө которулуп калганга, кызы атасына эскертүү үчүн мотоцикл менен чыкты. Жолугушканда экөө тең бир убакта чыгышкандары белгилүү болду, бирок кызынын ылдамдыгы атасынан эки эсе чоң эле, жолугушкандан кийин артка кайрылышып ар бири өздөрүнүн ылдамдыктарын 2 км/саатка чоңойтушуп, атасы айылга келгенден, беш мүнөттөн кийин шаарга жетти. Алардын алгачкы ылдамдыктары кандай эле?

Атасынын алгачкы ылдамдыгы – x (км/с)

Кызынын алгачкы ылдамдыгы – 2x (км/с)

шарт боюнча x>0;

5 мин = $\frac{1}{12}$ саат

1)		кызы	атасы	байланыш
Жолукканга чейин	S	2 t x	t x	2tx+tx=60
	V	2x	x	-
	t	t	t	-
Жолуккандан кийин	S	2 t x	t x	-
	V	2x+2	x+2	-
	t	$\frac{2tx}{2x+2}$	$\frac{tx}{x+2}$	$\frac{1}{12}$

2) $\begin{cases} 2tx + tx = 60 \ (1) \\ \frac{2tx}{2x+2} - \frac{tx}{x+2} = \frac{1}{12} \ (2) \end{cases}$

Биринчи теңдемеден

3tx=60

tx=20 маанисин (2) теңдемеге коюп

$\frac{40}{2x+2} - \frac{20}{x+2} = \frac{1}{12}$ теңдемесин чыгарабыз.

$12\cdot40(x+2)-12\cdot20(2x+2)=(2x+2)(x+2)$

$780x+960-480x-480=2x^2+4x+2x+4$

$480=2x^2+6x+4$

$2x^2+6x+4-480=0$

$2x^2+6x-476=0$

$x^2+3x-238=0$

$D=3^2-4\cdot(-238)=961$

$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{961}}{2} = \frac{-3\pm31}{2}$

$x_1=\frac{-3+31}{2} = \frac{28}{2} =14$

$x_2=\frac{-3-31}{2}=\frac{-34}{2}=-17$ маселенин шартын канааттандырбайт

3) кызынын ылдамдыгы 2x=2·14=28 км/саат

атасынын ылдамдыгы x=14 км/саат

Жообу: 14 км/саат; 28 км/саат

19-маселе. Пристандан шаарга чейин ылдамдыгы 12 км/саат болгон кайык жөнөдү. Жарым саат өткөндөн кийин ошол эле багыт менен ылдамдыгы 20 км/саат болгон пароход чыгып, шаарга кайыктан 1,5 саат мурда жеткени белгилүү болсо, пристандан шаарга чейинки аралыкты тапкыла.

Чыгаруу: кайык пароходдон 0,5саат+1,5саат=2саат көп убакыт жүргөн.

Пристандан шаарга чейинки аралыкты S менен белгилейли, мында S>0

	Кайык	Пароход	Айырмасы
S	S	S	-
V	12	20	-
t	$\frac{S}{12}$	$\frac{S}{20}$	2

$$\frac{S}{12}-\frac{S}{20}=2$$

$$\frac{2S}{60}=2$$

S=60

Жообу: 60 км

20-маселе. Дарыянын агымы менен жүрүп, катер 4 саатта x км өттү. Дарыянын агымынын ылдамдыгы y км/с. Айтылыш менен туюнтманын арасындагы дал келүүчүлүктү түзгүлө [14].

	АЙТЫЛЫШТАР:		**ТУЮНТМАЛАР:**
А	Катердин өздүк ылдамдыгы	**1**	$0,3x - 2,4y$
Б	Катердин агымга каршы 4 саатта жүргөн аралыгы	**2**	$0,2x - 1,2y$
В	Катер агым боюнча 16 км ди канча убакытта өтөт.	**3**	$\frac{64}{x}$
Г	Катердин агымга каршы ылдамдыгы 20%ке жогорулагандагы ылдамдыгы	**4**	$\frac{x}{4} - y$
		5	$x - 8y$

Бул маселелерди чыгаруу үчүн $S = v \cdot t$; $v = \frac{S}{t}$; $t = \frac{S}{v}$ формулалар колдонулат. Ылдамдыктын 4 түрү бар.

1. Суу транспортунун өздүк ылдамдыгы - $v_{өз.}$
2. Агымдын ылдамдыгы - $v_{аг.}$
3. Транспорттун агым боюнча ылдамдыгы – $v_{аг.б.}$
4. Транспорттун агымга каршы ылдамдыгы – $v_{аг.к.}$

Алардын арасындагы байланыштар: $v_{аг.б.} = v_{өз.} + v_{аг.}$

$$v_{аг.к.} - v_{өз.} - v_{аг.}$$

Маселенин берилиши боюнча $v_{аг.б.} = \frac{S}{t} = \frac{x}{4}$

А. Катердин өздүк ылдамдыгы $v_{өз.} = v_{аг.б.} - v_{аг.} = \frac{x}{4} - y$ Жообу:(4)

Б. Катердин агымга каршы 4 саатта жүргөн аралыгы

$v_{өз.} = \frac{x}{4} - y$	$v_{аг.к.} = v_{аг.к.} - v_{өз.} - v_{аг.} = \left(\frac{x}{4} - y\right) - y = \frac{x}{4} - 2y = \frac{x-8y}{4}$
$t = 4$	$S_{аг.к.} = v_{аг.к.} \cdot t = \frac{x-8y}{4} \cdot 4 = x - 8y$ Жообу: (5)
$S_{аг.к.}$ - ?	

В. Катер агым боюнча 16 км ди канча саатта өтөт.

$S_{\text{аг.б.}} = 16$	$t = \frac{16}{\frac{x}{4}} = \frac{64}{x}$ Жообу: (3)
$v_{\text{аг.б.}} = \frac{x}{4}$	
t - ?	

Г. Катердин агымга каршы ылдамдыгын 20% ке жогорулатылгандагы ылдамдыгы

120% = 1,2

$v_{\text{аг.к.}} = \frac{x-8y}{4}$ $\frac{x-8y}{4} \cdot 1{,}2 = \frac{x-8y}{4} \cdot \frac{6}{5} = \frac{3x-24y}{10}$ =0,3 x – 2,4 y

Жообу: (1)

Айтылыш менен туюнтмалардын арасындагы дал келүүчүлүк:

А – 4

Б – 5

В – 3

Г – 1

Өз алдынча чыгарууга маселелер

21-маселе. Эки велосипедист А жана В пункттарынан бир убакта чыгышып саат 13:00до жолугушушту, андан ары жолдорун улап көздөгөн жерлерине биринчиси саат 17:00до, экинчиси андан 5 саат кеч жеткендиги белгилүү болсо, алар жолго саат канчада чыгышкан?

(Жообу: 7:00)

Таблицаны толтуруп, математикалык модель алып, маселени чыгаргыла.

		1-велосипедист	2-велосипедист	байланыш
Жолукканга чейин	S			
	V			
	t			
Жолуккандан кийин	S			
	V			
	t			

22-маселе. Автомобиль аралыгы 300 км болгон А пунктунан В пунктуна чейинки аралыкты басып өтүп, кайра Вдан Ага бараткандан 1 саат 12 минутадан кийин, ылдамдыгын 16 км/саатка чоңойтуп, жыйынтыгында бараткан жолго караганда келаткан жолго 48 мин аз сарптады. Автомобилдин алгачкы ылдамдыгын тапкыла.

1саат 12 мин=1$\frac{12}{60}$саат=1$\frac{1}{5}$саат=$\frac{6}{5}$саат

48 мин=$\frac{48}{60}$саат=$\frac{4}{5}$саат

Алгачкы ылдамдыгы – x км/саат, шарт боюнча x>0.

	Адан Вга	Вдан К га	Кдан А га	Айырмасы
S	300	$\frac{6}{5}x$	300-$\frac{6}{5}x$	-
V	x	x	x+16	-
t	$\frac{300}{x}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{300-\frac{6}{5}x}{x+16}$	$\frac{4}{5}$

$$\frac{300}{x}=\frac{6}{5}+\frac{300-\frac{6}{5}x}{x+16}+2$$

$$\frac{300}{x} = \frac{1500 - 6x}{5(x + 16)} + 2$$

$5 \cdot 300(x+16)=1500x-6x^2+10x(x+16)$

$1500x+24000=1500x-6x^2+10x^2+160x$

$4x^2+160x—24000=0$

$x^2+40x-6000=0$

$x_1=60$

$x_2=-100$ (маселенин шартын канааттандырбайт)

Бараткандагы ылдамдыгы 60 км/саат.

(Жообу: 60 км/саат)

23-маселе. Аралыгы 80км болгон эки пункттан бир убакта ылдамдыктары 20 км/саат болгон эки велосипедист чыккандагы биринчи велосипедисттин башына конуп турган аары 45 км/саат ылдамдык менен учуп чыгып, экинчи велосипедисттин башына конуп, кайра биринчи велосипедистке ошентип отуруп эки велосипедист жолугушканча ары бери учуп жүрө берди. Аары эки велосипедист чыккандан жолугушканга чейин канча аралыкта учуп өткөн?

Чыгаруу: Эки велосипедист 80/(20+20)=2 саатта жолугушат.

Эки саатта аары $45 \cdot 2 = 90$ км аралыкта учкан. Жообу: 90 км.

24-маселе. А жана В пристандарынын арасындагы аралыкты катер агым боюнча 3 саатта, агымга каршы 5 саатта өтөөрү белгилүү болду. Эгерде катердин өздүк ылдамдыгы 12 км/саат болсо, А жана В пристандарынын арасындагы аралыкты тапкыла (7-сүрөт).

(Жообу: 45 км)

7-сүрөт

25-маселе. Автобус A пунктунан B пунктуна чейинки аралыкты 40 км/саат, B пунктунан C пунктуна чейинки аралыкты 60 км/саат, ал эми C пунктунан D пунктуна чейинки аралыкты 24 км/саат ылдамдык менен өттү. Пункттардын арасындагы аралык бирдей. Автобустун Адан Dга чейинки орточо ылдамдыгын тапкыла.

(Жообу: 36 км/саат)

26-маселе. Составында алтын менен күмүш болгон эки куйма бар. Биринчи куйма жогорку металлдар 1:2, экинчисинде 2:3 катышындай катышат жаңы куймада алтын менен күмүштүн катышы 7:12 болгондой 19г куйманы алыш үчүн, ар бир куймадан канча граммдан алыш керек?

I куйма – x, x>0

II куйма – y, y>0

	I куйма	II куйма	Жаңы куйма
Бардыгы	x	y	19
Алтын	$\frac{1}{3}x$	$\frac{2}{5}y$	$\frac{7}{19}\cdot 19 = 7$
Күмүш	$\frac{2}{3}x$	$\frac{3}{5}y$	$\frac{12}{19}\cdot 19 = 12$

$$\begin{cases} x + y = 19 \\ \frac{1}{3}x + \frac{2}{5}y = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 19 \\ 5x + 6y = 105 \end{cases}$$

y=19-x

5x+6(19-x)=105

5x+114-6x=105

-x=105-114

-x=-9

x=9

y=19-9=10 I куймадан 9г

II куймадан 10г алыш керек

(Жообу: 9г;10г)

27-маселе. Үйдө 60% түү апельсин ширесинин концентраты бар. Суу кошкондон кийин 20% түү 3 литр апельсин ширесин алыш үчүн концентраттан канча литр алуу керек?

(Жообу: 1 л)

28-маселе. Куйма А жана В металлдарынан турат жана m:n катышында. Экинчи куйма болсо, металлдар p:q катышында. 1 кг жаңы куймада ар бир металл бирдей өлчөмдө болушу үчүн ар бир куймадан канчадан алуу керек?

I - куйма-x кг десек, мында 0<x<1

	I куйма	II куйма	Бардыгы
бардыгы	x	1-x	1
1-металл	$\frac{m}{m+n}x$	$\frac{p}{p+q}(1-x)$	0,5
2-металл	$\frac{n}{m+n}x$	$\frac{q}{p+q}(1-x)$	0,5

$$\frac{m}{m+n}x+\frac{p}{p+q}(1-x)=0,5$$

же

$$\frac{n}{m+n}x+\frac{q}{p+q}(1-x)=0,5$$

Теңдемелерин алабыз ал теңдемелер тең күчтүү теңдемелер.

Ошондуктан (1) син эле алалы

$$\frac{m}{m+n}x+\frac{p}{p+q}(1-x)=0{,}5$$

$$\frac{m}{m+n}x+\frac{p}{p+q}-\frac{p}{p+q}x=0{,}5$$

$$\frac{m}{m+n}x-\frac{p}{p+q}x=0{,}5-\frac{p}{p+q}$$

$$\left(\frac{m}{m+n}-\frac{p}{p+q}\right)x=\frac{0{,}5p+0{,}5q-p}{p+q}$$

$$\frac{mp+mq-mp-np}{(m+n)(p+q)}x=\frac{0{,}5q-0{,}5p}{p+q}$$

$$\frac{mq-np}{(m+n)(p+q)}x=\frac{0{,}5(q-p)}{p+q}$$

$$x=\frac{0{,}5(q-p)}{p+q}:\frac{mq-np}{(m+n)(p+q)}$$

$$x=\frac{0{,}5(q-p)}{p+q}\cdot\frac{(m+n)(p+q)}{mq-np}$$

$$x=\frac{(m+n)(q-p)}{2(mq-np)}=\frac{1}{2}+\frac{nq-mp}{2(mq-np)}$$

Экинчи куйманын салмагын табабыз:

$$1-x=1-\left(\frac{1}{2}+\frac{nq-mp}{2(mq-np)}\right)=1-\frac{1}{2}-\frac{nq-mp}{2(mq-np)}=\frac{1}{2}-\frac{nq-mp}{2(mq-np)}$$

Жообу: I куйма $\frac{1}{2}+\frac{nq-mp}{2(mq-np)}$ (кг)

II куйма $\frac{1}{2}-\frac{nq-mp}{2(mq-np)}$ (кг) алынган.

29-маселе. 10% цинкти кармаган 5 кг цинк менен жездин кошулмасына 5 кг таза жезди кошуп эриткенде алынган куймадагы цинктин проценттик катышын тапкыла.

(Жообу: 5%)

30-маселе. 2 л 10% түү уксус кислотасына 8 л таза суу куюлду. Жаңы алынган эритменин проценттик катышын тапкыла.

(Жообу: 2%)

31-маселе. 735г 16%түү йоддун спирттеги эритмесинен, 10%түү эритме алуу үчүн канча спирт кошуу керек?

(Жообу: 44г)

32-маселе. Алтын күмүштөн 20 кг аз болгон 40 кгдын куймага 60 кг таза күмүштү куюп, жаңы куйма алышты. Жаңы куймадагы алтындын процентин тапкыла.

(Жообу: 10%)

Жумушка карата маселелер

33-маселе. Эки жумушчу бирге иштеп кандайдыр бир жумушту t саатта бүтүрө алат. Эгерде ал жумушту ар бири өз алдынча иштешсе, бирөө экинчисине караганда 4 саатка эрте бүтөөрү белгилүү болсо, ар бири өз алдынча иштешсе бул жумушту канча убакытта бүтүрөт?

(Жообу: I –($t-2+\sqrt{t^2+4}$) саат

II –($t+2+\sqrt{t^2+4}$) саат)

34-маселе. Бассейн эки труба аркылуу толтурулса 6 саатта толот. Эгерде ар бир труба бассейнди өз алдынча толтурса, анда биринчиси экинчисине караганда 5 саатка эрте толтурат. Экинчи труба өз алдынча бассейнди канча саатта толтурат?

(Жообу: 15 саатта)

35-маселе. Бассейн эки труба аркылуу 4 саатта толот. Биринчи труба бассейнди 5 саатта толтурат белгилүү болсо, экинчи труба өзү жалгыз канча саатта толтурат?

(Жообу: 20 саат)

36-маселе. Биринчи кран аркылуу ванна 10 минутада толот, эки кранда тең ачса, 2 минутада толот. Эгерде экинчи гана кранды иштетсек ванна канча минутада толот?

(Жообу: 2,5 мин)

37-маселе. Бассейн биринчи кран аркылуу 6 саатта, экинчи кран аркылуу 8 саатта толот, үчүнчү кран болсо, 4 саатта бассейндеги толгон сууну төгөт. Эгерде үч кран тең бир моментте иштеп баштаса, бассейн канча убакта толот?

(Жообу: 24 саатта)

38-маселе. Бассейнди биринчи кран 7 саатта толтурат, экинчи кран 12 саатта толгон бассейнди бошотот. Эгерде эки кранды бир моментте ачып койсок бассейн канча убакта толот?

(Жообу: 16,8 саатта)

39-маселе. Эки жумушчу кандайдыр бир жумушту 12 күндө аткара алат, бирөө 8 күн чогу иштегенден кийин биринчи жумушчу башка жумушка которулуп кеткендигине байланыштуу экинчиси канган жумушту бүтүрүүгө 5 күн кетти. Эгерде бул жумушту биринчиси өз алдынча иштесе канча күндө бүтмөк?

(Жообу: 60 күндө)

40-маселе. Теплоход жолдун жарымын 30 км/саат, экинчи жарымын 20 км/саат менен жүргөндүгү белгилүү болсо, теплоходдун орточо ылдамдыгын тап.

(Жообу: 24 км/саат)

41-маселе. Автомашина жүк менен АВ аралыгын 60 км/саат менен өттү. Кайра келе жатканда жүгү жок болгондуктан 90 км/саат ылдамдык менен келди. Автомашинанын орточо ылдамдыгын тапкыла.

(Жообу: 72км/саат)

42-маселе. А шаарынан В шаарына велосипедист жөнөдү, 3 саат өткөндөн кийин В шаарынан Аны көздөй ылдамдыгы 3 эсе көп болгон мотоциклист чыгып, алар А жана В шаарларынын ортосунан жолугушту. Велосипедист жолдо канча саат болгон?

(Жообу: 2,5саат)

43-маселе. Аралыгы 36 км болгон А пунктунан В пунктуна бир убакта ылдамдыктарынын айырмасы 12 км/саат болгон бусик жана такси жөнөшүп, такси бусикке караганда 15 минута эрте жетишкендиги белгилүү болсо, бусиктин ылдамдыгын тап.

(Жообу: 36 км/саат)

44-маселе. Акпаган суудагы ылдамдыгы 15 км/саат болгон моторлуу кайык суунун агымы боюнча 139 $\frac{1}{3}$ км аралыкты өтүп кайра келди. Эгер моторлуу кайык бардык жолго 20 саат сарп кылса, анда дарыянын агымынын ылдамдыгын тапкыла.

(Жообу:4 км/саат)

45-маселе. Поезд 220 км аралыкты белгилүү бир убакытта өтүүгө тийиш эле. Кыймыл башталгандан 2 саат өткөндөн кийин, 10 мин кармалып калган жана көздөгөн жерине өз убагында жетиш үчүн ылдамдыгын 5 км/саат чоңойткон. Поезддин алгачкы ылдамдыгын тап.

(Жообу: 55 км/саат)

46-маселе. Дарыянын жээгинде жайгашкан А пунктунан В пунктуна чейинки аралыкты 6 саатта Вдан Ага чейинки аралыкты 8 саатта өтөт. А пунктунан В пунктуна катер чыкканда плот жөнөтүлөт. Катер В пунктуна жетери менен кайра кайрылып, А пунктун көздөй жөнөдү да, жолдон плот менен жолукту. Плот бул учурда АВ аралыгынын канча бөлүгүн баскан?

(Жообу: $\frac{1}{4}$)

47-маселе. Адан Вга чейинки жол тоону көздөй, дагы бир бөлүгү тоодон ылдый карай, калган бөлүгү түз жол. Түз жолдогу ылдамдыгы 15 км/саат болгон велосипедист тоону карай 12 км/саат ылдамдык менен жүрөт. Эгерде Адан Вга барып келгенге велосипедист 4 саат убактысын кетирген болсо, Адан Вга чейинки аралыкты тапкыла.

(Жообу: 30 км)

48-маселе. Поезд А пунктунан В пунктуна жөнөдү. 450 км башкача айтканда жолдун 75% ин жүргөндөн кийин семафордун жанында 30 мин кармалып келди, В пунктуна өз убагында келүү үчүн ылдамдыгын 15 км/саатка чоңойтту. Поезддин кийинки ылдамдыгын тапкыла.

(Жообу 75 км/саат)

49-маселе. Адан Вны көздөй почта ташыган машина чыккан. 20 минутадан кийин ылдамдыгы 45 км/саат болгон экинчи машина чыгып 1-машинаны кууп жетип пакетти берип, ошол эле ылдамдык менен артка кайтты. Качан 1-машина Вга жеткенде, экинчисине Ага жетиш үчүн жолуккандан Ага чейинки жолдун жарымы калган. Эгерде А жана В пункттарынын арасындагы аралык 40 км экендиги белгилүү болсо, 1-машинанын ылдамдыгын тапкыла.

(Жообу: 30 км/саат)

6. ЭҢ ЧОҢ ЖАНА ЭҢ КИЧИНЕ МААНИЛЕРИН ТАБУУГА КАРАТА МАСЕЛЕЛЕРДИ ЧЫГАРУУ

Жогорку класстарда тексттик маселе чыгаруу «Функциянын эң чоң жана эң кичине маанилерин табуу» деген темада кездешет. Эң чоң же эң кичине маанини табууга арналган практикалык маселелерди чыгарууда математикалык моделдөө методу колдонулат. Ал төмөнкү этап менен иштелет.

1-этап. Маселе функциянын тилине которулат. Ал үчүн ыңгайлуу x параметри тандалып алынат, бизди кызыктырган чоңдук, ал параметр аркылуу f(x) функциясы түрүндө туюнтулат;

2-этап. Бул функциянын эң чоң жана эн кичине маанилери, кандайдыр бир аралыкта, матанализдин каражаттары аркылуу изилденет;

3-этап. Алынган жыйынтык (функциянын тилинде) кандай практикалык мааниге ээ болору (баштапкы маселенин терминдеринде) такталат.

Кыскача бул китептин башталышында көрсөтүлгөндөй практикалык маселелерди чыгаруунун үч этабы каралган:

1) Формалдаштыруу;

2) Математикалык моделди чыгаруу;

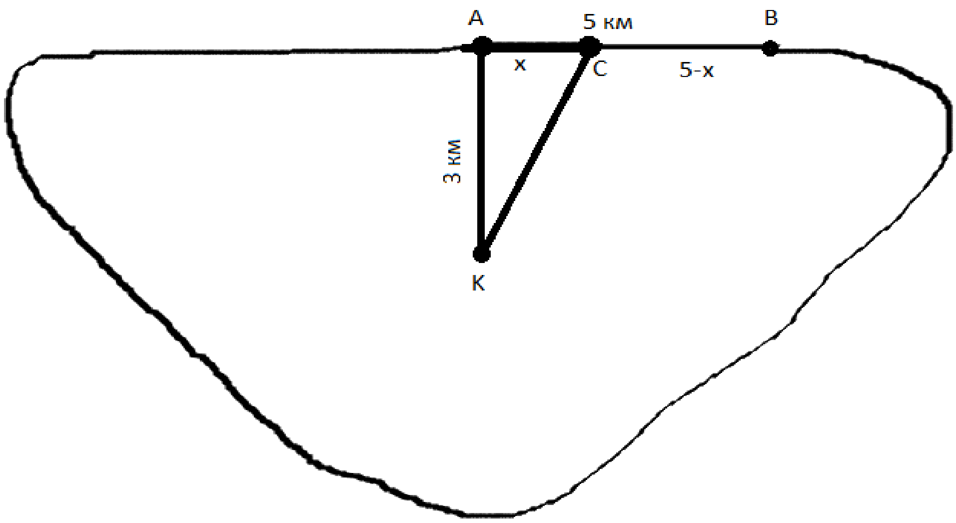
3) Табылган чыгарылышты интерпретациялоо.

Эң чоң жана эң кичине маанини табууга төмөнкү тексттик маселелерди карайлы [8].

Көлдүн жээгинин эң жакынкы А чекитинен 3 км аралыкта кайык жүрөт. Кайыктагы адам А чекитинен 5 км аралыкта жайланышкан жээктеги В айылына (жээктин АВ бөлүгү түз сызыктуу деп эсептелет) баргысы келет. Кайык 4 км/саат ылдамдык менен кыймылдайт, ал эми кайыктагы адам, кайыктан түшүп алып саатына 5 км жөө жүрө алат. Адам айылга эң кыска убакытта барыш үчүн, кайык жээктин кайсы пунктуна токтош керек?

Чыгаруу:

1-этап.



8-сүрөт

К чекити – кайыктын алгачкы орду.

С чекити – жээктеги кайык токтогон чекит.

Анда АС аралыгын х десек, СВ=5-х болот (8-сүрөт).

Маселенин мааниси боюнча х саны $0 \le x \le 5$ шартын канагаттандырат.

Таблицаны толтуралы

Окуялар Компоненттер	Көлдө (КС маршруту)	Жээкте (СВ маршруту)	Бардыгы
S (км)	$\sqrt{3^2+x^2}$	5-x	—
V (км/с)	4	5	—
t (сааты)	$\frac{\sqrt{3^2+x^2}}{4}$	$\frac{5-x}{5}$	$\frac{\sqrt{3^2+x^2}}{4}+\frac{5-x}{5}$

$$t=\frac{\sqrt{3^2+x^2}}{4}+\frac{5-x}{5}$$

t чоңдугу x аргументинен көз каранды болгондуктан,

t(x) функциясы катары карасак болот.

$$t(x)=\frac{\sqrt{3^2+x^2}}{4}+\frac{5-x}{5}$$

Биз маселени кыргыз тилинен математика тилине которуп, төмөнкү математикалык моделди алдык.

$$t(x)=\frac{\sqrt{3^2+x^2}}{4}+\frac{5-x}{5} \qquad t(x)=\frac{\sqrt{9\ +x^2}}{4}+1-\frac{x}{5}$$

жогоруда алынган функциянын [0;5] кесиндисиндеги эң кичине маанисин тапкыла.

2-этап

Математикалык моделди чыгаруу:

Функциянын эң кичине маанисин табуу үчүн бардык сыналуучу чекиттерде жана кесиндинин учтарында функциянын маанилерин эсептөө керек да, андан кийин алынган сандардын эң кичинесин тандап алуу керек.

а) Функциянын туундусун табабыз:

$t(x) = \frac{1}{4}\sqrt{9 + x^2}$+1- $\frac{1}{5}$x

$t'(x) = \frac{1}{4}\frac{1}{2\sqrt{9+x^2}}2x - \frac{1}{5} = \frac{5x-4\sqrt{9+x^2}}{20\sqrt{9+x^2}}$

б) Сыналуучу чекиттерди табабыз:

$$\frac{5x-4\sqrt{9+x^2}}{20\sqrt{9+x^2}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 4\sqrt{9+x^2} = 0 \\ 9 + x^2 \neq 0 \end{cases}$$

$$5x - 4\sqrt{9+x^2} = 0$$

$$4\sqrt{9+x^2} = 5x$$

$\sqrt{9+x^2} = \frac{5}{4}x$ теңдеменин эки жагын тең квадратка көтөрөбүз

($x>0$)

$9+x^2=\frac{25}{16}x^2$

$$\frac{25}{16}x^2 - x^2 = 9$$

$$\frac{9}{16}x^2 = 9$$

$x^2=16$

$x=\pm4$

$x=4$

$x= - 4$ теңдеменин аныкталуу областына кирбейт.

Сыналуучу чекит $x=4$

в) $x=0$, $x=5$ жана $x=4$ чекиттериндеги функциянын маанилерин издейбиз.

$t(0) = \frac{1}{4}\sqrt{9+0^2}+1-\frac{1}{5}\cdot 0 = 1{,}75$

$t(5) = \frac{1}{4}\sqrt{9+5^2}+1-\frac{1}{5}\cdot 5 = \frac{\sqrt{34}}{4} \approx 1{,}457$

$t(4) = \frac{1}{4}\sqrt{9+4^2}+1-\frac{1}{5}\cdot 4 = \frac{29}{20} = 1{,}45$

$\min\limits_{[0;5]} t(x)$ =t(4)=1,45

Математикалык моделдин жообу:

$\min\limits_{[0;5]} t(x)$ =t(4)=1,45

3-этап

Эми, берилген шарттарда мүмкүн болгон минималдуу убакытка ээ болгон АС аралыгы х экендигин эске түшүрүү керек.

Алынган жыйынтык:

Кайыктагы адам А чекитинен 4 км аралыкта турган С чекитине кайык менен сүзүп барып, калган 1 кмди жээк менен жөө басканда эң аз убакыт талап кылынаарын билдирет.

1. Сызыктуу өлчөмдөгү 5x8 дм болгон тик бурчтук формасындагы темир тунукеден (листтен) төрт бурчунан бирдей өлчөмдөгү квадраттарды кесип алып, калган бөлүгүнөн үстү ачык коробка жасашты. Коробканы кандай жасаганда сыйымдуулугу эң чоң болот?

Чыгаруу:

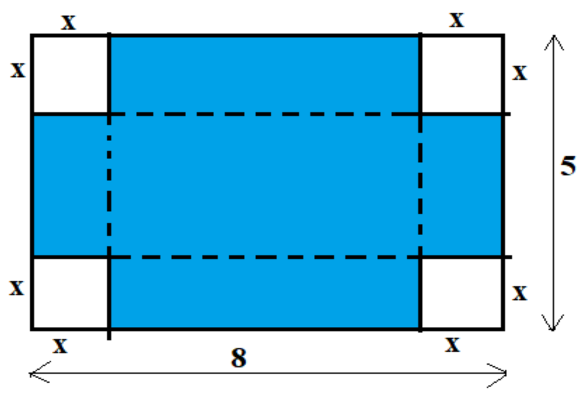
Төрт бурчтуктун төрт бурчунан жагы х ке барабар болгон квадратты кесип алалы.

Мында 0<x<2,5

Жасалган коробканын

Узундугу – 8 – 2x

Туурасы – 5 – 2x (9-сүрөт)



9-сүрөт.

Бийиктиги – x дейли

Коробканын көлөмү

V= (8-2x)(5-2x)·x

V= $4x^3$-$26x^2$+40x

Көлөм x өзгөрмөсүнөн көз каранды болгондуктан

V(x)= $4x^3$-$26x^2$+40x функциясынын x∊(0:2,5) аралыгындагы эң чоң маанисин издейбиз.

V(x)= $4x^3$-$26x^2$+40x

V\`(x)=$12x^2$-52x+40

V\`(x)=0 сыналуучу чекиттерин табабыз.

$12x^2$-52x+40=0   (4 кө бөлөбүз)

$3x^2$-13x+10=0

$$D=(-13)^2-4\cdot 3\cdot 10=169-120=49$$

$$x_{1,2}=\frac{13\pm\sqrt{49}}{2\cdot 3}=\frac{13\pm 7}{6}$$

$$x_1=\frac{13+7}{6}=\frac{20}{6}=\frac{10}{3}=3\frac{1}{3} \qquad x_1\notin(0:2,5)$$

$$x_2=\frac{13-7}{6}=\frac{6}{6}=1 \qquad x_2\in(0:2,5)$$

x∈(0;1)   V\`(x)= V\`(0,5)>0 демек

x∈(1;2,5) V\`(x)= V\`(1,1)<0   x=1 max   чекити   x=1

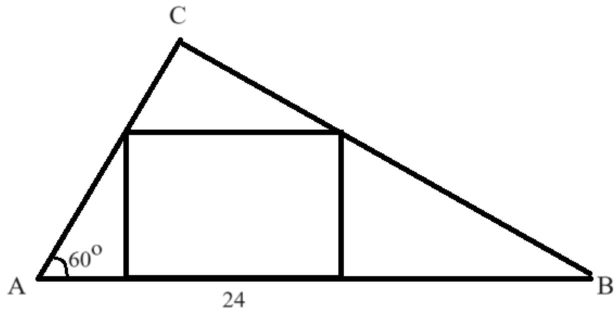
V(1)=(8-2·1)(5-2·1)1=6·3·1=18

$\max\limits_{[0;2,5]} V(x)$= V(1)=18

Төрт бурчтуктун төрт бурчунан жагы 1 дм болгон квадраттарды кесип алып, калган бөлүгүнөн үстү ачык коробка жасаганда анын сыйымдуулугу 18 $дм^2$ болот.

(Жообу: 18 $дм^3$)

2. Гипотенузасы 24 см, бир бурчу 60º болгон тик бурчтуу үч бурчтукка ичтен тик бурчтук сызылган. Тик бурчтуктун аянты эң чоң болуш үчүн, анын жактары кандай болуусу керек (10-сүрөт)?



10-сүрөт

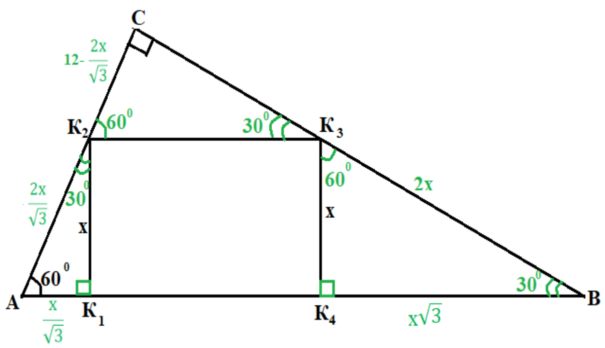
ΔABC нын бурчтары 60º-30º-90º болгондуктан (11-сүрөт)

AB=24 см

AC=12 см

BC=$12\sqrt{3}$ см

Тик бурчтуктун бир жагын x деп белгилейли мында x∈(0:12)



11-сүрөт

$K_1K_4=AB-(AK_1+K_4B)=24-\left(\frac{x}{\sqrt{3}}+x\sqrt{3}\right)=24-\frac{4}{\sqrt{3}}x$

$$S_{K_1K_2K_3K_4}=K_1K_2\cdot K_1K_4$$

$S_{K_1K_2K_3K_4}=x\cdot(24-\frac{4}{\sqrt{3}}x)=24x-\frac{4}{\sqrt{3}}x^2$

$S(x)=24x-\frac{4}{\sqrt{3}}x^2$ функциясынын $x\in(0;12)$ интервалында эң чоң маанисин эсептейли.

$S'(x) = (24x - \frac{4}{\sqrt{3}}x^2)'$

$S'(x) = 24 - \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot 2x = 24 - \frac{8x}{\sqrt{3}}$

$$24 - \frac{8x}{\sqrt{3}} = 0$$

$$\frac{8}{\sqrt{3}}x = 24$$

$x = 3\sqrt{3}$

$x \in (0; 3\sqrt{3})$ $S'(1) = 24 - \frac{8 \cdot 1}{\sqrt{3}} > 0$ $S(x)$ – бул интервалда өсөт.

$x \in (3\sqrt{3}; 12)$ $S'(6) = 24 - \frac{8 \cdot 6}{\sqrt{3}} = 24 - \frac{48}{\sqrt{3}} < 0$ $S(x)$ – бул интервалда кемийт.

$x = 3\sqrt{3}$ чекитинде $S(x)$ функциясынын туундусу өсүүдөн кемүүгө өттү. Демек $x = 3\sqrt{3}$ чекитинде $S(x)$ функциясы эң чоң мааниге ээ болот.

$\max\limits_{[0;12]} S(x) = S(3\sqrt{3}) = 3\sqrt{3} \cdot (24 - \frac{4 \cdot 3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}) = 3\sqrt{3}(24 - 12) = 3\sqrt{3} \cdot 12 = 36\sqrt{3}$

Тик бурчтуктун жактары

$K_1K_2 = x = 3\sqrt{3}$

$K_1K_4 = 24 - \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot 3\sqrt{3} = 24 - 12 = 12$

Гипотенузасы 24 см ге барабар болгон тик бурчтуу үч бурчтукка ичтен сызылган тик бурчтуктун жактары $3\sqrt{3}$ см жана 12 см болгондо тик бурчтук эң чоң аянтка ээ болот.

Жообу: $3\sqrt{3}$ см, 12 см.

3. Каптал жактары a га барабар болгон тең капталдуу үч бурчтуктардын ичинен эң чоң аянтка ээ болгон үч бурчтукту тапкыла.

1-жол. AC=BC=a

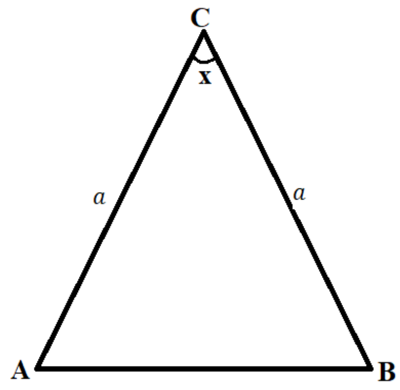
∠ACB=x деп белгилейли (12-сүрөт).

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC\ sin = \frac{1}{2}\ a \cdot a\ sinx$$

S(x)=$\frac{1}{2}\ a^2\ sinx$

a турактуу сан болгондуктан, $sinx$ ти карайлы.

-1≤$sinx$ ≤1 $sinx$ эң чоң маанини x = 90º болгондо алат.



12-сүрөт

Демек тең капталдуу үч бурчтуктардын ичинен тең капталдуу тик бурчтуу үч бурчтук эң чоң аянтка ээ болот.

2-жол.

AC=BC=a

AD=x десек, 0<x< a

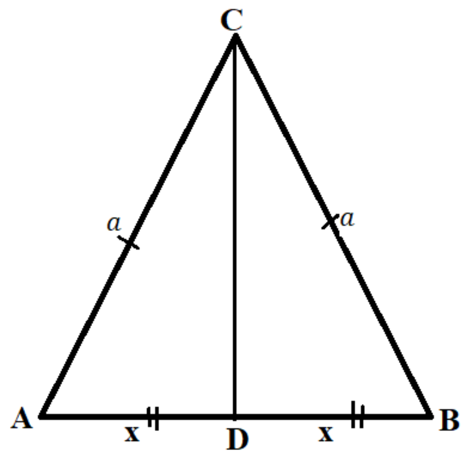
AB=2x

CD=$\sqrt{a^2 - x^2}$ (13-сүрөт)

$$s_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD$$

$$s_{ABC} = \frac{1}{2}\ 2x \cdot \sqrt{a^2 - x^2} =$$

$$=x\ \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2x^2 - x^4}$$



13-сүрөт

Аянт x тен көз каранды

болгондуктан

S(x)= $\sqrt{a^2x^2 - x^4}$ функциясынын

x$\in(0;\,a)$интервалындагы эң чоң

маанисин издейбиз.

$S(x) = \sqrt{a^2x^2 - x^4}$

$S'(x) = \frac{1}{2\sqrt{a^2x^2-x^4}}\cdot(a^2x^2 - x^4)' = \frac{2\,a^2x-4x^3}{2\sqrt{a^2x^2-x^4}} = \frac{a^2x-2x^3}{\sqrt{a^2x^2-x^4}}$

сыналуучу чекитин табабыз.

$$\frac{a^2x-2x^3}{\sqrt{a^2x^2-x^4}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a^2x - 2x^3 = 0 \\ a^2x^2 - x^4 \neq 0 \end{cases}$$

$x(a^2-2x^2) = 0$

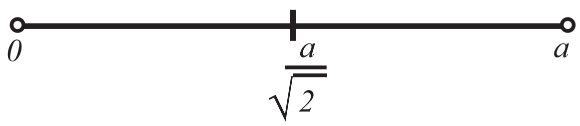
а) x=0   маселенин аныкталуу областына кирбейт

б) $a^2-2x^2=0$

$x^2=\frac{a^2}{2}$

$x=\pm\frac{a}{\sqrt2}$ $x_1=-\frac{a}{\sqrt2}$ маселенин аныкталуу областына кирбейт.

$x_2=\frac{a}{\sqrt2}$



14-сүрөт

а). $x\in\left(0;\frac{a}{\sqrt2}\right)$ (14-сүрөт).

$$S'\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2\frac{a}{2}-2\left(\frac{a}{2}\right)^3}{\sqrt{a^2(\frac{a}{2})^2-(\frac{a}{2})^4}} = \frac{\frac{a^3}{2}-\frac{a^3}{4}}{\sqrt{\frac{a^4}{4}-\frac{a^4}{16}}} = \frac{\frac{a^3}{4}}{\sqrt{\frac{3a^4}{16}}} = \frac{\frac{a^3}{4}}{\frac{a^2\sqrt3}{4}} = \frac{a}{\sqrt3} > 0,$$

$\left(0;\frac{a}{\sqrt2}\right)$ интервалында S(x) өсүүчү.

б). $x\in\left(\frac{a}{\sqrt2};\;a\right)$

$S'(0{,}8\,a) = \frac{a^2\cdot 0{,}8\,a-2(0{,}8\,a)^3}{\sqrt{a^2(0{,}8\,a)^2-(0{,}8\,a)^4}} = \frac{0{,}8a^3(1-2\cdot 0{,}64)}{0{,}8a^2\sqrt{1-0{,}64}} = \frac{-0{,}28\cdot a^3}{0{,}48a^2} < 0,$

$\left(\frac{a}{\sqrt{2}};\ a\right)$ интервалында S(x) кемүүчү.

$x=\frac{a}{\sqrt{2}}$ чекити max чекити.

$\max\limits_{[0;a]} S(x)=S\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = \frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{a^2}{2}$ маанисине ээ болот.

$\frac{a^2}{2}$ бул жагы a болгон квадраттын аянтынын жарымы болгондуктан бул фигура тең жактуу тик бурчтуу үч бурчтук болот.

4. Жактары 18 см, 24 см, 30 см болгон тик бурчтуу үч бурчтуктун ичине аны менен жалпы тик бурчкка ээ болгон ичтен сызылган аянты эң чоң тик бурчтуктун жактарын тапкыла.

BC=18 см

AC=24 см

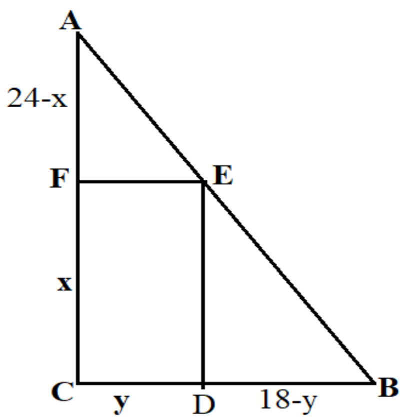
AB=30 см

Биз издеген фигура CDEF болсун.

FD =x десек AF=24-x

EF=y десек DF =18-y мында 0<x<24

ΔEBD ~ ΔABC (15-сүрөт)



15-сүрөт

үч бурчтуктардын окшоштугунан төмөнкү пропорцияны алабыз.

$$\frac{18-y}{x} = \frac{18}{24}$$

$$\frac{18-y}{x} = \frac{3}{4}$$

$18-y= \frac{3}{4}x$

$y=18-\frac{3}{4}x$

$S_{CDEF}=x\cdot y$

$S_{CDEF}=x\cdot(18-\frac{3}{4}x)=18x-\frac{3}{4}x^2$ биз издеген аянт x тен гана көз каранды болгондуктан $S(x)=18x-\frac{3}{4}x^2$

$S'(x)=18-\frac{3}{4}2x=18-1{,}5x$ сыналуучу чекиттерин издейбиз.

$S'(x)=0$

$18-1{,}5x=0$

$1{,}5x=18$

$x=12$

$x=12$ чекити $x\in(0{,}24)$ интервалды эки бөлүккө бөлөт, ошол интервалдардагы туундунун белгисин аныктайбыз.

а). $x\in(0, 12)$ $S'(1)=18-1{,}5\cdot1=16{,}5>0$ бул интервалда функция өсүүчү.

б) $x\in(12, 24)$ $S'(14)=18-1{,}5\cdot14=-3<0$ бул интервалда функция кемүүчү.

$x=12$ чекити өсүүдөн кемүүгө өткөн чекит болгондуктан ал ***max*** чекити болуп эсептелет.

$\max\limits_{[0;24]}S(x)=S(12)=18\cdot12-\frac{3}{4}\cdot12^2=108$

Биз издеген тик буртуктун жактары $x=12$, $y=18-\frac{3}{4}\cdot12=9$ болгондо тик бурчтуу үч бурчтукка ичтен сызылган тик бурчтуктун аянты эң чоң мааниге ээ болот.

Жообу: 12 см, 9 см.

Төмөнкү маселелерди өз алдынча чыгаргыла

5. Жактары 15; 15; 18 см болгон тең капталдуу үч бурчтукка негизиндеги бир бурчу жалпы болгон эң чоң аянтка ээ болгон парелеллограмм сызылган. Паралеллограммдын жактарын таркыла.

Жообу: 9 см, 7,5 см

6. Радиусу кандай болгон тегеректен периметри 56см, аянты эң чоң болгондой тик бурчтукту алууга болот.

Жообу: R=7$\sqrt{2}$ см

7. Октун кесилишинин периметри P га барабар болгон цилиндрлердин ичинен эң чоң көлөмгө ээ болгон цилиндр тандалып алынды. Анын көлөмүн тапкыла.

Жообу: $\frac{\pi P^2}{216}$ куб бирдик.

8. Жүк ташуучу машинанын үстү ачык кузову тик бурчтуу параллелепипед формасында жана толук бети 2S. Эгерде кузовдун узундугунун туурасына болгон катышы 5:2 болсо узун, туурасы кандай болгондо кузовдун көлөмү эң чоң болот?

Жообу: $2\sqrt{\frac{S}{15}}$

9. Негизи гипотенузасы 4 кө барабар болгон тик бурчтуу үч бурчтук, бийиктиги 12 болгон пирамидалардын ичинен эң чоң көлөмгө ээ болгонун тап.

Жообу: 16

10. Тик бурчтуу үч бурчтуктун катеттеринин суммасы 40. Катеттери кандай болгондо тик бурчтуу үч бурчтук эң чоң аянтка ээ?

Жообу: 20 жана 20

11. Бир катети менен гипотенузасынын суммасы l болгон тик бурчтуу үч бурчтуктардын ичинен аянты эң чоңун тапкыла.

Катеттери $\frac{l}{3}; \frac{l}{\sqrt{3}}$ гипотенузасы $\frac{2l}{3}$

12. Аянты 294 $м^2$ болгон тик бурчтук формасындагы участокту тосмо менен курчаш керек жана участокту тең экиге бөлүп тосмо тосуш керек. Участоктун өлчөмү кандай болгондо аны тосконго эң аз сандагы тосмо кетет?

Жообу: 14·21м

13. Туура үч бурчтуу пирамиданын каптал кыры турактуу жана негизинин тегиздиги менен α бурчун түзөт. α нын кандай маанисинде пирамиданын көлөмү эң чоң болот?

$\alpha = \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$ болгондо

14. Тең капталдуу трапециянын каптал жагы кичине негизине барабар. Трапециянын аянты эң чоң болуш үчүн трапециянын негизиндеги бурчу кандай болуу керек?

Жообу: 60^0

15. Аянты 1600$м^2$ болгон тик бурчтуу жер участогунун айланасын тосууга эң кичине сандагы материал жумшоо үчүн, анын жактары кандай болуу керек?

Жообу: 40м; 40м

Окуучулар проблемалык системаны талдоо үчүн кайсы компоненттерди кабыл алынаарында эч кандай өзгөчө айырма жок экенин түшүнүшсө, алар абдан таасирленет. Алар өз тапшырмаларын түзүү жана бир тапшырмадан экинчисине өтүү үчүн толугу менен калыбына келтирилген тапшырма системасын колдонуу мүмкүнчүлүгүнө көбүрөөк кызыктырат.

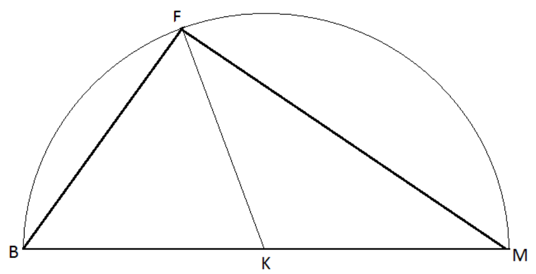
Ошентип, каралып жаткан маселелерди колдонуп, биз тексттик маселелерин чыгарууга алып келүүчү теңдемелерди түзүү, маселе системасын анализдөө ыкмасын кантип колдонууну көрсөттүк.

Белгилей кетсек, бул окутуу методикасы мугалимдин окуучулардын чыгармачылык ой жүгүртүүсүн өнүктүрүү мүмкүнчүлүгүн кеңейтет жана математикалык мыйзам ченемдүүлүктөрдү жана мамилелерди комплекстүү жана системалуу түшүнүүгө мүмкүндүк берет.

7. ДАЯР ЧИЙМЕЛЕРДИН ЖАРДАМЫ МЕНЕН ГЕОМЕТРИЯЛЫК МАСЕЛЕЛЕРДИ ЧЫГАРУУ

В. Шаталов «Мага мектепти бергилечи» деген макаласында: «1-сентябрь күнү мага мен эч качан окутпаган 5-класс келет. Ал эми 12-сентябрь күнү ал класс 5-класстын математика курсу үчүн экзамен берүүгө даяр» - деген. Математика 7-класс. Эгер сиз математик болбосонуз кайгырбай эле коюнуз, бул эң эле жөнөкөй.

1-маселе: Жарым айланага диаметрге таянган ичтен сызылган үч бурчтук чийилген. Диаметрге таянган бурч 90° экендигин далилдегиле.



16-сүрөт

Мектепте азыр бериле турган далилдөөсү:

Берилди: Δ BFM

BM – диаметр

Далилдөө керек: $\angle BFM = 90°$ (16-сүрөт)

Далилдөө: Δ BFK – тең капталдуу BK=FK $\angle FBK = \angle BFK$

Δ FMK – тең капталдуу FK=KM $\angle KFM = \angle KMF$

$$\angle KBF + \angle BFM + \angle FMK = 180°$$

$$\angle BFK + \angle BFK + \angle KFM + \angle KFM = 180°$$

$2(\angle BFK + \angle KFM) = 180°$

$\angle BFK + \angle KFM = 90°$

$\angle BFM = 90°$далилденди

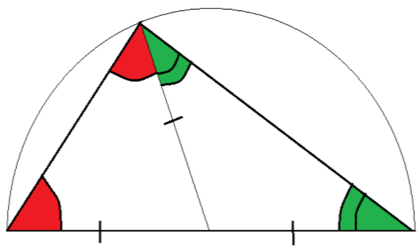
Ким тамгаларды эстеп калды:

BFM бурчу деп айтып М ге жеткенче В ны унутуп каласынар.

Эми ушул маселени биздин методика боюнча далилдеп көрөлү.

Биздин методикада чийме сакталат. Тамгалардын баары кетет. Эгерде тамгалар кетсе: «берилди», «далилдөө керек» деген сөздөр да жазылбайт. Ошентип бардык мишуралар, бутафориялар кетти. Мен окуучулардын көңүлүн ойлонууга жана логикага бурдум.

Менин далилдөөм:



17-сүрөт

Кызыл бурчтар барабар.

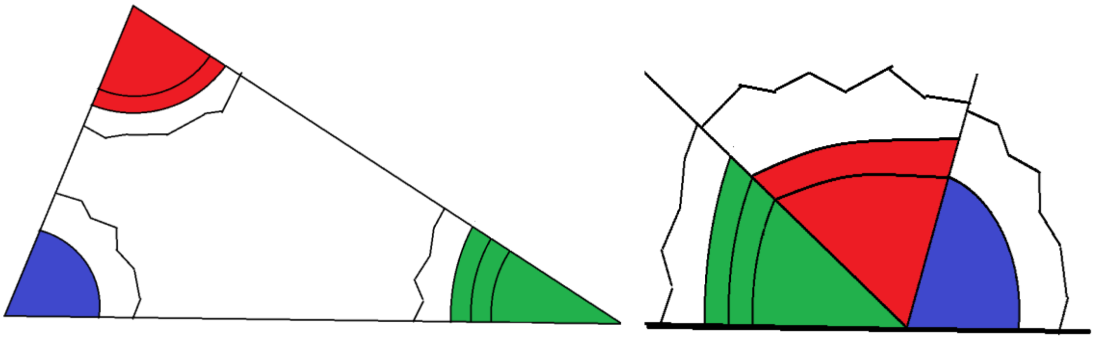
Жашыл бурчтар барабар.

Эки кызыл бурчтар менен эки жашыл бурчтардын суммасы 180°.

Анда кызыл бурч менен жашыл бурчтун суммасы 90° (17-сүрөт).

Буга минута кетти. Ал эми мектепте бул теореманы далилдөөгө 45 минута берилет. Ушул методиканы колдонуп бир сабакта 5-6 теорема далилденет. Жогорку класстарда жуп сабактар болгондуктан, эки сабакта геометриядан бир чейректин материалын бергенге үлгүрүүгө болот. Шаталовдун таяныч конспектилерине таянып «үч бурчтуктун бурчтарынын суммасы» жөнүндөгү теореманы төмөндөгүдөй далилдесе болот [18].

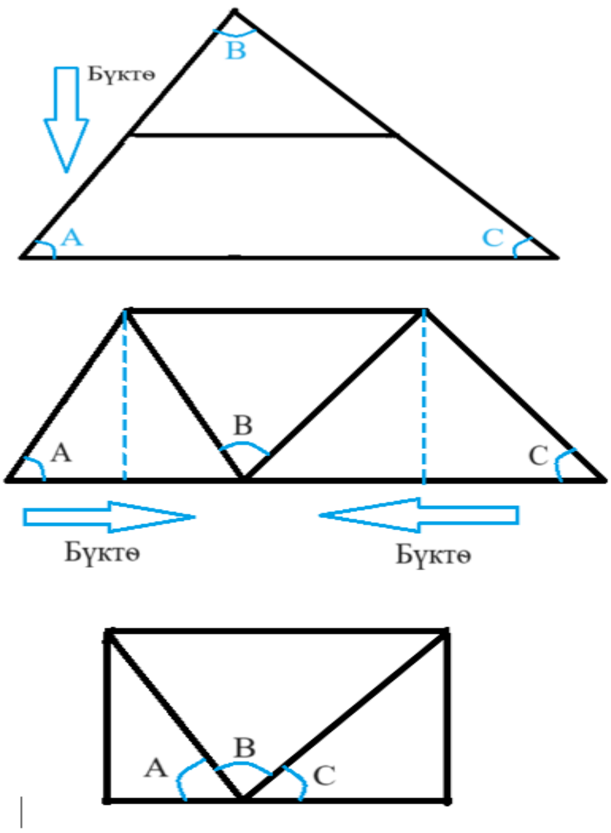
1. Үч бурчтук формасындагы кагаз моделдин бурчтарын айрып, чокуларын бир чекитке алып келип бурчтарды кошсок жайылган бурчту берет (18-сүрөт).



18-сүрөт

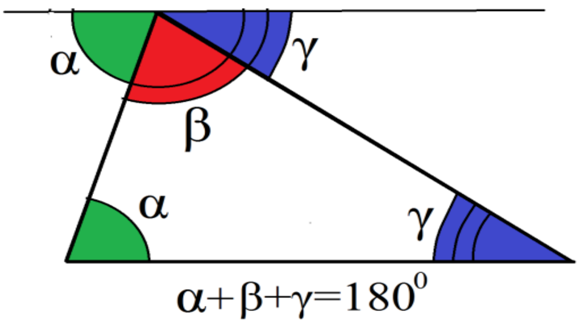
2. Бүктөө жолу менен.

Штрихтелген сызыктар менен кагаздан жасалган үч бурчтукту бүктөсөк, α, β, γ бурчтарынын чокулары бир чекитте биригишет жана ал бурчтардын суммасы жайылган бурчту түзүп калат (19-сүрөт).



19-сүрөт

3. Чийме боюнча



20-сүрөт

Үч бурчтуктун чокусу аркылуу негизине параллель түз сызык жүргүзөбүз. Эгерде окуучулар эки параллель түз сызыкты үчүнчү бир түз сызык кесип өткөнгө пайда болгон бурчтардын касиеттери жөнүндө түшүнүгү болушса оңой эле далилдей алат.

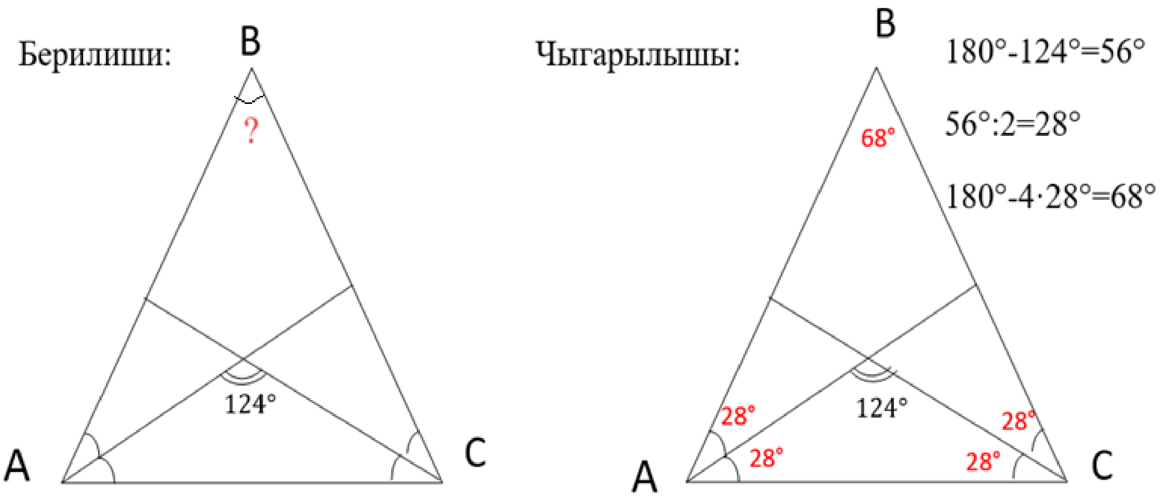
Үч бурчтуктун бурчтарын кызыл, көк жана жашыл түстөр менен боёп коёбуз. Чокусунда пайда болгон ички кайчылаш бурчтарды өз өңдөрү менен боёсок кызыл, көк жана жашыл менен боёлгон бурчтардын суммасы жайылган бурчту берээри чиймеде көрүнүп калат (20-сүрөт).

Геометрия боюнча окуу китептеринде чиймелер өтө аз. Маселелердин бардыгы текст түрүндө берилет. Тексттик маселе-лердин математикалык моделин түзүүгө көп убакыт талап кылынат.

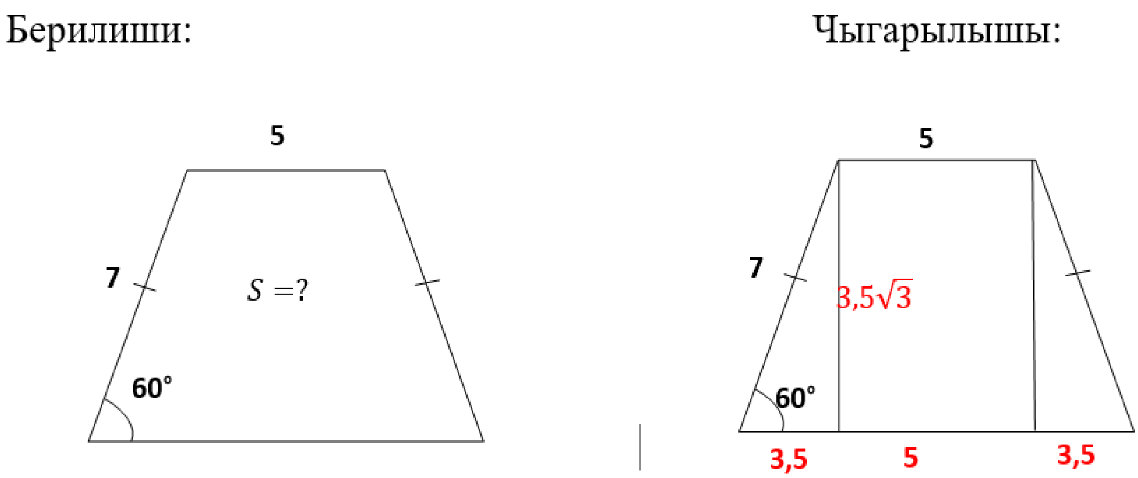
Геометрия сабагында маселе иштөөдө даяр чиймелер менен маселе иштөөгө көп көңүл буруш керек. Окуучулар чиймеде берилгендерди көк сыя, табылган жоопторду жашыл сыя менен жазышат. Кээ бир сабактарда 10-15 ке чейинки маселелерди чыгарууга үлгүрүшөт.

Төмөнкү маселени даяр чийме түрүндө чыгарып көрөлү.

2-маселе.



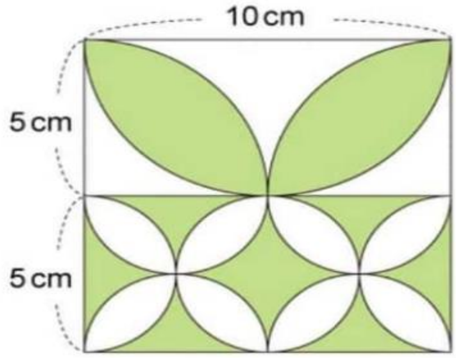
21-сүрөт



22-сүрөт

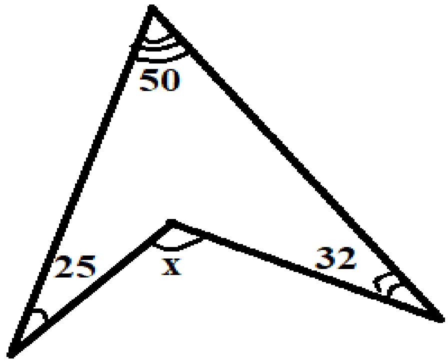
$$S = \frac{12+5}{2} \cdot 3{,}5\sqrt{3} = 29{,}75\sqrt{3}$$

Интернеттен алынган даяр чийме боюнча маселелерди өз алыңарча чыгаргыла [13], [19].



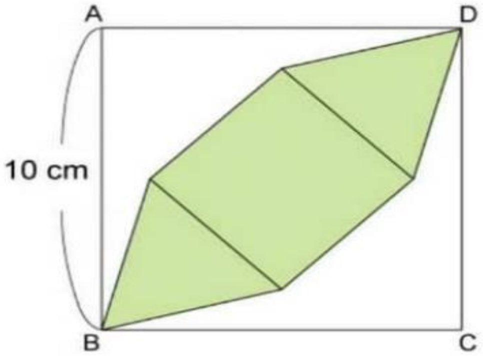
Баардык жашыл бөлүгүн тапкыла?

23-сүрөт

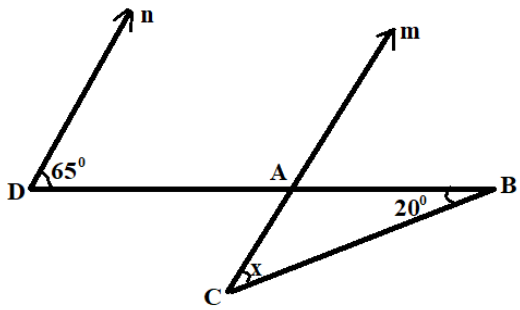


x ти тапкыла.

24-сүрөт

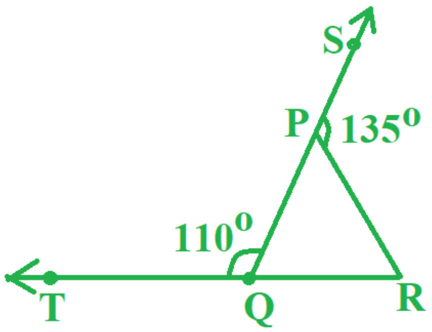


25-сүрөт



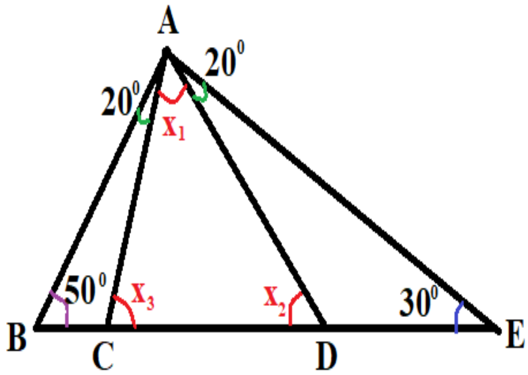
x ти тапкыла.

26-сүрөт



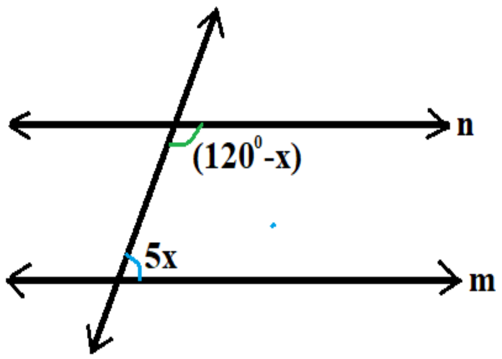
<PRQ=?

27-сүрөт



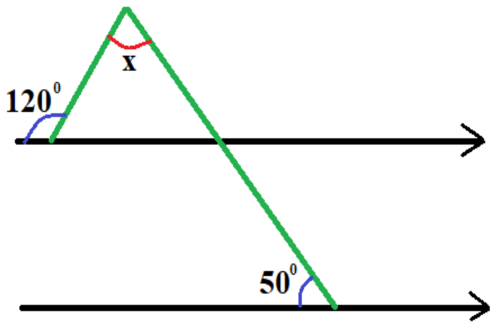
$x_1, x_2.x_3$ тапкыла

28-сүрөт



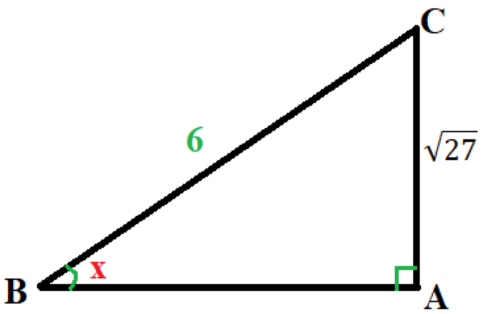
x ти тапкыла.

29-сүрөт



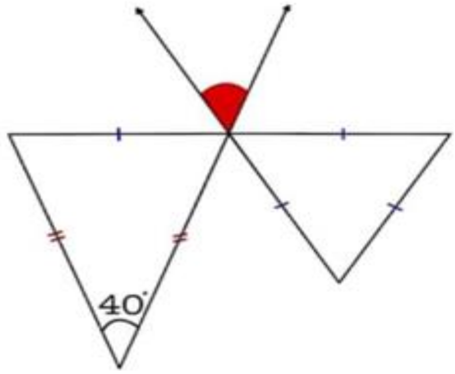
x ти тапкыла.

30-сүрөт



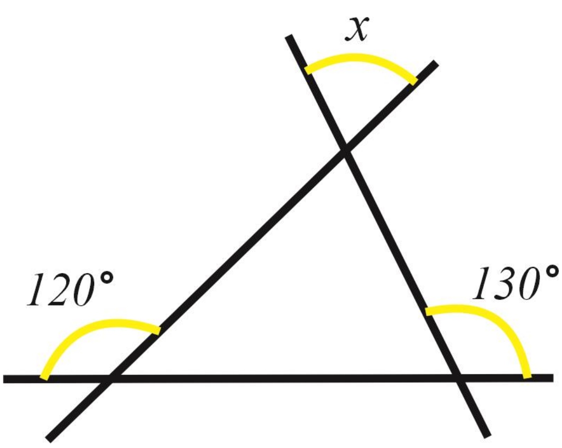
x ти тапкыла.

31-сүрөт



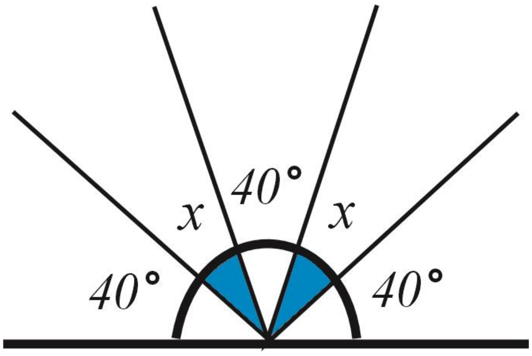
Кызыл бурчту тапкыла?

32-сүрөт



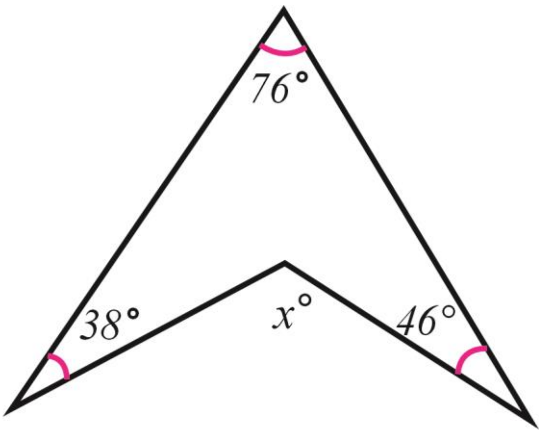
x ти тапкыла.

33-сүрөт



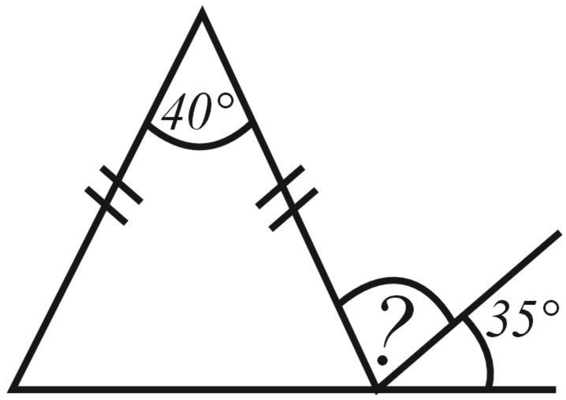
x ти тапкыла.

34-сүрөт



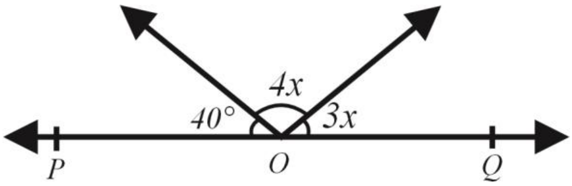
x ти тапкыла.

35-сүрөт



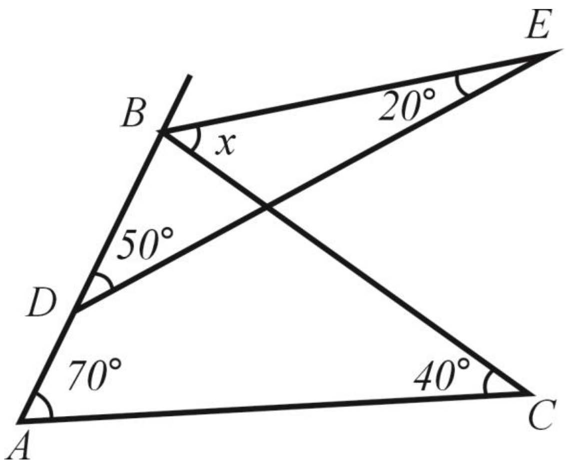
x ти тапкыла.

36-сүрөт



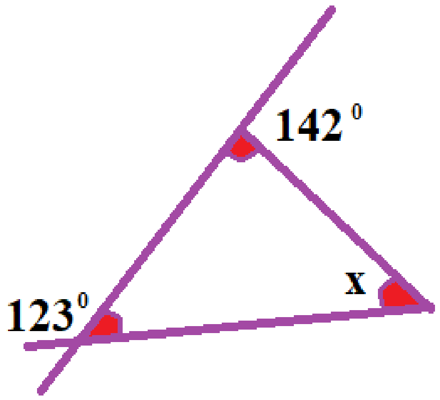
x ти тапкыла.

37-сүрөт



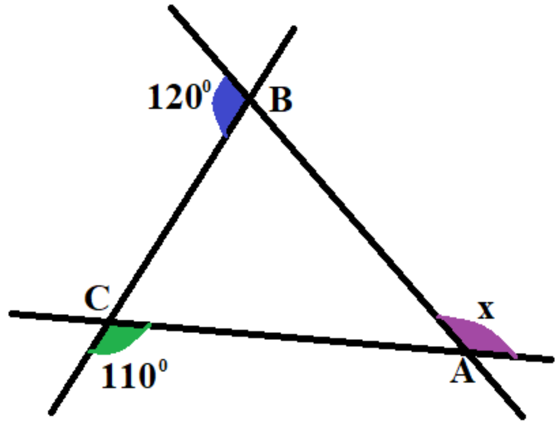
x ти тапкыла.

38-сүрөт



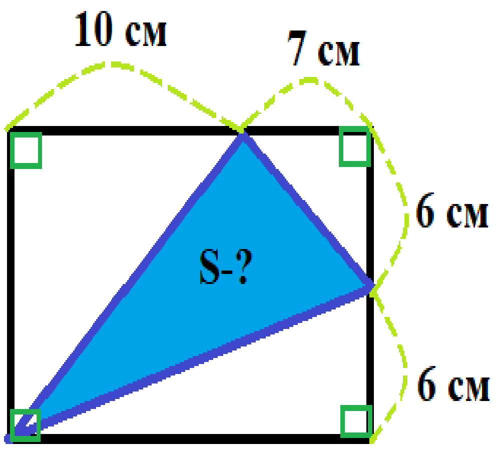
x ти тапкыла.

39-сүрөт

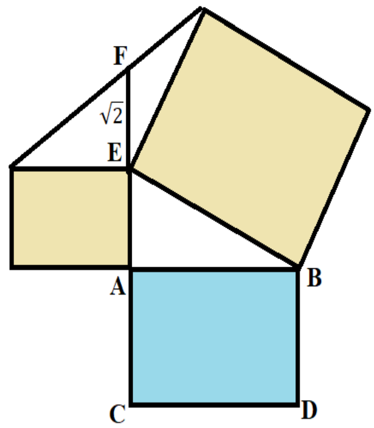


x ти тапкыла.

40-сүрөт

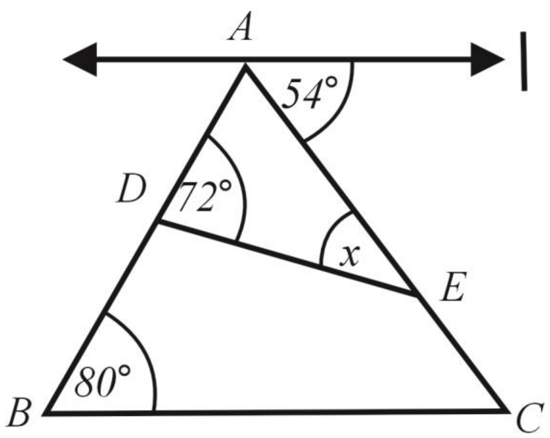


41-сурөт

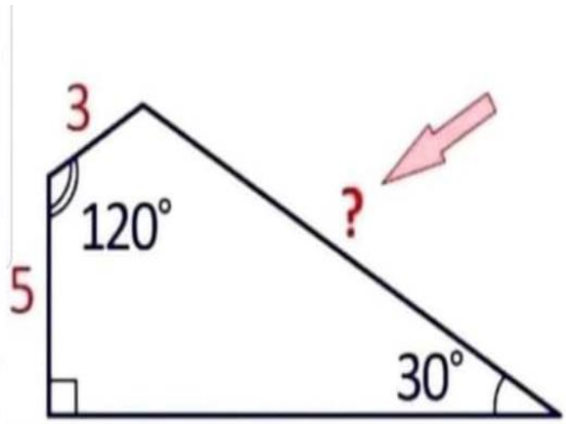


S_{ABCD} –?

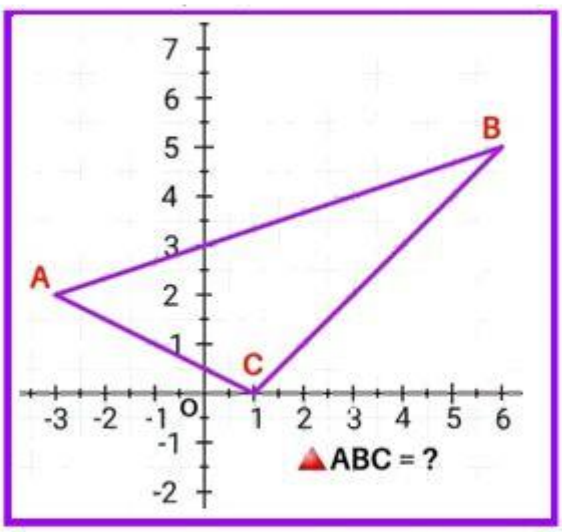
42-сурөт



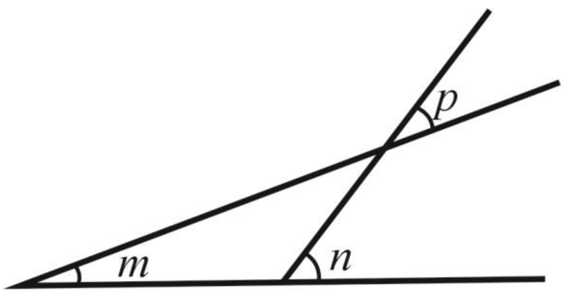
43-сурөт



44-сурөт

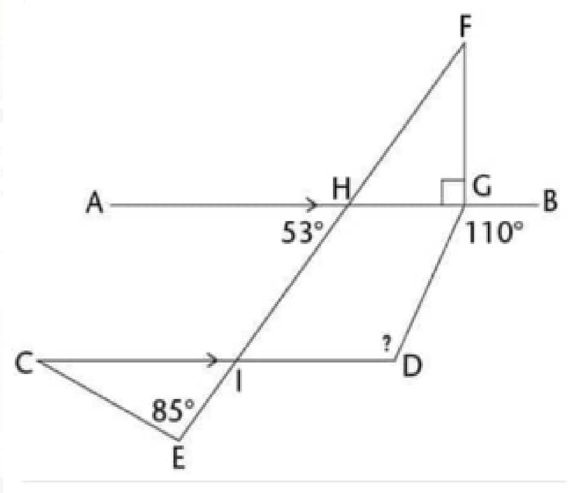


45-сурөт

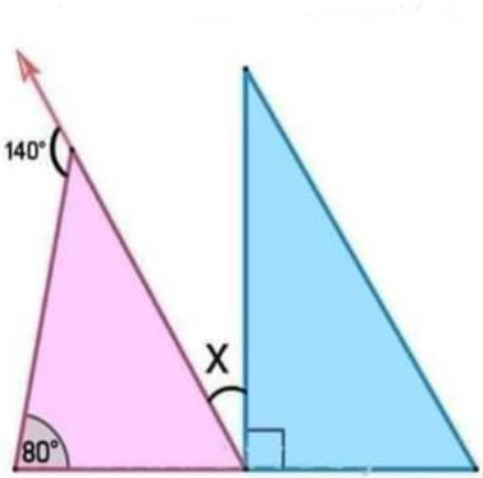


A. $m+n+p=180°$
B. $m+n=180°$
C. $m=p+n$
D. $n=m+p$

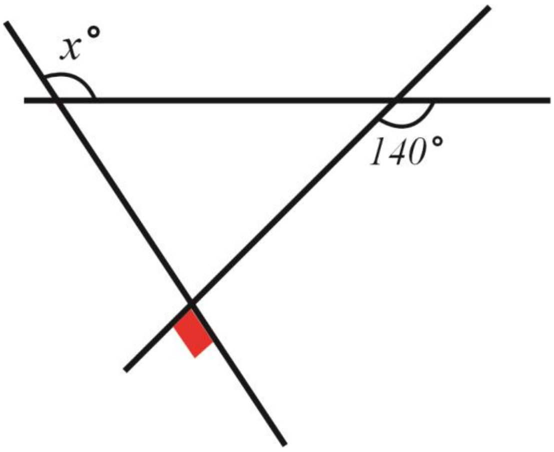
46-сурөт



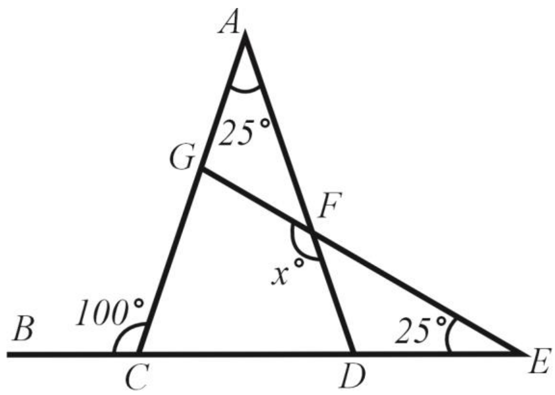
47-сүрөт



48-сүрөт



49-сүрөт



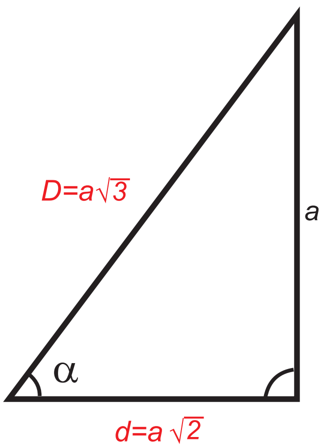
50-сүрөт

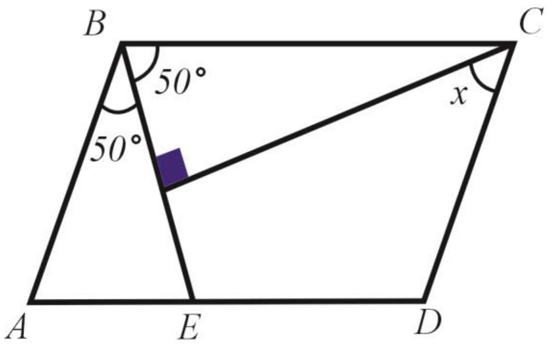
sin α =

cos α =

tg α =

ctg α =

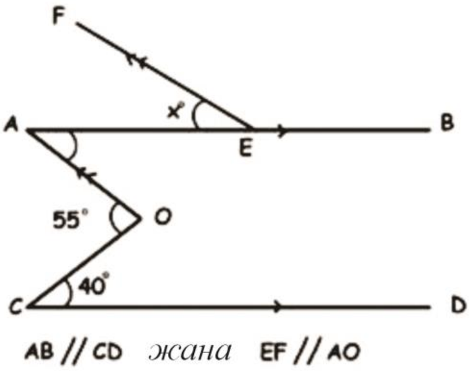




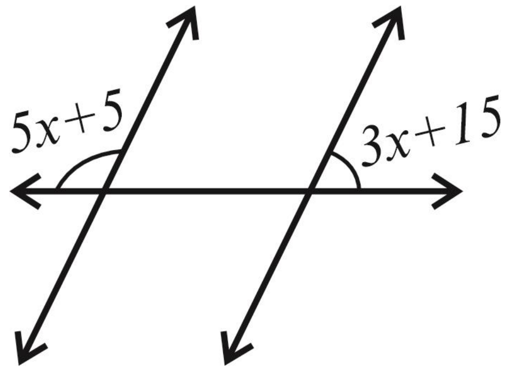
$x° = (??)°$

51-сүрөт

52-сүрөт



53-сүрөт



х ти тапкыла

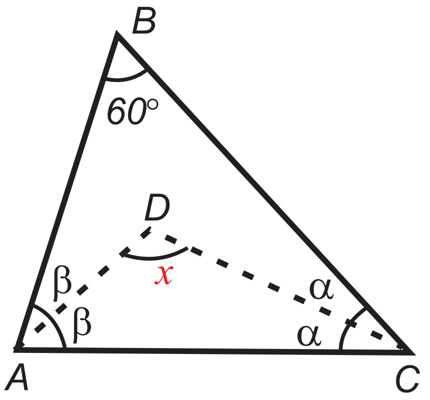
54-сүрөт

a) 60°

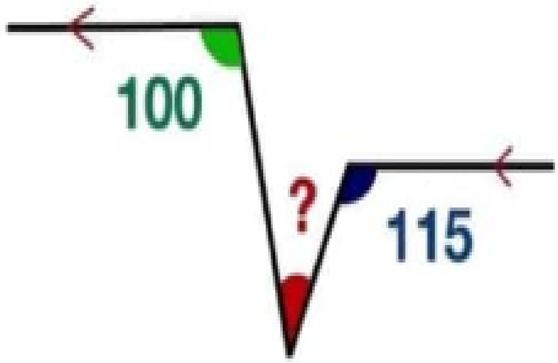
b) 80°

c) 120°

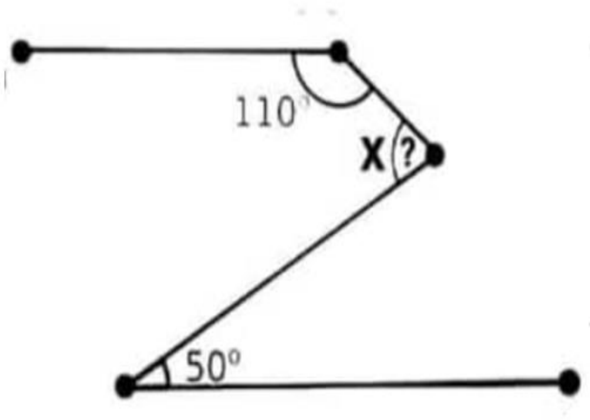
d) 150°



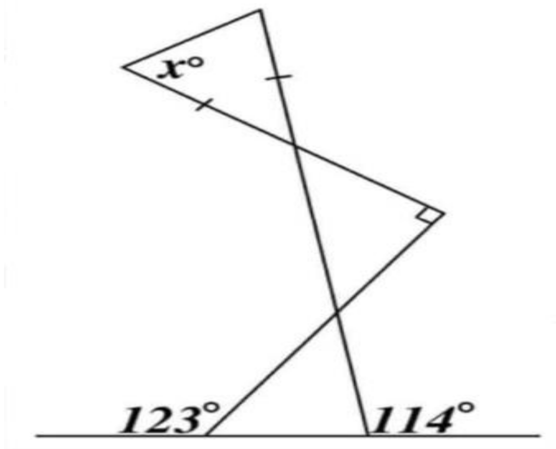
55-сүрөт



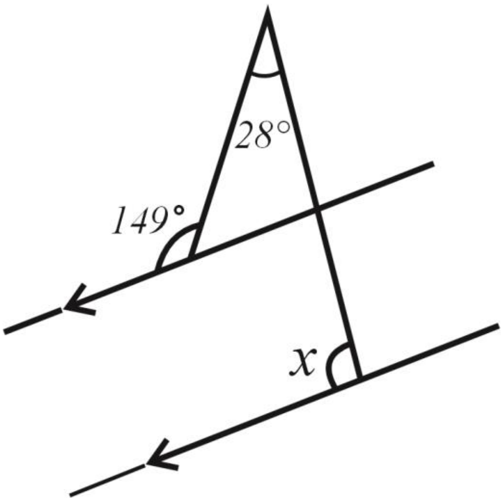
56-сүрөт



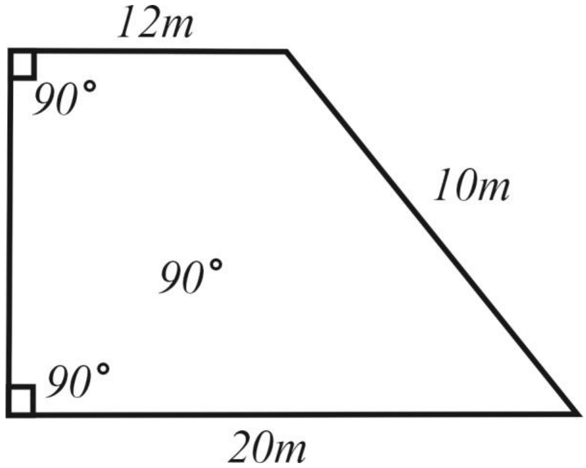
57-сүрөт



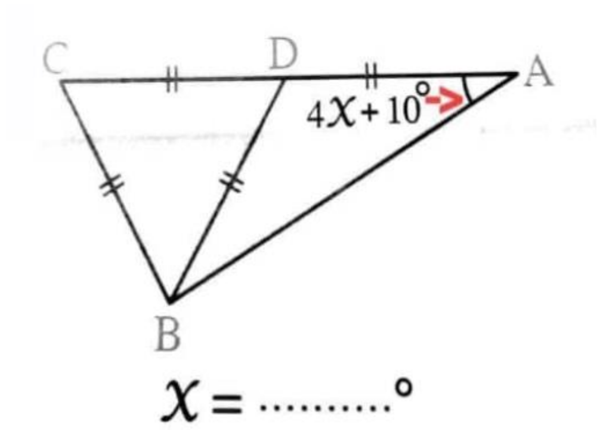
58-сүрөт



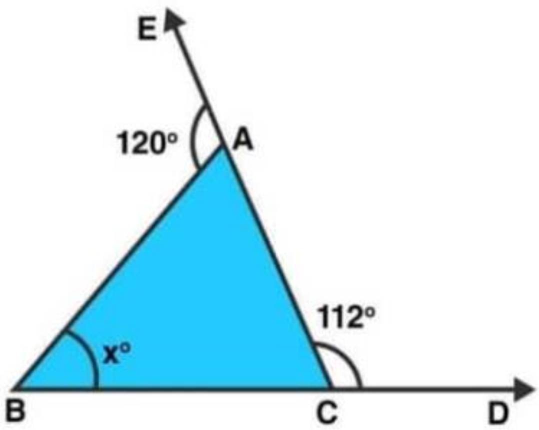
59-сүрөт



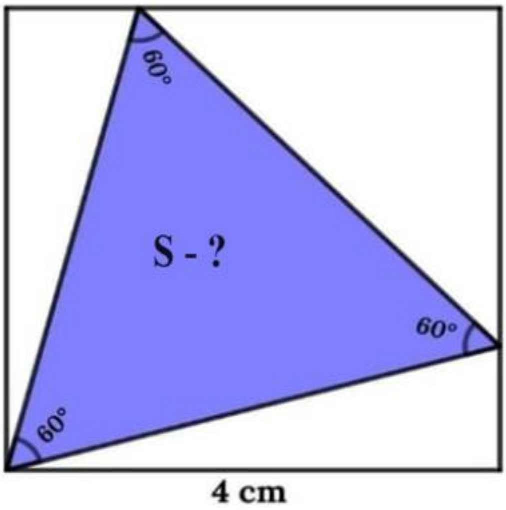
60-сүрөт



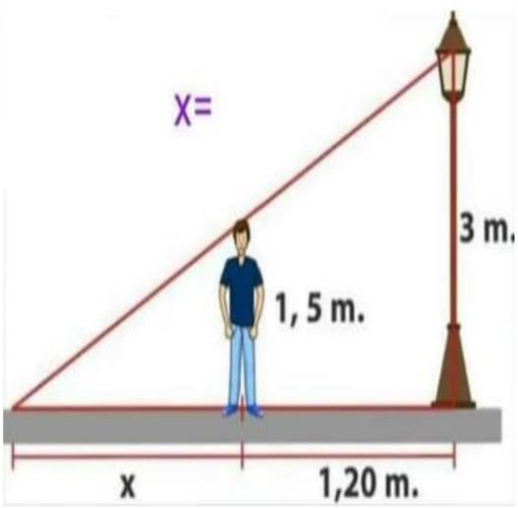
61-сүрөт



62-сүрөт



63-сүрөт



64-сүрөт

8. ГЕОМЕТРИЯ САБАГЫН ОКУТУУДА ЖАНА БААЛООДО БЛУМДУН ТАКСОНОМИЯСЫН КОЛДОНУУ

Математика сабагында сабакты пландоодо Блумдун таксономиясын колдонгонуу предметтин мазмунунун сабакта өздөштүрүлүшү кыйла жакшы камсыздалат.

Мындан тышкары Блумдун таксономиясында сунушталган таанып билүү картасы мугалимге предметтин өздөштүрүлүшүнүн ар бир этабындагы окуучунун жетишүүсүнүн баалоо системасын түзүү мүмкүнчүлүгүн берет (караңыз: Формативдик баалоо жана инсанга багытталган окутуунун, таанып билүүнүн усулдары) [2].

Бул макалада геометриялык эки маселе аркылуу Блумдун таксономиясын кантип колдонуу керек экенин көрсөтөлү.

1. Үч бурчтуу пирамиданын каптал кырлары өз ара перпендикулярдуу жана *в* га барабар. Пирамиданын көлөмүн тапкыла [15].

Берилди:

КА=КВ=КС=b

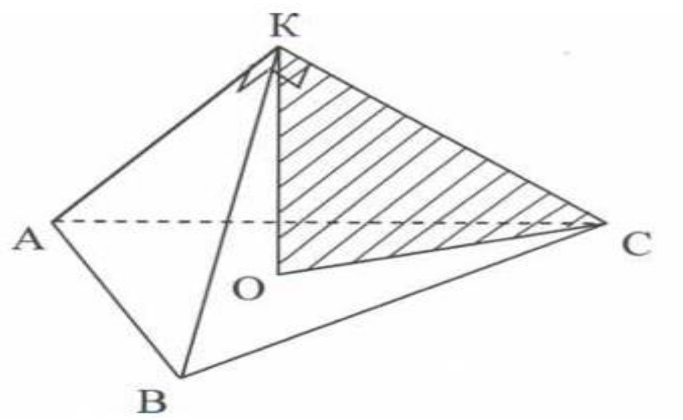
КА⊥КВ

КВ⊥КС

КА⊥КС

Табуу керк:

$V_{пирамида}$-?



65-сүрөт

Блумдун таксономиясы боюнча маселени талдап көрөлү

Билим. Окуучунун бул маселени чыгаруу үчүн кандай билимдери бар:

1. $V = \frac{1}{3} SH$

2. Калган керек болуучу билимдерди анализдөөдө таап чыгабыз.

Түшүнүү. Окуучу маселенин берилиши боюнча эмнени түшүндү.

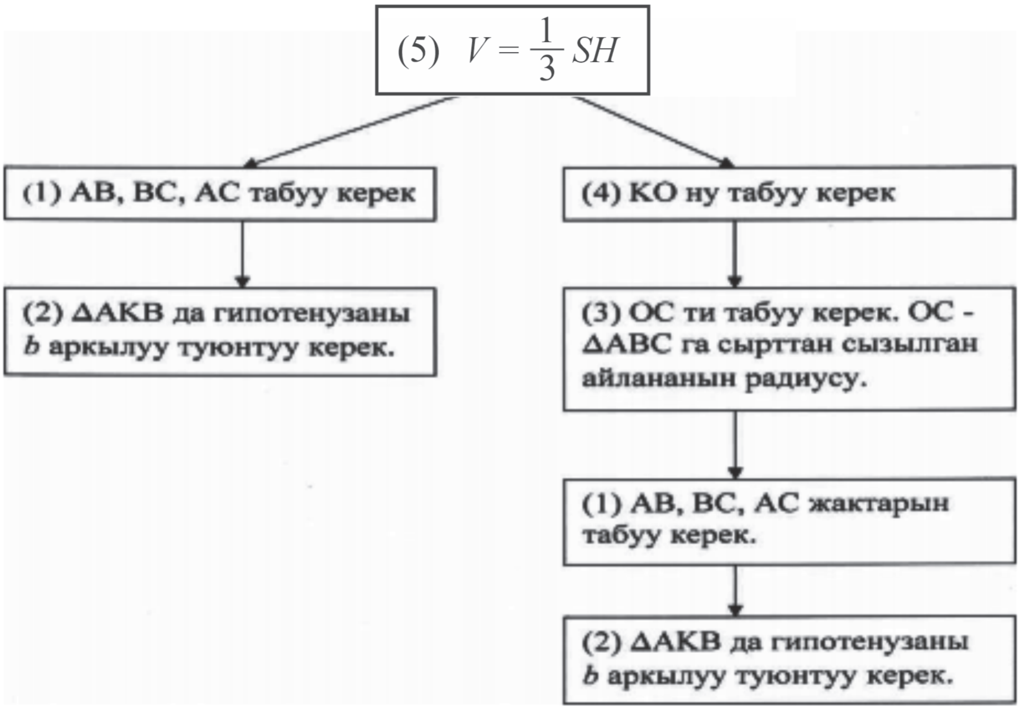
Окуучулардын акыл эс жөндөмдүүлүгү ар түрдүү болгондуктан, бардык эле окуучулар чиймени колдонуу менен чыгара билишпейт. Ошондуктан бул маселенин моделин чий же ~~спицы~~, картондун жардамы менен үч өлчөмдүү мейкиндикте түзүшөт. ΔAKB, ΔBKC, ΔAKC тик бурчтуу үч бурчтуктар экендигин, жана алар барабар экендигин, бул үч бурчтуктарда AB, AC, BC - гипотенуза болорун, алар барабар болгондуктан ΔABC - тең жактуу үч бурчтук экендигин түшүнүшөт.

I. **Колдонуу**

Жаны кырдаалда окуучу кайсы формулаларды, теориялык материалдарды колдонуу керек экендигин ойлонот.

II. **Анализ (талдоо)**

Көпчүлүк маселелер синтез методу менен чыгарылат да окуучулар маселени кантип чыгарылганын түшүнбөй калышат. Анализ синтезге караганда көбүрөөк убакытты алганы менен, окуучуга үйрөтүп койсо окуучу кантип чыгарылышын билип калат. Изделген чоңдуктан берилген чоңдукка жеткенге чейин анализ жүргүзүлөт. Жогорудагы маселеде V ны табуу керек, качан $V = f(b)$ аркылуу туюнтулса маселе чыгарылган болуп эсептелет .



Демек биз анализдеп, берилген маселени беш майда маселелерге бөлүп отуруп берилген параметр b га чейин келип жеттик, ошентип анализдөө бүттү.

Анализдин жүрүшүндө бизге $V = \frac{1}{3}SH$ тан башка да

1) Пифагордун теоремасы $c^2 = a^2 + b^2$

2) Тең жактуу үч бурчтуктун аянты S = $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

3) R = $\frac{abc}{4S}$ үч бурчтукка сырттан сызылган айлананын радиусу формулалары керек болорун билдик. Бул формулаларды билим бөлүгүнө көчүрүп жазуу керек. Эгерде анализ тиги же бул маселени чыгарууда дайыма колдонулуп турса, маселенин чыгарылышын издөө көндүмү калыптанат. Демек биз анализдеп, берилген маселени беш майда маселелерге бөлүп отуруп берилген параметр b га чейин келип жеттик, ошентип анализдөө бүттү.

V. СИНТЕЗ (топтоо)

Анализденген ирет менен төмөнтөн жогоруну көздөй майда беш бөлүк маселени катары менен чыгарабыз.

(1) ΔАКВ да: $AB^2 = AK^2 + KB^2$

$AB^2 = b^2 + b^2 = 2b^2$

$AB = b\sqrt{2}$

(2) ΔABC тең жактуу үч бурчтук болгондуктан, $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

формуласы менен чыгарабыз $S = \frac{\left(b\sqrt{2}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2b^2\sqrt{3}}{4}$

(3) Сырттан сызылган айлананын радиусу

$OC = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S} = \frac{b\sqrt{2} \cdot b\sqrt{2} \cdot b\sqrt{2}}{4 \cdot \frac{2b^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{b\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

Эскертүү: Сырттан сызылган айлананын радиусун туура көп бурчтукка сырттан сызылган айлананын радиусунун формуласы менен чыгарса да болот. $R = \frac{abc}{4S}$ формуласын колдонуунун себеби дайыма эле үч бурчтук пирамиданын негизи тең жактуу үч бурчтук боло бербейт.

(4) $KO^2 = KC^2 - OC^2$

$KO^2 = b^2 - \left(\frac{b\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{b^2}{3}$, мындан $KO = \frac{b}{\sqrt{3}}$

(5) $V = \frac{1}{3}SH$

$$V = \frac{1}{3}\,\frac{2b^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} = \frac{b^3}{6}$$

Жообу: $V = \frac{b^3}{6}$

VI. Баалоо

Алынган жооп маселедеги жалгыз параметр b жана көлөм сызыктуу өлчөмдүн кубу аркылуу туюнтулду, демек маселе туура чыгарылды.

2. ΔABC да AB жагы a га барабар. B чокусунан жүргүзүлгөн медиана бурчту α жана β га барабар бурчтарга бөлсө, BM медианасынын узундугун тапкыла.

Берилди: ΔABC да AB= a

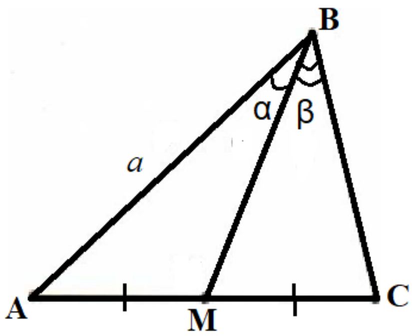
BM – медиана

$\angle ABM = \alpha$,

$\angle MBC = \beta$

Табуу керек: BM - ?

Биздин максатыбыз: BMди α, β жана a параметрлери аркылуу туюнтуу керек (66-сүрөт).



66-сүрөт

Билим. Медиана бурчтун чокусунан чыгып, карама-каршы жакты тең экиге бөлөт AM = MC [2].

I. **Түшүнүү.** Окуучулар маселени окуп чыгышып, чиймесин чийишти

жана берилгендерин чиймеге жазышты.

II. **Колдонуу.** Жаны кырдаалда кайсы формулаларды теориялык

материалдарды колдонуу керек экендигин ойлонот.

III. **Анализ.** Эгерде үч бурчтуктун үч элементи (анын ичинен жок

дегенде бирөө сызыктуу болсо, калган элементтерин таап алууга болот)

BMди камтыган фигураларды издейбиз BM ∈ ΔABM

BM ∈ ΔBMC

ΔABM де эки гана белгилүү элемент: a, α

ΔBMC да бир гана белгилүү элемент: β бар.

Берилген фигураны параллелограммга чейин толуктап көрөлү

BM ди табуу үчүн

BD табуу керек

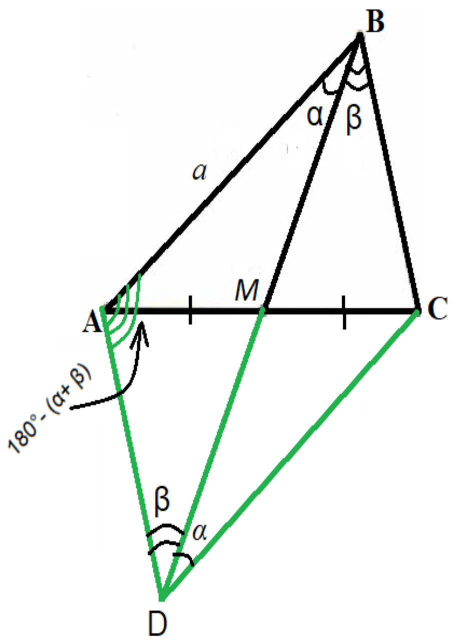
BD ны камтыган үч бурчтукту карайбыз (67-сүрөт).

ΔABDда үч элементти табууга болот.

IV. СИНТЕЗ. ΔABD да ∠DAB = α,

∠DAB = β (ички кайчылаш бурчтар барабар болушат)

∠BAD = 180°- (α+ β)



67-сүрөт

1) ΔABD да синустардын теоремасын колдонобуз

$$\frac{a}{sin\beta} = \frac{BD}{\sin\left(180^0 - (\alpha + \beta)\right)}$$

$$\frac{a}{sin\beta} = \frac{BD}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$BD = \frac{a\sin(\alpha + \beta)}{sin\beta}$$

2) $BM = \frac{BD}{2} = \frac{a\sin(\alpha+\beta)}{2sin\beta}$

VI баалоо: Биз издеген чоңдук берилген a, α, β параметрлери жана сызыктуу өлчөм аркылуу туюнтулду, демек маселенин жообуна жеттик.

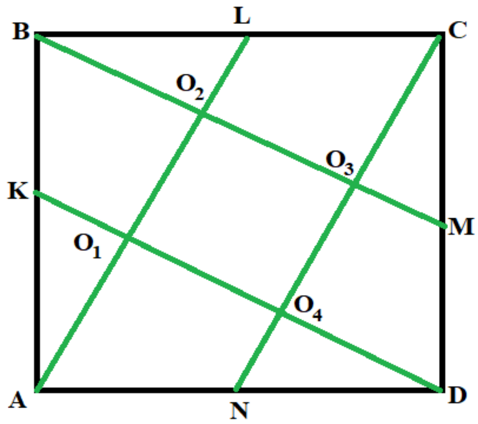
1) Жообу: $BM = \frac{\operatorname{asin}(\alpha+\beta)}{2sin\beta}$

Блумдун таксономиясынын биринчи үч деңгээли билим, түшүнүү, колдонуу төмөнкү катардагы деңгээлдер болуп саналат. Бул таанып- билүүнүн фундаменти гана, ал эми кийинки үчөө жогорку деңгээлдеги билгичтикти өнүктүрүүгө багытталган. Блумдун таксономиясы окутуунун натыйжаларын пландаштыруу менен тыгыз байланышкан.

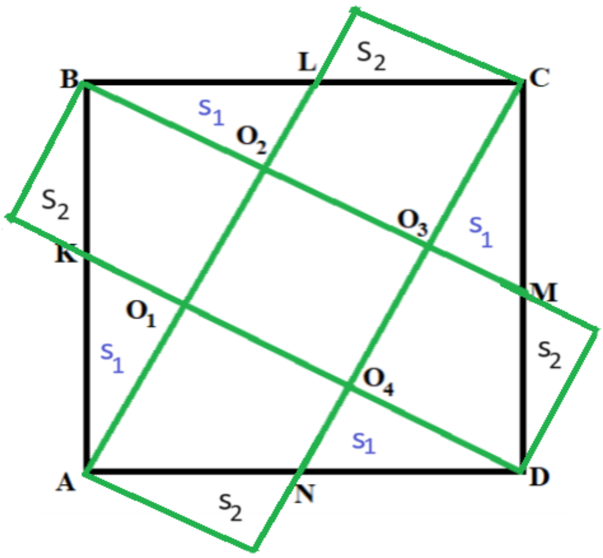
Окуучулардын эмгегин баалоодо ар бир баанын өзүнүн критерийлери бар болгону менен бир мугалим менен экинчи мугалимдин баалоосу дал келе бербейт. Кээ бир мугалимдер окуучу кандайдыр бир фактыны: теореманы же маалыматты айтып берсе, формулаларды туура жазып берсе, б.а. Блумдун таксономиясынын алгачкы үч деңгээлине жооп бере алса эле «4», «5» деген бааларды коюп көнүп калышкан.

Биздин практикада геометрия сабагын оозеки предмет катары эсептеп, мисалы: көлөмдү табууну маселенин шартында негизинин аянты менен бийиктиги берилсе гана чыгара алган, анализ менен синтез жана баалоо жөнүндөгү түшүнүктөрү жок мугалимдерди кездештирип жүрөбүз. Блумдун таксономиясынын алгачкы үч деңгээлин өздөштүргөн окуучу «3» деген баага татыктуу,ал эми «5» деген баа Блумдун таксономиясынын бардык этаптарын колдонгондо гана коюлушу керек.

3. Жагы a га барабар ABCD квадрат берилген. Жактарынын ортолорунда K, L, M, N чекиттери белгиленип AL; BM; CN; DK кесиндилери жүргүзүлгөн. $O_1O_2O_3O_4$ төрт бурчтугунун аянтын тап [13].



68-сүрөт



69-сүрөт

$S_1 = S_2$ эки жагы жана алардын арасындагы бурчу боюнча квадраттын аянты 5 барабар O_1 O_2 O_3 O_4 квадратына барабар болуп калды.

Демек $S_{кв.} = 5 \cdot S_{O_1O_2O_3O_4}$

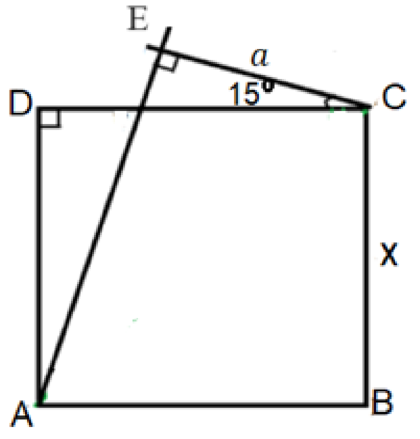
$$a^2 = 5 \cdot S_{O_1O_2O_3O_4}$$

$$S_{O_1O_2O_3O_4} = \frac{a^2}{5}$$

4. ABCD-квадрат

BC=x десек, x ти a аркылуу

туюнткула.



70-сүрөт

Чыгаруу:

ΔECA үч бурчтугунун бурчтарынын өлчөмдөрү 90^0-60^0-30^0

$AC=2 \cdot EC= 2a$

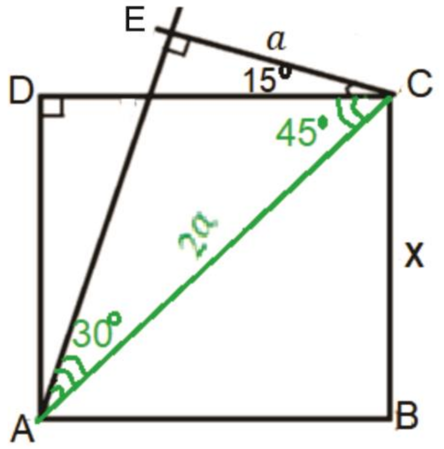
ΔBAC нын бурчтарынын өлчөмдөрү 90º- 45º -45º

CB жагы BC дан $\sqrt{2}$ эсе кичине

$BC = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{2a}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$

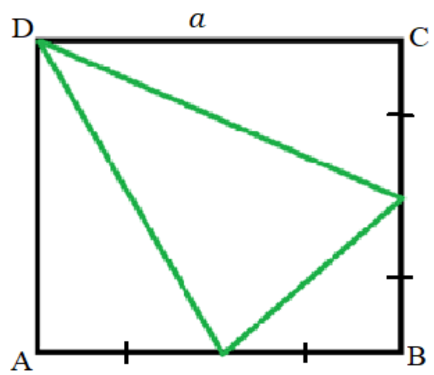
$x = a\sqrt{2}$

Жообу: $x=a\sqrt{2}$



71-сүрөт

5. Жагы a болгон квадраттын эки жанаша жаткан жагынын ортосу туташтырылган жана анын каршысында квадраттын чокусу менен туташтырылган. Пайда болгон үч бурчтуктун аянтын тапкыла.



72-сүрөт

$S_{кв.}= a^2$

$S_4 = S_{кв.}-(S_1+S_2+S_3)$

$S_1 = S_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} a = \frac{a^2}{4}$

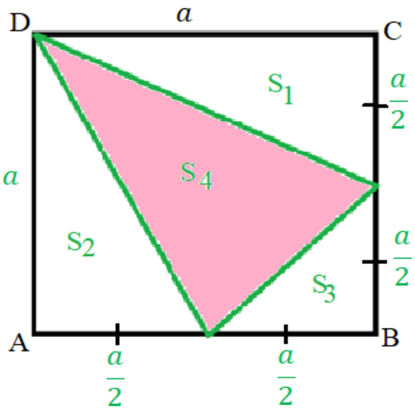
$S_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{8}$

$S_4 = S_{кв.} - (S_1+S_2+S_3)$

$S_4 = a^2 - (\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{8}) =$

$= a^2 - \frac{5}{8}a^2 = \frac{3}{8}a^2$

Жообу: $\frac{3}{8}a^2$



73-сүрөт

6. Тик бурчтуу үч бурчтуктун жактарынын жок дегенде бирөө 1500 болгон канча үч бурчтукту билесиңер [15]?

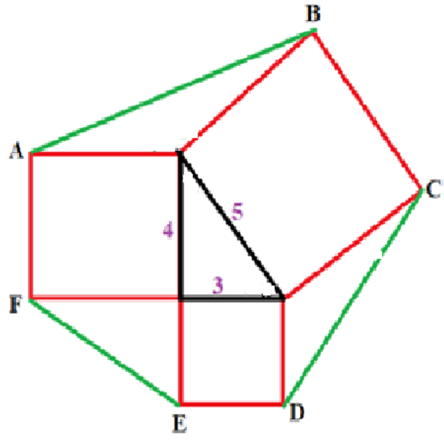
Чыгаруу:

Чыгарылыштары натуралдык сандар болгон тик бурчтуу үч бурчтуктардын жактарынын ичинен 1500гө бөлүнүүчү сандарды тандап алабыз да, жактарын окшоштук коэффициентине көбөйтүп коебуз

Чыгарылышы:

1) $\boldsymbol{a}$ **=1500**	**2)** $\boldsymbol{a}$ **=1500**	**3)** $\boldsymbol{a}$ **=1500**
b=2000	b=3600	b=11200
c=2500	c=3900	c=11300
4) a =1125	**5)** a =625	**6)** a =275
b=1500	**b=1500**	**b=1500**
c=1875	c=1625	c=1525
7) a =420	**8)** a =900	**9)** a =800
b=1440	b=1200	**b=1500**
c=1500	**c=1500**	c=1700
10) $\boldsymbol{a}$ **=1500**		
b=1575		
c=2175		

7. Жактары 3,4,5 болгон тик бурчтуу үч бурчтук берилген. Анын жактарына квадраттар сызылган жана квадраттын чокулары кесиндилер менен туташтырылганда ABCDEF алты бурчтугу алынган. Пайда болгон ABCDEF алты бурчтуктун аянтын тапкыла.



74-сүрөт

Чыгаруу:

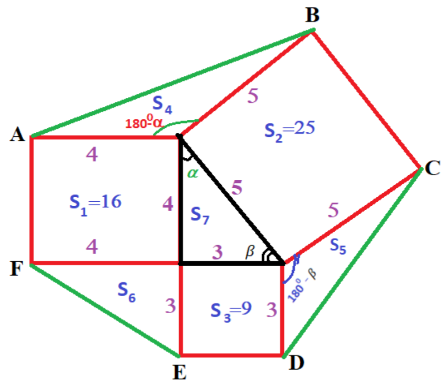
$\sin\alpha = \frac{3}{5}$

$\sin\beta = \frac{4}{5}$

$S_4 = \frac{1}{2} 4 \cdot 5\sin(180^0 - \alpha) =$

$= \frac{1}{2} 4 \cdot 5\sin\alpha =$

$= \frac{1}{2} 4 \cdot 5 \cdot \frac{3}{5} = 6$



75-сүрөт

$S_5 = \frac{1}{2} 3 \cdot 5\sin(180^0 - \beta) = \frac{1}{2} 3 \cdot 5\sin\beta = \frac{1}{2} 3 \cdot 5 \cdot \frac{4}{5} = 6$

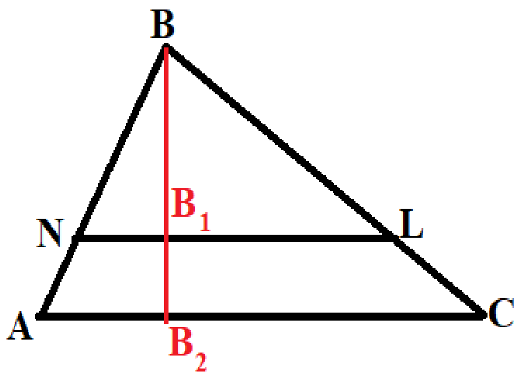
$S_6 = \frac{1}{2} 3 \cdot 4 = 6$

$S_7 = \frac{1}{2} 4 \cdot 3 = 6$

$S_{(ABCDEF)} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 + S_7 = 4 \cdot 6 + 16 + 25 + 9 = 74$

Жообу: 74 кв бирдик

8. ABC үч бурчтугуна негизине параллель кесиндиси үч бурчтуктун аянтын тең экиге бөлсө, NL ди AC аркылуу туюнткула.



76-сүрөт

$S_{NBL} = \frac{1}{2}S_{ABC}$

$BB_2=k\cdot BB_1$ (k-окшоштук коэффиценти)

$AC=k\cdot NL$

$S_{NBL} = \frac{1}{2}\, NL\cdot BB_1$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\, AC\cdot BB_2=\frac{1}{2}\, k\cdot NL\cdot k\cdot BB_1=k^2\cdot S_{NBL}$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{NBL}} = \frac{k^2 S_{NBL}}{S_{NBL}} = k^2$$

$$K^2=2$$

$$k = \sqrt{2}$$

$$AC = k\cdot NL$$

$$NL = \frac{AC}{K} = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}AC$$

Жообу: $NL = \frac{\sqrt{2}}{2}AC$

9. Тик бурчтуу үч бурчтуктун катеттери 24см, 18см. Тар бурчтун биссектрисаларынын узундуктарын тапкыла.

Берилди: ΔАВС-тик бурчтуу үч бурчтук.

AC=24

BC=18

Табуу керек: ВК-? AD-?

CD=x десек

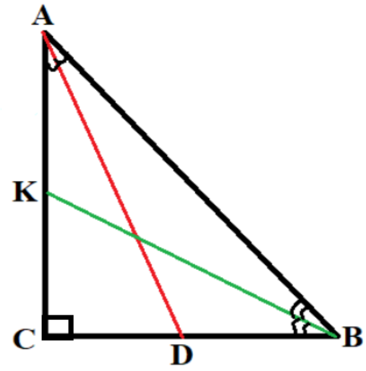
DB=18-x

КС=у десек

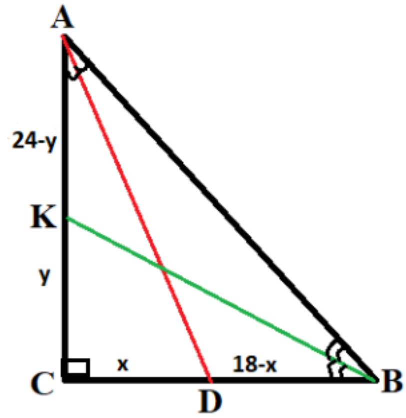
АК=24-у

$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 24^2 + 18^2 = 900$

$AB = \sqrt{900} = 30$



77-сүрөт



78-сүрөт

а) AD биссектрисасынын касиети боюнча

$\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{BD}$

$\frac{24}{x} = \frac{30}{18-x}$

30x=24(18-x)

30x=24·18-24x

54x=24·18

$x = \frac{24 \cdot 18}{54}$

б) ВК биссектрисасынын касиети боюнча

$\frac{AB}{AK} = \frac{BC}{KC}$

$\frac{30}{24-y} = \frac{18}{y}$

30y=18(24-y)

30y=18·24-18y

48y=18·24

$x = 8$

$AD^2 = AC^2 + CD^2$

$AD^2 = 24^2 + 8^2$

$AD^2 = 640$

$AD = 8\sqrt{10}$

$y = \frac{18 \cdot 24}{48}$

$y = 9$

$BK^2 = KC^2 + BC^2$

$BK^2 = 9^2 + 18^2$

$BK^2 = 405$

$BK = 9\sqrt{5}$

Жообу: $AD = 8\sqrt{10}$,

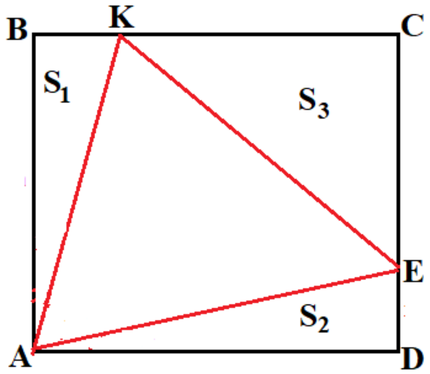
$BK = 9\sqrt{5}$.

10 ABCD квадратынын ичине бир чокусу дал келгендей кылып, AKE туура үч бурчтугу сызылган.

$S\Delta_{ABK} = S_1$

$S\Delta_{AED} = S_2$

$S\Delta_{KCE} = S_3$ экендиги белгилүү болсо $(S_1 + S_2)$ менен S_3 тү салыштыргыла.



79-сүрөт

Чыгаруу: квадраттын жагын a дейли,

$BK = x$, $\quad KC = a - x$

1. $tg15^0 = tg(45^0-30^0) = \frac{tg45^0 - tg30^0}{1+tg45^0 \cdot tg30^0} =$

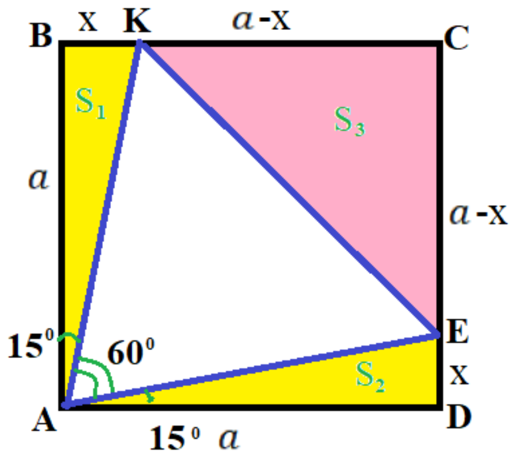
$$= \frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = 2-\sqrt{3}$$

2. $tg15^0 = \frac{x}{a}$

$x = a \cdot tg15^0 = a\,(2-\sqrt{3})$

3. $S_1 = S_2 = \frac{1}{2}a \cdot x = \frac{1}{2}a \cdot a\,(2-\sqrt{3}) =$

$= \frac{1}{2}a^2(2-\sqrt{3})$



80-сүрөт

$S_1 + S_2 = \frac{1}{2}a^2(2-\sqrt{3}) + \frac{1}{2}a^2(2-\sqrt{3}) = a^2(2-\sqrt{3})$

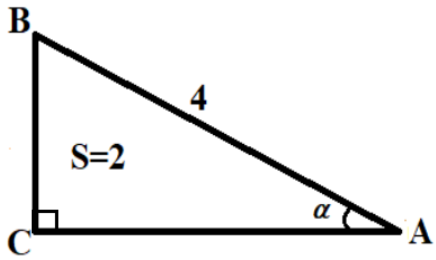
4. $S_3 = \frac{1}{2}(a-x)\cdot(a-x) = \frac{1}{2}(a-x)^2 = \frac{1}{2}(a - a\,(2-\sqrt{3}))^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}a - a)^2 =$

$= \frac{1}{2}(a(\sqrt{3}-1))^2 = \frac{1}{2}a^2(\sqrt{3}-1)^2 = \frac{1}{2}a^2(3-2\sqrt{3}+1) = \frac{1}{2}a^2(4-2\sqrt{3}) =$

$= a^2(2-\sqrt{3})$

Жообу: $S_1 + S_2 = S_3$

11. Тик бурчтуу үч бурчтуктун гипотенузасы 4 кө ал эми аянты 2ге барабар болсо тар бурчтарынын өлчөмүн тап.



81-сүрөт

Чыгаруу:

Берилди: $S_\Delta = 2$

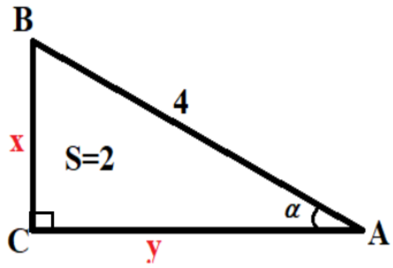
$AB=4$

$AC=x \quad (x>0,\ y>0)$

$BC=y$ деп белгилейли

$\text{Sin}\alpha = \frac{x}{4}$

$\text{Cos}\alpha = \frac{y}{4}$ мүчөлөп көбөйтөбүз



82-сүрөт

$\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{xy}{16} = \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{xy}{2}\right) = \frac{1}{8} \cdot 2$

$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{4}$

$2 \cdot \sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{4} \cdot 2$

$\sin 2\alpha = \frac{1}{2}$

$2\alpha = 30^0$

$\alpha = 15^0$

$\angle A = 15^0$

$\angle B = 90^0 - 15^0 = 75^0$

Жообу: $\angle A = 15^0$

$\angle B = 75^0$

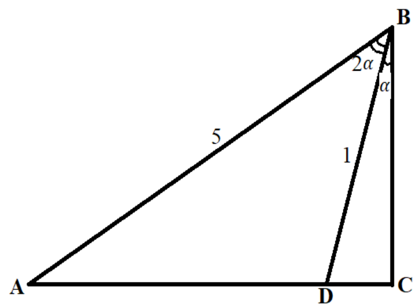
12. Берилгендер боюнча ΔABCнын аянтын тапкыла.

AB=5

BD=1

$\angle ABD = 2\alpha$

$\angle CBD = \alpha$



83-сүрөт

Чыгаруу: AD = b

мында b > 0

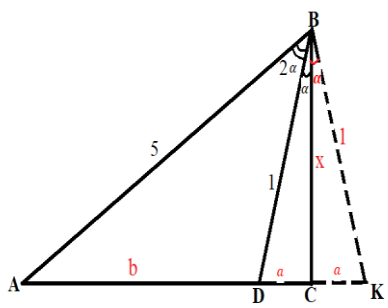
DC = a

$a > 0$

BC = x

x > 0

белгилөөлөрүн киргизебиз



84-сүрөт

Кошумча

ΔВСК үч бурчтугун түзөбүз.

Анда BD-АВК үч бурчтугунун

биссектрисасы болот.

Биссектрисанын касиети боюнча

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AD}} = \frac{\mathrm{BK}}{\mathrm{DK}}$$

$$\frac{5}{b} = \frac{1}{2a}$$

$$b = 10\ a$$

AD= 10 a

AC = b+ a = 10 $a +\ a = 11\ a$

$\Delta\mathrm{ABC}$ жана $\Delta\mathrm{DBC}$ тик бурчтуу болгондуктан Пифагордун теоремасы аткарылат.

$$\begin{cases}\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2 - \mathrm{AC}^2 \\ \mathrm{BC}^2 = \mathrm{BD}^2 - \mathrm{DC}^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2 = 5^2 - (11a)^2 \\ x^2 = 1^2 - a^2\end{cases}$$

$$5^2 - (11a)^2 = 1 - a^2$$

$$25 - 121\ a^2 = 1 - a^2$$

$$120\ a^2 = 24$$

$$a^2 = \frac{1}{5}$$

$$a = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$; $a_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ (маселенин шартын канаатандырбайт)

$x^2 = 1^2 - (\frac{1}{\sqrt{5}})^2 = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

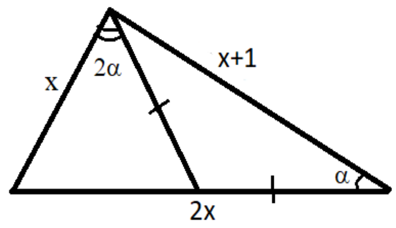
$x_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $x_2 = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ (маселенин шартын канаатандырбайт)

b = 10; $a = \frac{10}{\sqrt{5}}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\ AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 11\ a \cdot x = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{11}{5} = 2{,}2$

Жообу: 2,2 кв. бирдик.

13. Берилгендер боюнча х ти табкыла

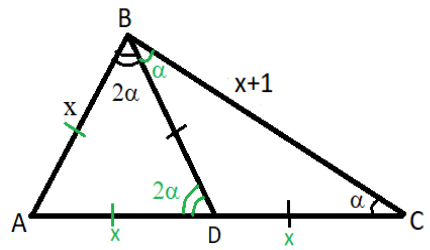


85-сүрөт

1). ΔBCD тең капталдуу

2). Үч бурчтуктун сырткы бурчу жандаш эмес, ички эки бурчтун суммасына барабар.

3) DC=AC-AD=2x-x=x



86-сүрөт

4). ΔABD тең жактуу үч бурчтук, анда $2\alpha = 60^0$

$\alpha = 30^0$

$\angle B = 2\alpha + \alpha = 3\alpha = 3 \cdot 30^0 = 90^0$

ΔABC тик бурчтуу үч бурчтук.

Пифагордун теоремасы боюнча

$x^2+(x+1)^2 =(2x)^2$

$x^2+x^2+2x+1 =4x^2$

$2x^2-2x-1 =0$

$D=(-2)^2-4\cdot 2\cdot(-1)=4+8=12$

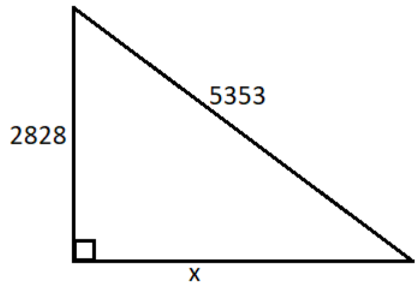
$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{12}}{2*2}=\frac{2\pm2\sqrt{3}}{4} = 0{,}5 \pm 0{,}5\sqrt{3}$

$x_1=0{,}5+0{,}5\sqrt{3}$

$x_2=0{,}5-0{,}5\sqrt{3} < 0$ маселенин шартын канааттандырбайт.

Жообу: $x = 0{,}5+ 0{,}5\sqrt{3}$

14. Берилгендер боюнча тик бурчтуу үч бурчтуктун экинчи катетин тап.



87-сүрөт

$x^2=5353^2-2828^2=(53\cdot 101)^2-(28\cdot 101)^2=53^2\cdot 101^2-28^2\cdot 101=$

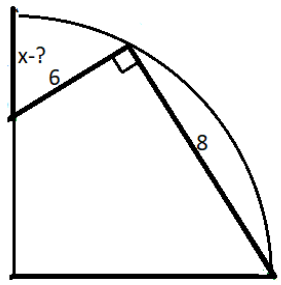
$=101^2(53^2-28^2)=101^2(53+28)(53-28)= =101^2\cdot 81\cdot 25$

$x=\sqrt{101^2\cdot 81\cdot 25}=101\cdot 9\cdot 5=101\cdot 45=4545$

Жообу: $x=4545$

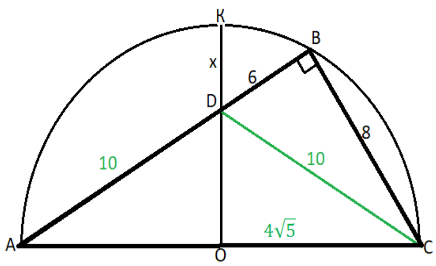
15. Чиймедеги берилгендер боюнча x ти тапкыла.

Диаметрге таянган бурч тик болгондуктан, чиймени жарым айланага чейин толуктайбыз.



88-сүрөт

ΔDBC да $DB=6$, $BC=8$ болсо, Пифагордун теоремасын колдонуп $DC=10$ экендигин табабыз.



89-сүрөт

$AD=DC=10$ мындан

$AB=AD+DB=10+6=16$

$BC=8$

$AC^2=16^2+8^2=256+64=320$

$AC=\sqrt{320}=8\sqrt{5}$

Тик бурчка таянгандыктан AC диаметр, ошондуктан

$R=AO=\frac{8\sqrt{5}}{2}=4\sqrt{5}$

$DO^2=DC^2-OC^2=10^2-(4\sqrt{5})^2=100-80=20$

$DO=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$KD=KO-DO=4\sqrt{5}-2\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

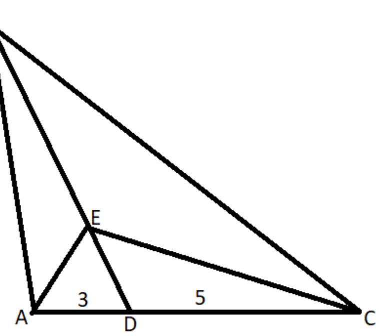
Жообу: $KD=2\sqrt{5}$

16. ABC үч бурчтугунда

$AD=3$

$DC=5$

BD кесиндисинен E чекити алынган. Эгерде $S_{\Delta ABE}=12$ болсо, ΔBEC нын аянтын тапкыла.

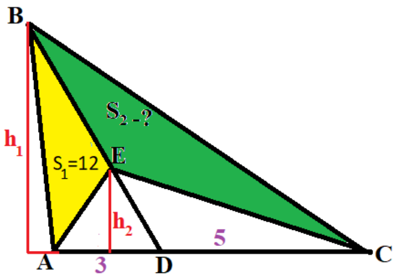


90-сүрөт

Чыгаруу:

ΔABD менен ΔDBCнын бийиктиктери барабар. Аны h_1 менен белгилейли.

ΔAED менен ΔDECнын бийиктиктери барабар аны h_2 белгилейли.



91-сүрөт

1) $S_1 = S_{\Delta ABD} - S_{\Delta AED} = \frac{1}{2}AD \cdot h_1 - \frac{1}{2}AD \cdot h_2 = 12$

$\frac{1}{2}3 \cdot h_1 - \frac{1}{2}3 \cdot h_2=12$

$1{,}5(h_1-h_2)=12$

$h_1-h_2 = \frac{12}{1{,}5} = 8$

2) $S_2= S_{\Delta DBC}-S_{\Delta DEC}=\frac{1}{2}5 \cdot h_1- \frac{1}{2}5 \cdot h_2=2{,}5h_1-2{,}5h_2=2{,}5(h_1-h_2)=2{,}5 \cdot 8=20$

Жообу: $S_{BEC}=20$ кв. бирдик

17. AB⊥BC

AD⊥CD

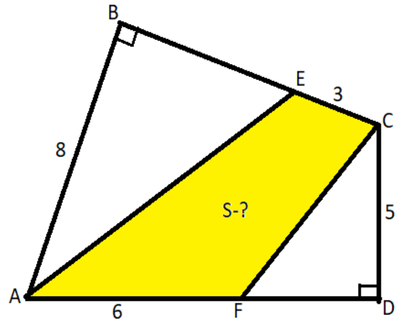
AB=8

EC=3

CD=5

AF=6

S_{AECF}-?

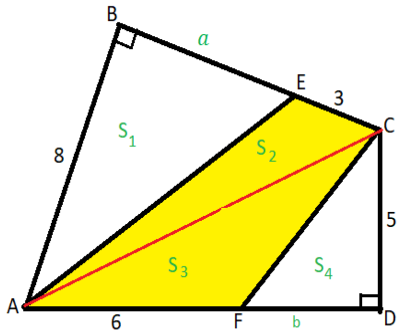


92-сүрөт

Чыгаруу: BE= a (a >0, b>0)

FD=b дейли.

AC диагоналын жүргүзүп, пайда болгон үч бурчтуктардын аянттарын S_1; S_2; S_3; S_4 деп белгилейли.



93-сүрөт

Биз издеген аянт $S=S_2+S_3$

Ал аянтты табыш үчүн ABCD төрт бурчтуктун аянтынан ΔABE жана ΔFCDнын аянттарынан суммасын алып салабыз.

$S_{ABCD}= S_{\Delta ABC}+ S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2}(a+3)\cdot 8+\frac{1}{2}(6+b)\cdot 5=4(a+3)+2{,}5(6+b)=$

$=4a+12+15+2{,}5b=4a+2{,}5b+27$

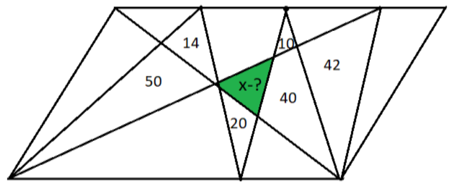
$S_{\Delta ABE} = \frac{1}{2}\, a \cdot 8 = 4\,a$

$S_{\Delta FCD} = \frac{1}{2}b\cdot 5 = 2{,}5b$

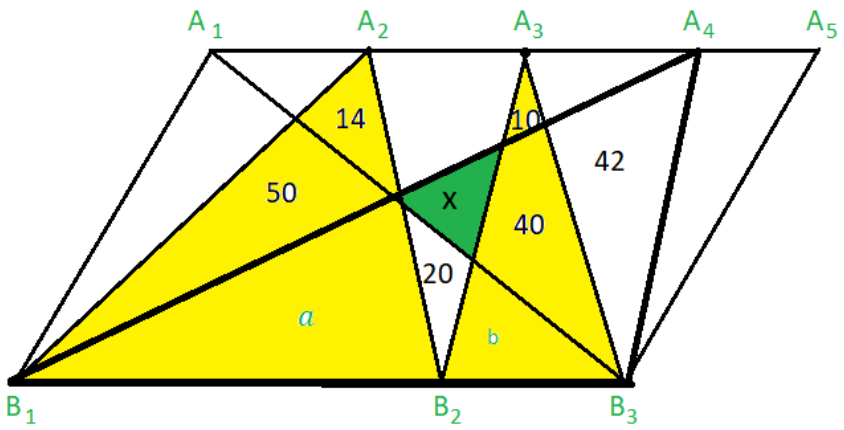
$S_{AECF} = S_{ABCD}-(S_{\Delta ABE}+S_{\Delta FCD}) = 4\,a+2{,}5b+27-(4\,a+2{,}5b) = 27$

Жообу: 27 кв. бирдик.

18. Параллелограмм бир нече майда бөлүктөргө бөлүнгөн жана кээ бирлеринин аянты берилген. Ортодогу боёлгон үч бурчтуктун аянтын тапкыла.



94-сүрөт



95-сүрөт

Ичиндеги үч бурчтуктардын аянты a,b,x менен белгилейли.

$S_{B_1A_2B_2}$=50+14+ a =64+ a

$S_{B_2A_3B_3}$=10+40+b=50+b

$S_{B_1A_4B_3}$= a +x+20+40+b+42= a +b+x+102

$$\left.\begin{aligned} S_{B_1A_2B_2} &= \frac{1}{2}\mathrm{B_1B_2}\cdot \mathrm{h} \\ S_{B_2A_3B_3} &= \frac{1}{2}\mathrm{B_2B_3}\cdot \mathrm{h} \end{aligned}\right\}\text{ экөөнү кошсок}$$

$\frac{1}{2}\mathrm{B_1B_2}\cdot\mathrm{h}+\frac{1}{2}\mathrm{B_2B_3}\cdot\mathrm{h}=\frac{1}{2}(\mathrm{B_1B_2}+\mathrm{B_2B_3})\cdot\mathrm{h}=\frac{1}{2}\mathrm{B_1B_3}\cdot\mathrm{h}=S_{B_1A_4B_3}$ демек

a +b+x+102=64+ a +50+b

x=114+ a +b- a -b-102

x=12

Жообу: 12 кв. бирдик

19. DE||BC

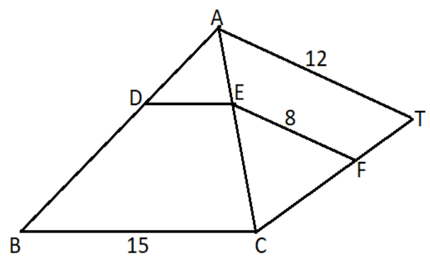
AT||EF

EF=8

AT=12

BC=15

DE-?



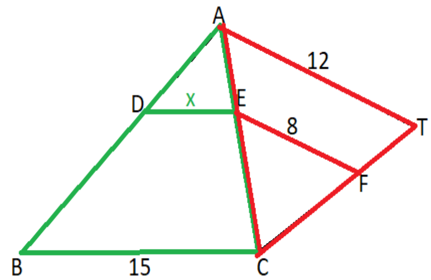
96-сүрөт

Чыгаруу: ΔCEF~ΔCAT

$\frac{EF}{AT} = \frac{CE}{AC} = \frac{CF}{CT}$ пропорциясынан

эки катышты алабыз $\frac{EF}{AT} = \frac{CE}{AC}$

мында CE=AC-AE



97-сүрөт

$$\frac{8}{12} = \frac{AC - AE}{AC}$$

$$\frac{2}{3} = 1 - \frac{AE}{AC}$$

$$\frac{AE}{AC} = 1 - \frac{2}{3}$$

$$\frac{AE}{AC} = \frac{1}{3}$$

2) ΔADE~ΔABC

$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}$ пропорциясынын акыркы эки катышын алып, $\frac{AE}{AC} = \frac{1}{3}$

маанисин койсок

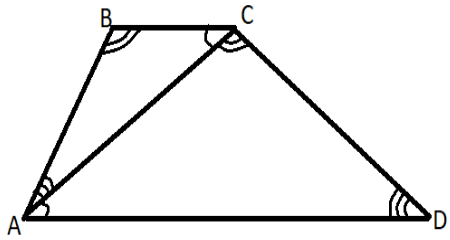
$$\frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}$$

$$\frac{x}{15} = \frac{1}{3}$$

x=$\frac{1*15}{3}$=5

Жообу: DE =5

20. Трапециянын диагоналы аны эки окшош үч бурчтукка бөлөт. Эгерде каптал кырларынын катышы 2 ге барабар болсо, чоң негизинин кичине негизине болгон катышын тапкыла.



98-сүрөт

Берилди:

ABCD-трапеция

CD:AB=2

$\Delta ABC \sim \Delta ACD$

Табуу керек: $\frac{AD}{BC}$-?

Анализдөө:

$\angle BCA = \angle CAB$ (ички кайчылаш бурчтар)

$\angle ABC = \angle ACD$ (кең бурчтар), анда

$\angle BAC = \angle ADC$

Пропорцияны төмөндөгүдөй түзөбүз: бөлчөктүн алымына ΔACDнын жактарын, бөлчөктүн бөлүмүнө ΔABCнын тиешелүү жактарын жазабыз.

$$\frac{CD}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{BC}$$

$2 = \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{BC}$ мындан AD=2AC

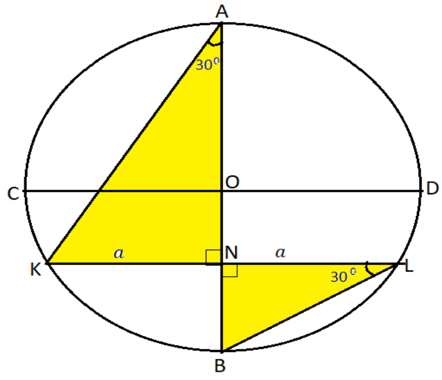
AC=2BC

AD=2AC=2·2BC=4BC

$$\frac{AD}{BC} = \frac{4BC}{BC} = 4$$

Жообу: $\frac{AD}{BC} = 4$

21. Тегеректе өз ара перпендикуляр болгон эки диаметр жүргүзүлгөн жана a =30^0 болгондой эки тик бурчтуу үч бурчтук: ΔАКN жана ΔLBNтүзүлгөн. Бул эки тик бурчтуу үч бурчтуктардын аянттарынын катыштарын тапкыла.



99-сүрөт

Берилди: AB$\perp$ CD

$\angle$BAK=30^0 $\angle$BLK=30^0

Табуу керек: $\frac{S_{\Delta AKN}}{S_{\Delta BLN}}$ =?

1) ΔАКNде KN= a десек, AN=$a\sqrt{3}$ болот.

$S_{\Delta AKN} = \frac{1}{2}$KN·AN=$\frac{1}{2}$ $a \cdot a\sqrt{3}$=$\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

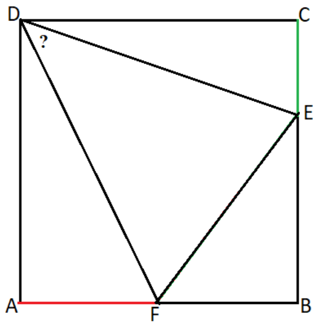
2) ΔBLNде NL=a, NB=$\frac{a}{\sqrt{3}}$

$S_{\Delta BLN} = \frac{1}{2}$NL·NB=$\frac{1}{2}$ $a \cdot \frac{a}{\sqrt{3}}$ =$\frac{a^2}{2\sqrt{3}}$

3) $\frac{S_{\Delta AKN}}{S_{\Delta BLN}} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{2}}{\frac{a^2}{2\sqrt{3}}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{a^2}$=3

Жообу: 3

22. AF+CE=EF болсо, $\angle EDF$ ти тап.



100-сүрөт

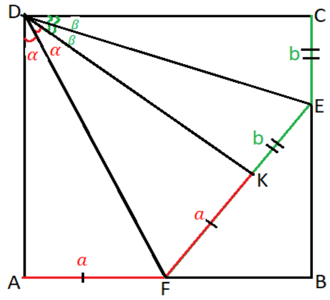
DF$-\angle ADK$ нын биссектрисасы

DE$-\angle KDC$ нын биссектрисасы

$2\alpha + 2\beta = 90°$

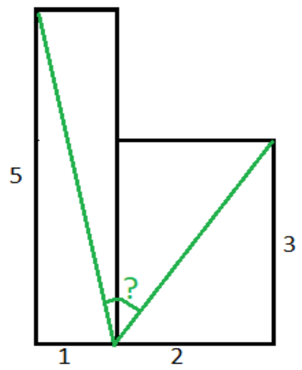
$\alpha + \beta = 45°$

Жообу: $\angle EDK = 45°$



101-сүрөт

23. Эки тик бурчтук сүрөттө көрсөтүлгөндөй жайгашкан. Тригонометрияны колдонбой, эки диагоналдын арасындагы бурчту тап.



102-сүрөт

Чыгаруу:

$AB^2=1^2+5^2=26$

$AC^2=2^2+3^2=13$

$BC^2=3^2+2^2=13$

$AB^2=AC^2+BC^2$ болгондуктан

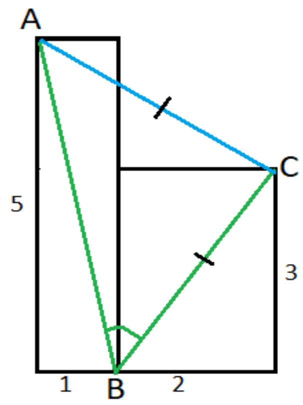
$\angle C = 90^0$

AC=BC болгондуктан

$\angle A = \angle B = 45^0$

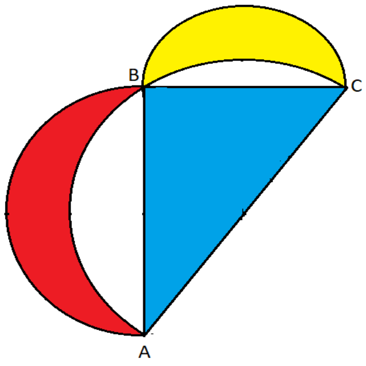
Демек, эки диоганалдын арасындагы бурч 45^0 ка барабар.

Жообу: 45^0



103-сүрөт

24. АВС тик бурчтуу үч бурчтук. Анын жактарына сүрөттө көрсөтүлгөндөй үч жарым айлана сызылган. Сары жана кызыл фигуралардын аянттарынын суммасы ΔАВСнын аянтына барабар экендигин далилдегиле.

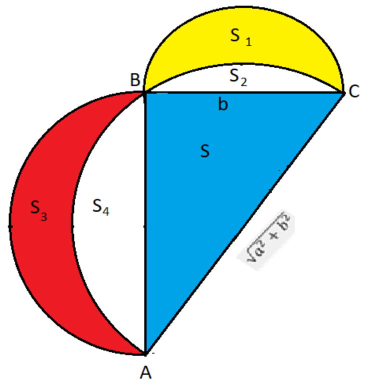


104-сүрөт

Тик бурчтуу үч бурчтуктун катеттерин a жана b менен белгилесек, гипотенузасы $\sqrt{a^2+b^2}$ болот.

b жагына жүргүзүлгөн жарым тегеректин радиусу $-\frac{b}{2}$

a жагына жүргүзүлгөн жарым



105-сүрөт

тегеректин радиусу $-\frac{a}{2}$; гипотенузага жүргүзүлгөн жарым тегеректин радиусу $-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$

$S_1+S_2=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2=\frac{1}{8}\pi b^2$ (1) $S_5=\frac{1}{2}ab$

$S_3+S_4=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{1}{8}\pi a^2$ (2) (1) менен (2)ни кошобуз

$(S_1+S_2)+(S_3+S_4)=\frac{1}{8}\pi(a^2+b^2)$ (3)

$S_2+S_4+S_5=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)^2=\frac{1}{8}\pi(a^2+b^2)$ (4)

$S_2+S_4=\frac{1}{8}\pi(a^2+b^2)-\frac{1}{2}a\cdot b$ (5)

(2) теңдеменин ордуна койсок мындан (3) формуладан

$S_1 + S_3 = \frac{1}{8}\pi(a^2 + b^2) - (\frac{1}{8}(a^2 + b^2) - \frac{1}{2}\ a \cdot b)$

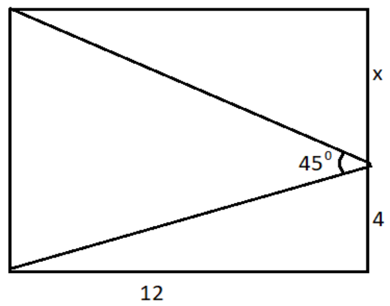
$S_1 + S_3 = \frac{1}{8}\pi(a^2 + b^2) - \frac{1}{8}(a^2 + b^2) + \frac{1}{2}\ a \cdot b$

$S_1 + S_3 = \frac{1}{2}ab$

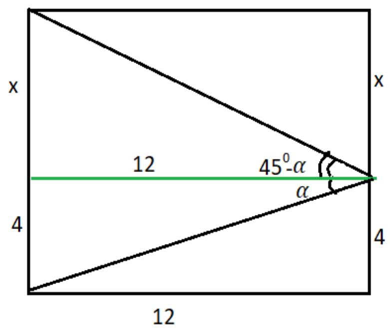
$S_1 + S_3 = S_5$

$S_1 + S_3 = S_{\Delta ABC}$ далилденди.

25. x-? чиймеде берилгендер боюнча x ти тапкыла?



106-сүрөт



107-сүрөт

$\text{tg}\,\alpha = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ (1)

$\text{tg}(45^{\circ} - \alpha) = \frac{x}{12}$ (2)

$\text{tg}(45^{\circ} - \alpha) = \frac{\text{tg}45^{\circ} - \text{tg}\alpha}{1 + \text{tg}45^{\circ}\,\text{tg}\alpha} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} =$

$= \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{2}$

(2) теңдеменин ордуна коюп

$\frac{x}{12} = \frac{1}{2}$ мындан x=6 маанисин алабыз.

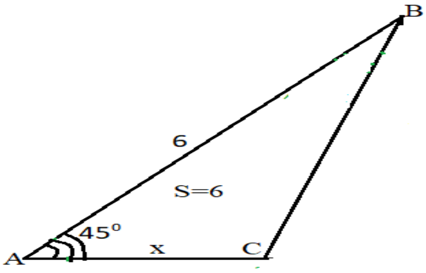
Жообу: x=6

26. ABC үч бурчтугунун аянты 6 $см^2$

AB жагынын узундугу 6 см.

$\angle BAC = 45^0$. CBA бурчунун

тангенсин тапкыла.



108-сүрөт

Берилди:

$S_{\Delta ABC} = 6$ $см^2$

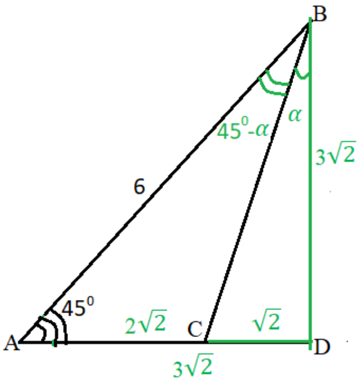
$\angle BAC = 45^0$

AB = 6 см

tg($\angle$CAB)-?

Тик бурчтуу үч бурчтукка

чейин толуктайбыз.



109-сүрөт

90°-45°-45° тик бурчтуу үч бурчтугунда AB=6 болсо,

AD=BD=$3\sqrt{2}$ (себеби катеттер гипотенузадан $\sqrt{2}$ эсе кичине болушат).

AC-жагын x десек

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6x \sin 45^\circ = 6$

$\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6$

$\frac{\sqrt{2}}{4} x = 1$

x= $2\sqrt{2}$

AD=$3\sqrt{2}$

AC=$2\sqrt{2}$ болгондуктан C чекити A менен D нын арасында жатат.

$\angle$CBD=α десек $\angle$CBA= 45°- α

$tg\alpha = \frac{CD}{BD} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3}$

$tg(\angle CBA) = tg(45^o - \alpha) = \frac{tg45^o - tg\alpha}{1 + tg45^o \cdot tg\alpha} = \frac{1 - tg\alpha}{1 + tg\alpha} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$

Жообу: $tg(\angle CBA) = \frac{1}{2}$

27. ABCD төрт бурчтугунда

$\angle A = 60^o$

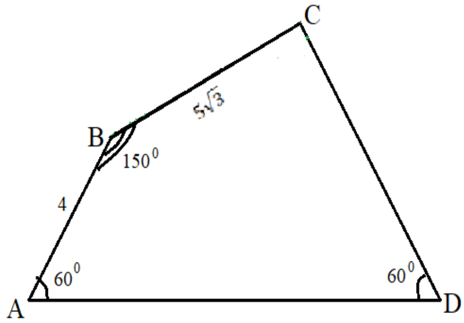
$\angle B = 150^o$

$\angle D = 60^o$

AB=4 см

$BC = 5\sqrt{3}$ болсо,

CD жана AD жагын тапкыла.

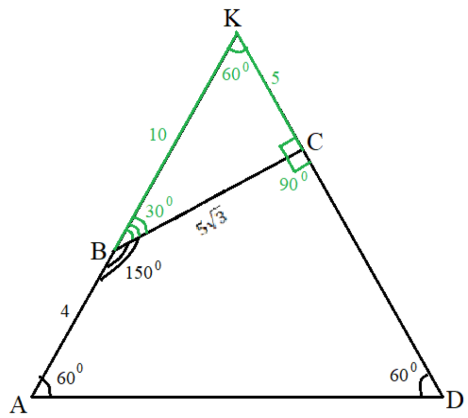


110-сүрөт

Чыгаруу:

Бул фигураны үч бурчтукка чейин толуктайлы, анда ΔACD тең жактуу үч бурчтук.

ΔCKB үч бурчтугунун бурчтарын тиешелүү түрдө 90^0-60^0-30^0 болгондуктан



111-сүрөт

KC=5 см

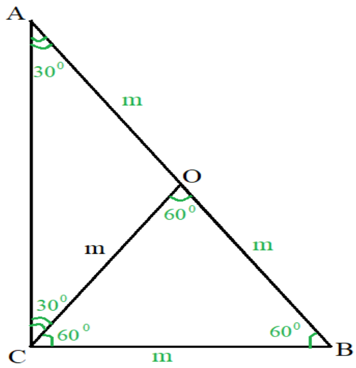
KB= 10 см.

AK = KD = AD = 14

CD = KD-KC= 14-5 = 9

Жообу: 9 см; 14 см.

28. Тик бурчтуу үч бурчтуктун чокусунан гипотенузага жүргүзүлгөн медиана m ге барабар жана ал тик бурчту 1:2 катышында бөлөт. Үч бурчтуктун жактарын тапкыла.



112-сүрөт

CO=m

1)CO=AO=BO

(Себеби тик бурчтуктун сыртынан сызылган айлананын борбору гипотенузанын ортосунда жатат.)

2) $\angle ACO=1k$ $\quad 1k+2k=90^0$

$\angle OCB=2k$ $\quad 3k=90^0$

$k=30^0$

$\angle ACO=30^0$

$\angle OCB=60^0$

3) ΔCOB-тең жактуу үч бурчтук

CO=OB=CB=m

1) AB=AO+OB=m+m=2m

2) $AC^2=AB^2-CB^2$

$AC^2=(2m)^2-m^2=4m^2-m^2=3m^2$

$AC^2=3m^2$

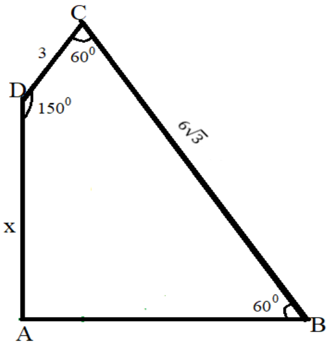
$AC=m\sqrt{3}$

Жообу: AB=2m

BC=m

$AC=m\sqrt{3}$

29. $\angle B=60^0$
$\angle C=60^0$
$\angle D=150^0$
DC=3
BC=$6\sqrt{3}$ болсо, AD жагынын узундугун тапкыла.



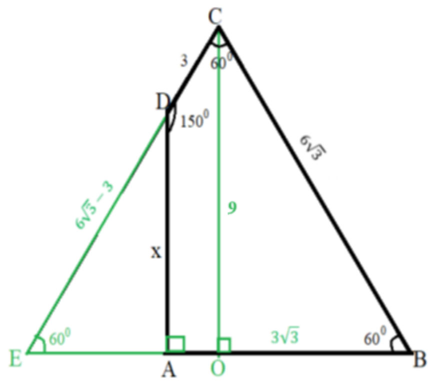
113-сүрөт

Чыгаруу: Берилген фигураны үч бурчтукка чейин толуктайлы.
ΔOBC 90º-60º-30º үч бурчтугу болгондуктан

$OB = \frac{CB}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

$OC = OB\sqrt{3} = 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 9$

$\Delta DEA \sim \Delta CBO$ болгондуктан $\frac{DE}{EA} = \frac{CB}{AB}$



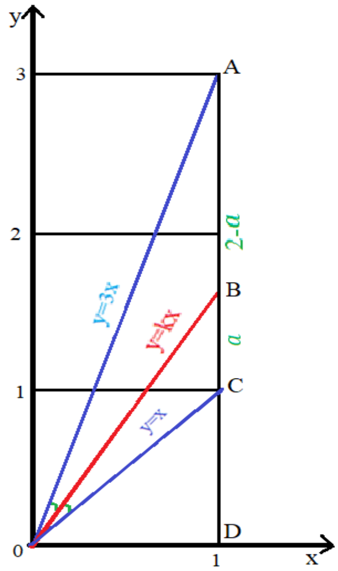
114-сүрөт

$$\frac{6\sqrt{3}-3}{x} = \frac{6\sqrt{3}}{6}$$

$$x = \frac{9(6\sqrt{3}-3)}{6\sqrt{3}} = \frac{(3\sqrt{3}(6-\sqrt{3})}{2\sqrt{3}} = \frac{18-3\sqrt{3})}{2} = 9-1{,}5\sqrt{3}$$

Жообу: $AD = 9 - 1{,}5\sqrt{3}$

30. y=x менен y=3x түз сызыктарынын арасындагы бурчтун биссектрисасы болгондой y=kx түз сызыкта k нын маанисин тапкыла.



115-сүрөт

Чыгаруу:

y=x

y=3x түз сызыктарын

x∈[0;1] кесиндисинде чиебиз.

OA=$\sqrt{1^2+3^2}$=$\sqrt{10}$

OC=$\sqrt{1^2+1^2}$=$\sqrt{2}$

AC=3-1=2

CB= a десек

AB=2- a

Биссектрисанын касиети

боюнча

$$\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{CB}}$$

$$\frac{\sqrt{10}}{2-a}=\frac{\sqrt{2}}{a}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2-a}=\frac{1}{a}$$

$$\sqrt{5}a=2-a$$

$$\left(\sqrt{5}+1\right)a=2$$

$$a=\frac{2}{\sqrt{5}+1}=\frac{2\left(\sqrt{5}-1\right)}{\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)}=\frac{2\left(\sqrt{5}-1\right)}{\sqrt{5}^2-1}=\frac{2\left(\sqrt{5}-1\right)}{5-1}$$

$$=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\mathrm{B}D=BC+CD=a+1=\frac{\sqrt{5}-1}{2}+1=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$k = tg(\angle BOD) = \frac{BD}{OD} = BD = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$;　　　　$k = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

Жообу: $k = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

31. Үч квадраттын ичинде жайгашкан бурчтар

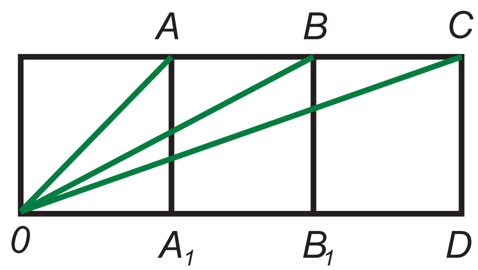
$\angle AOD = \alpha$

$\angle BOD = \beta$

$\angle COD = \gamma$ экендиги

белгилүү болсо

$\alpha + \beta + \gamma$ ны тапкыла.



116-сүрөт

1). $tg\alpha = \frac{AA_1}{OA_1} = \frac{1}{1} = 1;$　　$tg\alpha = 1,$　　$\alpha = 45^0$

2). $tg\beta = \frac{BB_1}{OB_1} = \frac{1}{2};$　　$tg\beta = \frac{1}{2}$

3). $tg\gamma = \frac{CD}{OD} = \frac{1}{3};$　　$tg\gamma = \frac{1}{3}$

$$tg(\beta + \gamma) = \frac{tg\beta + tg\gamma}{1 - tg\varphi \cdot tg\gamma} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1$$

$tg(\beta + \gamma) = 1$　　　　$\beta + \gamma = 45^0$

$\alpha + \beta + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) = 45^0 + 45^0 = 90^0$

Жообу: 90^0

9. ПИФАГОРДУН ТЕОРЕМАСЫНА ТУУРА КЕЛҮҮЧҮ НАТУРАЛДЫК САНДАР

$a^2+b^2=c^2$ формуласына төмөнкү натуралдык сандар туура келет.

$a=m^2-n^2$ мында $m,n\in N$

$b=2mn$

$c=m^2+n^2$

$(m^2-n^2)^2+(2mn)^2=(m^2+n^2)^2$ экендигин өз алдынарча далилдеп көргүлө.

a	b	c
$2^2 - 1^2$	2·2·1	$2^2 + 1^2$
32 - 22	2·3·2	32 + 22
42 - 32	2·4·3	42 + 32
52 - 42	2·5·4	52 + 42
62 - 52	2 · 6·5	62 + 52
$7^2 - 6^2$	2 · 7·6	72 + 62
$8^2 - 7^2$	2·8-7	82 + 72
$9^2 - 8^2$	2 · 9-8	92 + 82
$10^2 - 9^2$	2 · 10 - 9	107 + 92

a	b	c
3	4	5
5	12	13
7	24	25
9	40	41
11	60	61
13	84	85
15	112	113
17	144	145
19	180	181

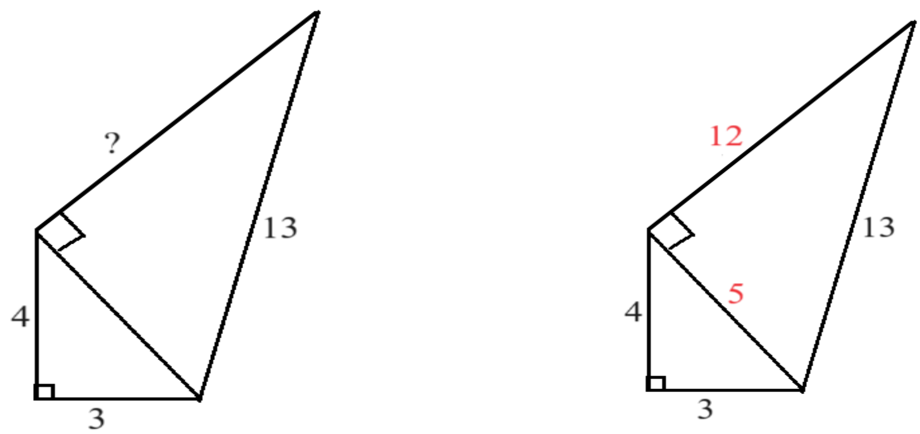
Бул таблицаны мындан ары улап кетсек болот. Таблицаны жакшылап байкап көрсөк a тилкеси 3 төн башталган так сандардан турат. b тилкеси жуп сандар. с тилкеси так сандар жана b менен с удаалаш натуралдык сандар экенин байкадык. Мындан тышкары Пифагордун теоремасына (8; 15; 17) жана (20; 21; 29) үчтүктөрү да туура келет.

Ошондой эле жогорку таблицада берилген үчтүктөргө эселүү үчтүктөр да туура келет. Эң көп колдонулуучу үчтүктөр (3;4;5); (6;8; 10); (5; 12; 13)

Буларды эстеп калып кээ бир маселелерди оозеки чыгарса болот.

1-маселе:

Маселенин берилиши: Маселенин чыгарылышы:

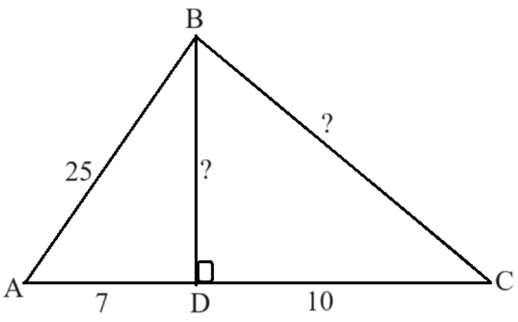


117-сүрөт

Окуучуларга тесттик геометриялык даяр чиймелер менен берилген маселелерди чыгартууда, чийменин өзүндө иштөөгө көнүктүрүү керек.

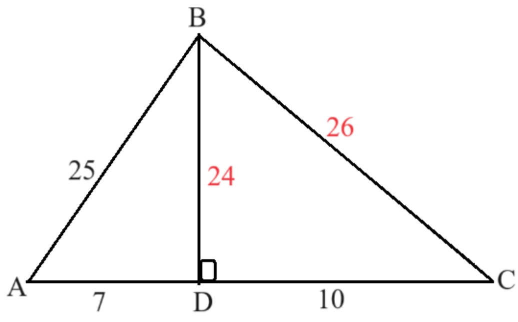
2-маселе:

Маселенин берилиши:



118-сүрөт

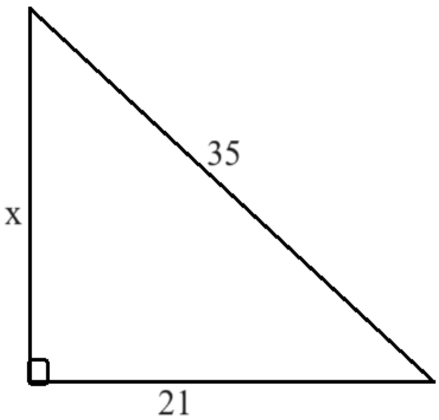
Маселенин чыгарылышы:



119-сүрөт

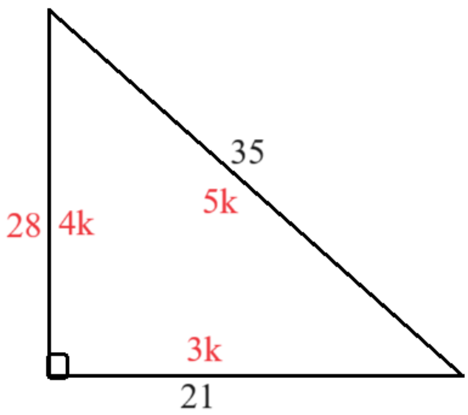
3-маселе:

Маселенин берилиши:



120-сүрөт

Маселенин чыгарылышы:



121-сүрөт

21 жана 35 сандары 7 ге эселүү, демек 21:7=3

35:7=5

x:7=4 мында x=4·7=28

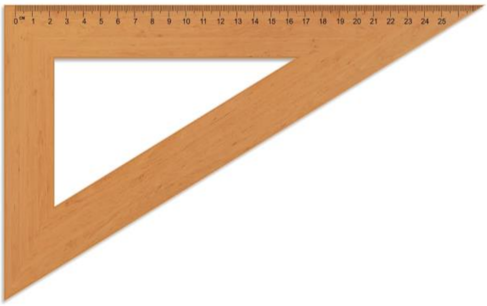
Биз бул маселени оозеки эсептөө менен төмөндөгүдөй эсептөөлөрдөн кутулдук.

x=$\sqrt{35^2-21^2}=\sqrt{1225-441}=\sqrt{784}=28$.

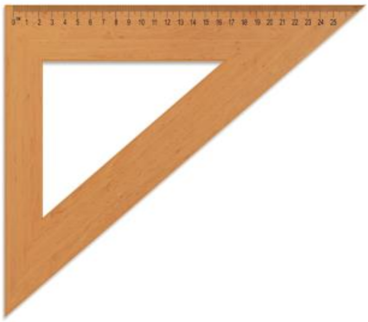
10. “ИДЕАЛДУУ” ҮЧ БУРЧТУКТАР

Эгерде байкасаңар сатууда эки гана түрдөгү тик бурчтуу үч бурчтук сызгычтар сатылат.

1) 90º-60º-30º 2) 90º-45º-45º



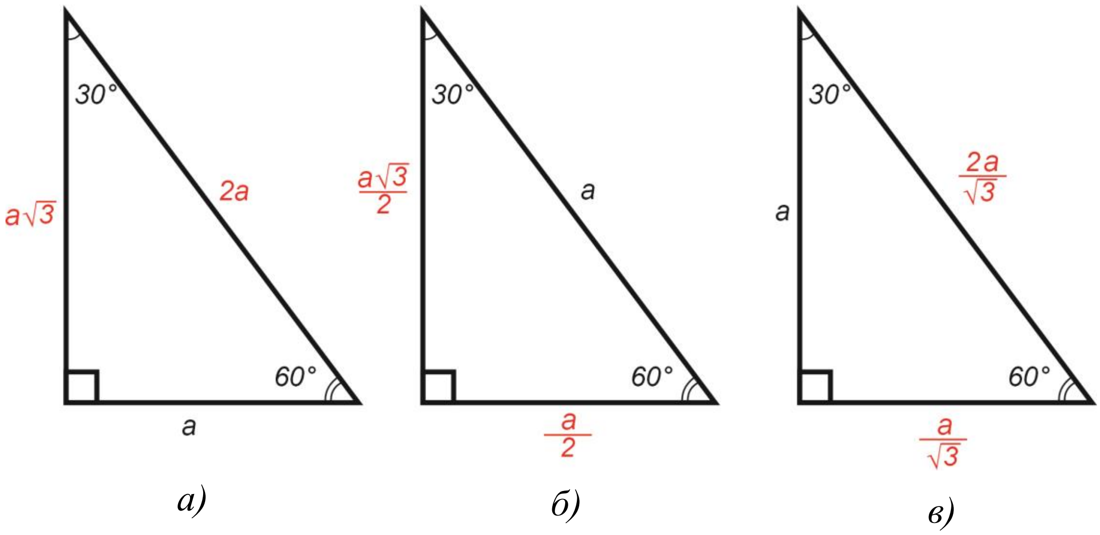
222-сүрөт



223-сүрөт

Бул үч бурчтуктарды "идеалдуу үч бурчтуктар" деп атайлы. Себеби тригонометриянын жана геометриянын көптөгөн маселелери 30°, 45°, 60°, 90° га байланышкан.

90°- 60°-30° тик бурчтуу үч бурчтуктун жактарынын арасындагы байланыштар.



224-сүрөт

30°тук бурчтун каршысындагы катет гипотенузанын жарымына барабар.

60°тук бурчтун каршысындагы катет, кичине катеттен (30°тук буртун каршысындагы катеттен) $\sqrt{3}$ эсе узун.

30°тук бурчтун каршысындагы катетти кичинекей катет, 60° тук бурчтун каршысындагы катетти чон катет деп шарттуу түрдө белгилеп алалы.

1.Эгерде кичине катет a болсо, чоң катет андан $\sqrt{3}$ эсе чон, гипатенуза кичине катеттен эки эсе чоң.

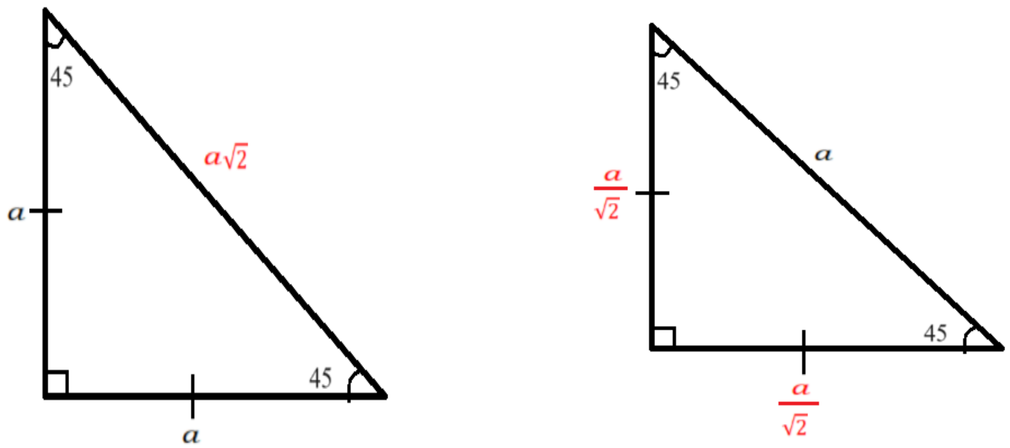
2.Эгерде гипотенуза a болсо кичине катет анын жарымына барабар.

Чон катет кичине катеттен $\sqrt{3}$ эсе чоң.

3.Эгерде чоң катетти a деп белгилесек, кичине катет андан $\sqrt{3}$ эсе кичине.

Гипотенуза кичине катеттен эки эсе чоң.

90º-45º-45º тик бурчтуу үч бурчтугунун жактарынын арасындагы байланыштар.



а) *б)*

225-сүрөт

90º-45º-45º тик бурчтуу үч бурчтугунун катеттери a болсо, анда гипотенузасы $\sqrt{2}$ эсе узун.

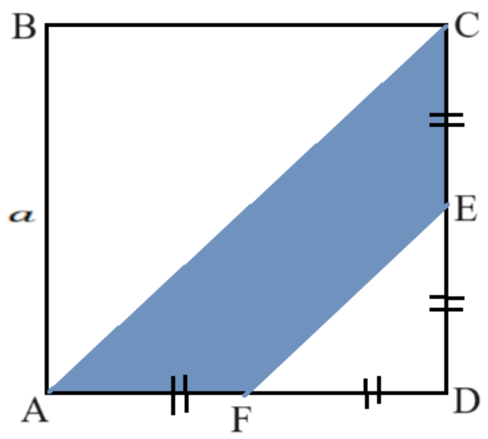
Тескерисинче гипотенузасы a болсо, катеттери $\sqrt{2}$ эсе кыска. Жогорку сүрөттөрдө мүмкүн болгон 5 учур каралды. Бул байланыштар геометриялык көп маселелерди оозеки чыгарууга жардам берет. Төмөндө ошол байланыштарды жана Пифагордун теоремасында көп колдонуучу натуралдык сандардын үчтүгүн колдонуу менен даяр чиймеде оозеки табууга бир нече мисалдарды карайлы.

1-маселе: ABCD-квадрат

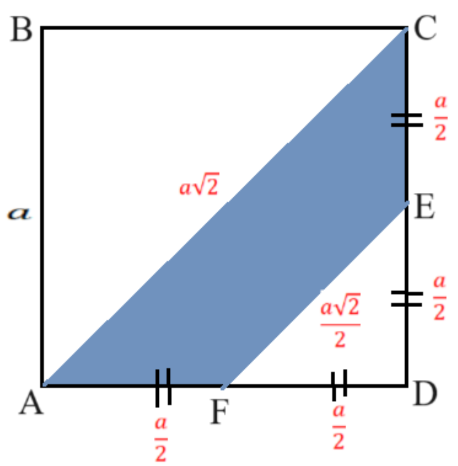
P_{ACEF}-?

Чыгарылышы:

$P_{ACEF}=\frac{a\sqrt{2}}{2}+a\sqrt{2}+\frac{a}{2}+\frac{a}{2}=a+1{,}5a\sqrt{2}$



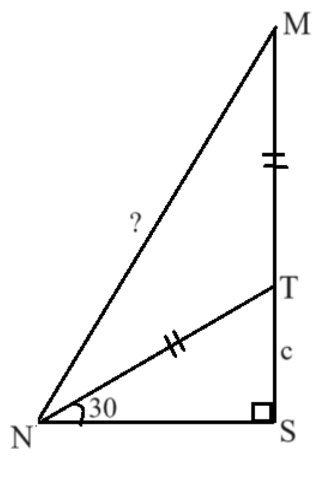
226-сүрөт



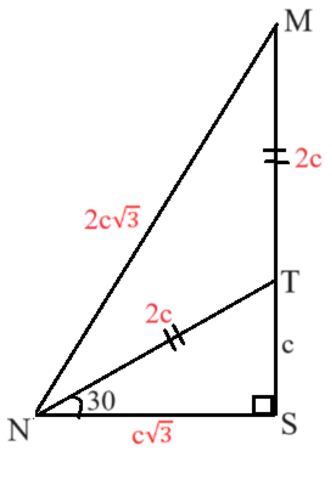
227-сүрөт

2-маселе. Берилиши:

Чыгарылышы:

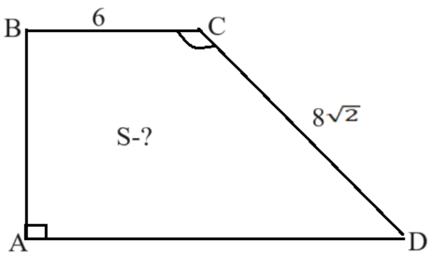


228-сүрөт



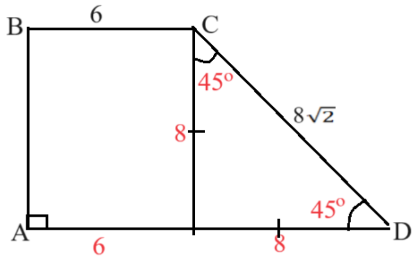
229-сүрөт

3-маселе. Берилиши:



230-сүрөт

Чыгарылышы: S = $\frac{6+14}{2} \cdot 8 = 80$

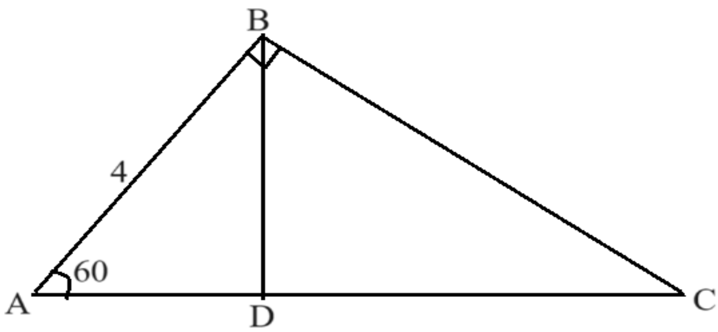


231-сүрөт

4-маселе. Берилиши: AB=4

$\angle A = 60^o$

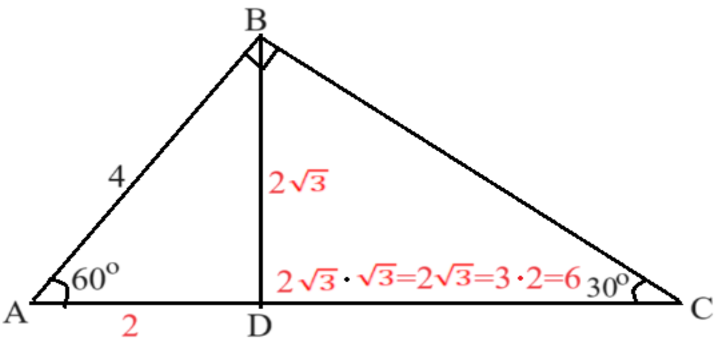
$S_{\Delta BCD}$-?



232-сүрөт

Чыгарылышы: 90º-60º-30º түрүндөгү үч бурчтуктун бурчтары менен жактарынын арасындагы байланыштарды чиймени өзүндө колдонуп жактарын оозеки табабыз.

$$S_{\Delta BCD}=\frac{1}{2}DC \cdot BD = \frac{1}{2}6 \cdot 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$



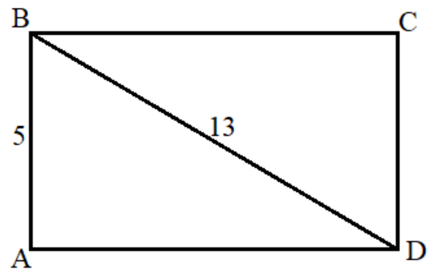
233-сүрөт

Демек жогорку мисалдардан геометриялык тесттик маселелерди чыгаруу методикасы традициялык маселе чыгаруу методикасынан принципиалдуу айырмасы бар экендиги түшүнүктүү болду.

Даяр чиймелерде Пифагордун теоремасын колдонуп чыгарылуучу маселелер

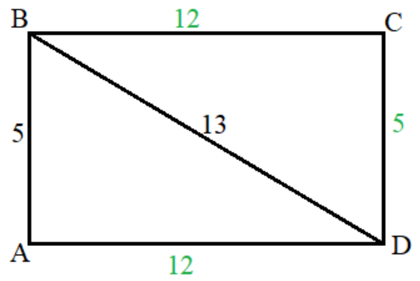
5.

а)



P_{ABCD}-?

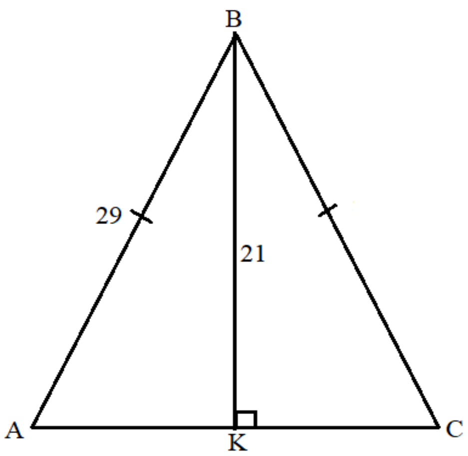
234-сүрөт



P=2(5+12)=34 Жообу: 34

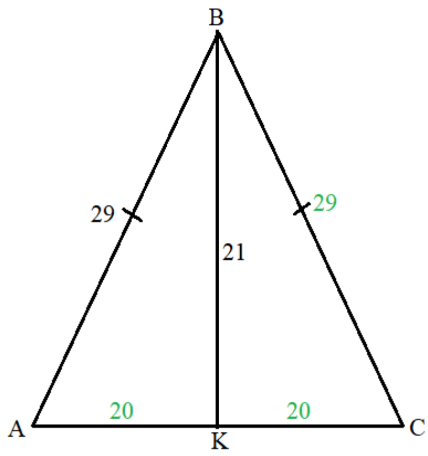
235-сүрөт

б)



AC-?

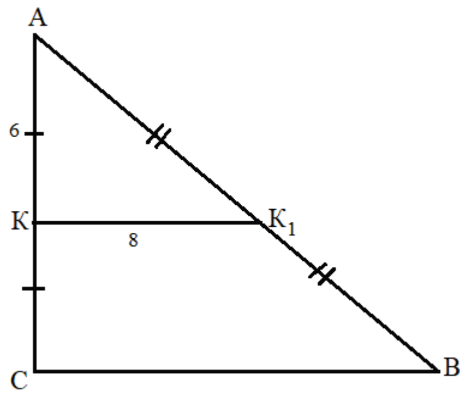
236-сүрөт



AC=20+20=40 Жообу: 40

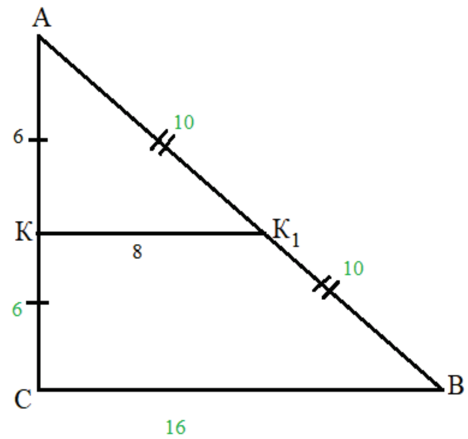
237-сүрөт

в)



P_{ABC}-?

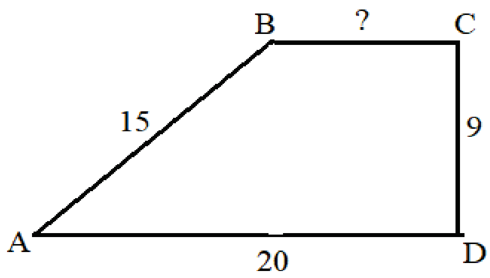
238-сүрөт



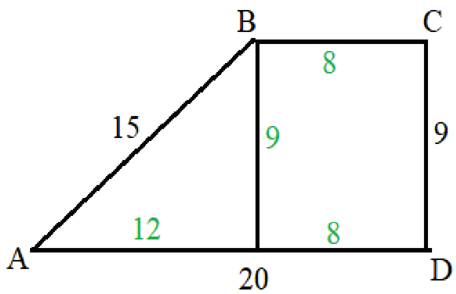
$P_{ABC}=12+20+16=48$ Жообу: 48

239-сүрөт

г)



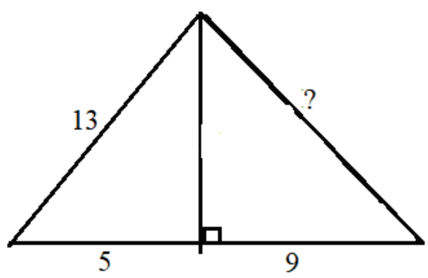
240-сүрөт



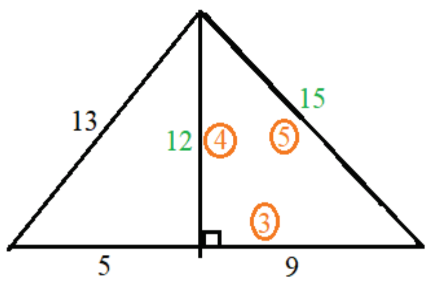
Жообу: 8

241-сүрөт

33.

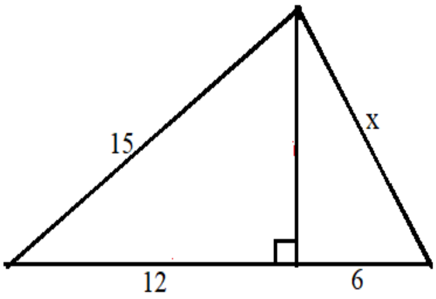


242-сүрөт

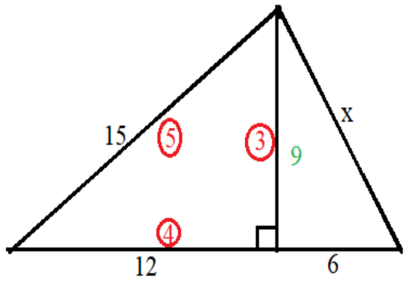


Жообу: 15

243-сүрөт



244-сүрөт



245-сүрөт

$x^2=9^2+6^2$

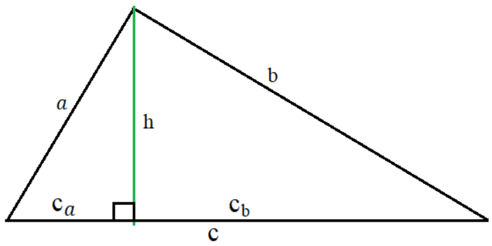
$x^2=117$

$x=\sqrt{117}$

$x=3\sqrt{13}$ жообу: $3\sqrt{13}$

Тик бурчтуу үч бурчтуктагы катеттеринин жана алардын проекцияларынын арасындагы байланыштар.

6.



246-сүрөт

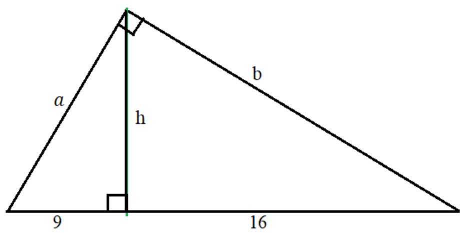
$c^2 = a^2 + b^2$

$a^2 = c_a \cdot c$

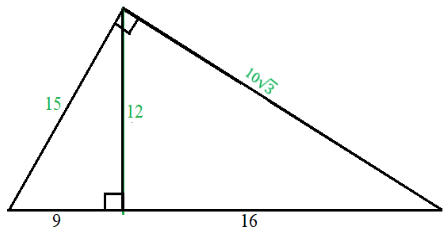
$b^2 = c_b \cdot c$

$h^2 = c_a \cdot c_b$

а)



247-сүрөт



248-сүрөт

$h^2=9\cdot16$

$h=\sqrt{9\cdot16}=3\cdot4=12$

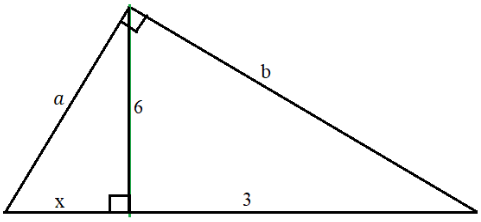
$a^2=25\cdot9$

$a=\sqrt{25\cdot9}=5\cdot3=15$

$b^2=25\cdot12$

$b=\sqrt{25\cdot12}=10\sqrt{3}$ жообу: $10\sqrt{3}$

б)



249 – сүрөт

x–? a-? b -?

$6^2=x\cdot 3$

$x=12$

$AC=12+3=15$

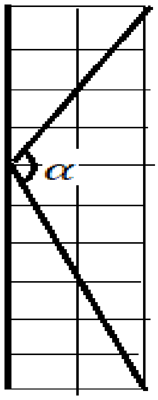
$a^2=12\cdot 15$

$a=\sqrt{12\cdot 15}=\sqrt{4\cdot 3\cdot 3\cdot 5}=6\sqrt{5}$

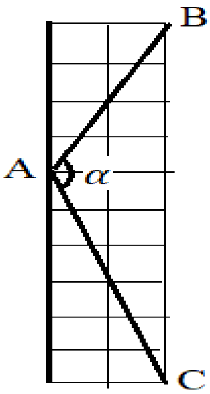
$b^2=3\cdot 15$

$b=3\sqrt{5}$

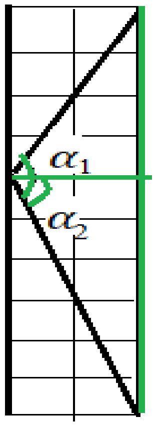
7.



250-сүрөт



251-сүрөт



252-сүрөт

Клеткаларды колдонуп чиймедеги α бурчун тапкыла (250-сүрөт).

1-жол. Вектордук метод менен чыгарабыз. А чекитин координат системасынын башталыш чекити катары карайбыз (251-сүрөт).

$\overrightarrow{AB}(2;4)$

$\overrightarrow{AC}(2;-6)$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$

$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2^2+(-6)^2}=4\sqrt{10}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\cdot 2+4\cdot(-6)=-20$

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{-20}{2\sqrt{5}\cdot 4\sqrt{10}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha=180^{\circ}-45^{\circ}=135^{\circ}\quad \alpha=135^{\circ}$$

2-жол. Тангенс аркылуу табабыз (252-сүрөт).

$$tg\alpha_1 = \frac{4}{2} = 2$$

$$tg\alpha_2 = \frac{6}{2} = 3$$

$$tg\alpha = tg(\alpha_1 + \alpha_2) =$$

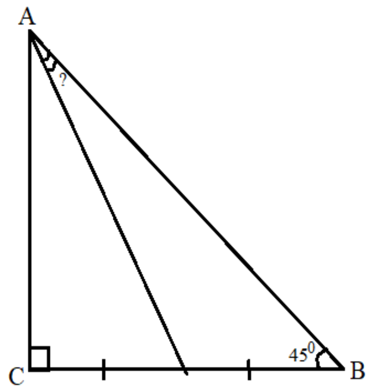
$$= \frac{tg\alpha + tg\alpha_2}{1 - tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2} =$$

$$= \frac{2+3}{1-2\cdot 3} = \frac{5}{-5} = -1$$

$$tg\alpha = -1$$

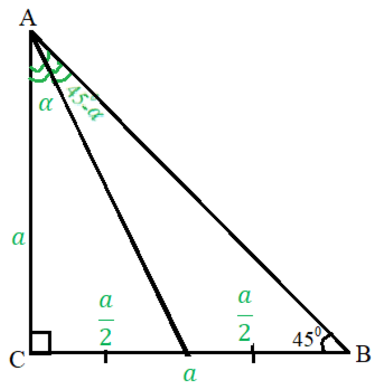
$$\alpha = 135^0$$

8. Тең капталдуу тик бурчтуу үч бурчтуктун тар бурчунун чокусунан жүргүзүлгөн медиана менен гипотенузанын ортосундагы бурчтун тангенсин тап.



253-сүрөт

Биз издеген бурч $(45^0$-$\alpha)$ га барабар.



254-сүрөт

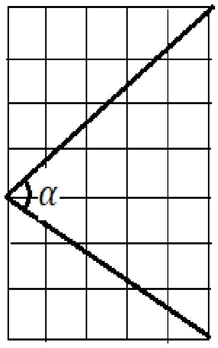
$$tg\alpha = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$tg(45^0 - \alpha) = \frac{tg45^0 - tg\alpha}{1 + tg45^0 \cdot tg\alpha} =$$

$$= \frac{1 - tg\alpha}{1 + tg\alpha} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

Жообу: $\frac{1}{3}$

9. α бурчунун тангенсин тапкыла.



255-сүрөт

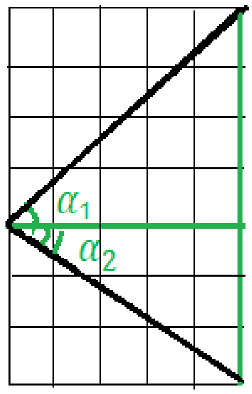
$tg\alpha_1 = \frac{4}{5}$ экендиги чиймеден

$tg\alpha_2 = \frac{3}{5}$ көрүнүп турат

$$tg\alpha = tg(\alpha_1 + \alpha_2) =$$

$$= \frac{tg\alpha_1 + tg\alpha_2}{1 - tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2} =$$

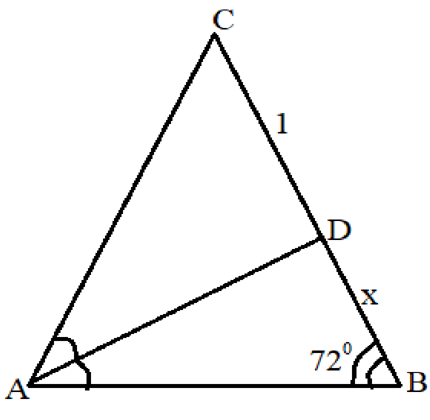
$$= \frac{\frac{4}{5} + \frac{3}{5}}{1 - \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5}} = \frac{35}{13}$$



256-сүрөт

Жообу: $tg\alpha = \frac{35}{13}$

10. Негизиндеги бурчу 72° болгон ABC тең капталдуу үч бурчтугунун A бурчунан экинчи капталына AD биссектрисасы жүргүзүлгөн. Эгерде CD=1 болсо, BD нын узундугун тапкыла.



257-сүрөт

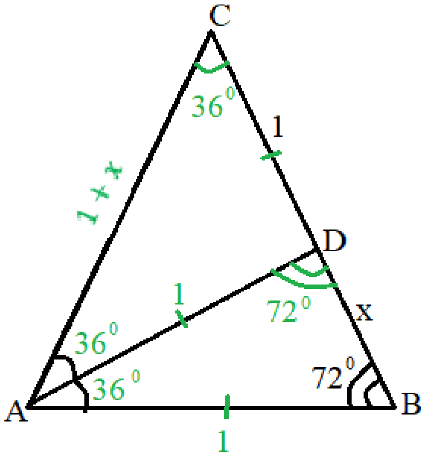
Изделген чондукту x менен белгилейли, мында x>0.

AC=CB

CD=1

x-?

шарт x>0



258-сүрөт

AD- биссектриса болгондуктан

$\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{DB}$ пропорциясы аткарылат

$\frac{1+x}{1} = \frac{1}{x}$

(1+x) x=1

$x^2+x-1=0$

$D=1^2-4\cdot1(-1)=5$

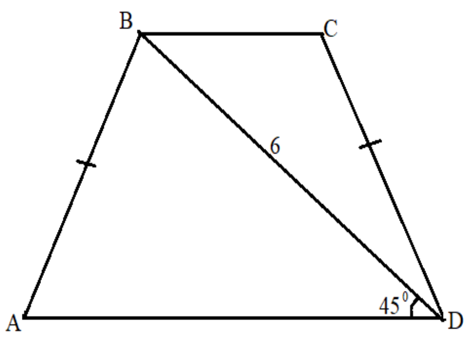
$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

$x_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

$x_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$ маселенин шартын канааттандырбайт.

Жообу: $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

11. ABCD тең капталдуу трапеция. Бир диагоналы төмөнкү негизинен жагы менен 45^0 ту түзөт жана 6 смге барабар болсо, трапециянын аянтын тапкыла.



259-сүрөт

Чыгаруу:

$$BK = KD = \frac{6}{\sqrt{2}}$$

$AK = LD = x$ десек

$$BC = \frac{6}{\sqrt{2}} - x$$

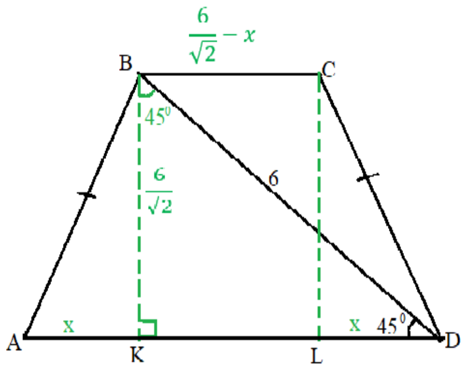
$$AD = AK + KD = x + \frac{6}{\sqrt{2}}$$

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot BK =$$

$$= \frac{x + \frac{6}{\sqrt{2}} + \frac{6}{\sqrt{2}} - x}{2} \cdot \frac{6}{\sqrt{2}} =$$

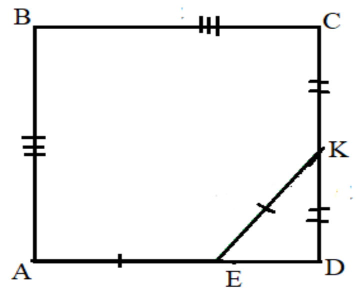
$$= \frac{6}{\sqrt{2}} \cdot \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{36}{2} = 18$$

Жообу: 18 $см^2$.



260-сүрөт

12. ABCD квадратынын CD жагынын ортосу K чекити жана AD жагынан AE=EK болгондой E чекити белгиленген. $\frac{S_{\Delta EDK}}{S_{кв.}}$ катышын тапкыла.



261-сүрөт

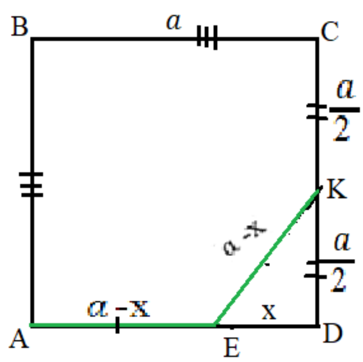
AB=BC=CD=AD= a

ED=x деп белгилейли анда

AE=EK= a-x

ΔEKDда $(a - x)^2 = x^2 + (\frac{a}{2})^2$

$$a^2 - 2ax + x^2 = x^2 + \frac{a^2}{4}$$



262-сүрөт

$$2a\text{x} = a^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$2a\text{x} = \frac{3a^2}{4}$$

$$\text{x} = \frac{3}{8}a$$

$$S_{EKD} = \frac{1}{2}x \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8}a \cdot \frac{a}{2} = \frac{3a^2}{32}$$

$$S_{\text{кв}} = a^2$$

$$\frac{S_{EKD}}{S_{\text{кв}}} = \frac{\frac{3}{32}a^2}{a^2} = \frac{3}{32}$$

Жообу: $\frac{S_{\Delta \text{EDK}}}{S\ \text{кв.}} = \frac{3}{32}$

13. ABCD- тик бурчтук.

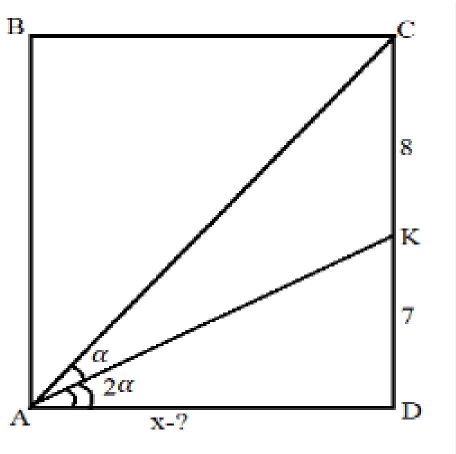
CK=8

KD=7

CD=15

∠KAD=2·∠CAK болсо AD нын узундугун тапкыла.

AD=x деп алалы. Мында x>0.



263-сүрөт

Бул тик бурчтукта бурчтар байланышкан эки тик бурчтуу үч бурчтук бар.

ΔAKD да $\quad tg2\alpha = \frac{7}{x} \qquad (1) \qquad\qquad x = \frac{7}{tg2\alpha} \qquad (3)$

ΔACD да $\quad tg3\alpha = \frac{15}{x} \qquad (2) \qquad\qquad x = \frac{15}{tg3\alpha} \qquad (4)$

мындан $\frac{7}{tg2\alpha} = \frac{15}{tg3\alpha} \qquad (5)$

$7 \cdot \text{tg}3\alpha = 15\text{tg}2\alpha \qquad (6)$

$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$ (7)

$$tg3\alpha = tg(2\alpha+\alpha) = \frac{tg2\alpha + tg\alpha}{1 - tg2\alpha \cdot tg\alpha} = \frac{\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} + tg\alpha}{1 - \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} \cdot tg\alpha}$$

$$=$$

$$= \frac{\frac{2tg\alpha + tg\alpha - tg^2\alpha}{1-tg^2\alpha}}{\frac{1-tg^2\alpha - 2tg^2\alpha}{1-tg^2\alpha}} = \frac{3tg\alpha + tg^3\alpha}{1-3tg^2\alpha} \qquad (8)$$

7tg3α=15tg2α (6) теңдемесинде (7) жана (8) ди коёбуз.

$7 \cdot \frac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1-3tg^2\alpha} = 15\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$ $tg\alpha$ га бөлсөк

$\frac{7(3-tg^2\alpha)}{1-3tg^2\alpha} = \frac{30}{1-tg^2\alpha}$ $tg\alpha \neq 0$

(21- 7 $tg^2\alpha$)·(1- $tg^2\alpha$)=30(1-3 $tg^2\alpha$)

7 $tg^4\alpha$+62 $tg^2\alpha$-9=0

7($tg^2\alpha$)^2+62 $tg^2\alpha$-9=0

$$(21 - 7tg^2\alpha)(1 - tg^2\alpha) = 30(1 - 3tg^2\alpha)$$

$$21 - 21tg^2\alpha - 7tg^2\alpha + 7tg^4\alpha = 30 - 90tg^2\alpha$$

$$7tg^4\alpha + 62tg^2\alpha - 9 = 0$$

$$D = 62^2 - 4 \cdot 7(-9) = 4096$$

$$(tg^2\alpha)_{1;2} = \frac{-62 \pm \sqrt{4096}}{2 \cdot 7} = \frac{-62 \pm 64}{14}$$

1). $\left(tg^2\alpha)_1 = \frac{-62+64}{14} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}\ \ 2\right).(tg^2\alpha)_2 = \frac{-126}{14} = -9$

tgα=$\pm\frac{1}{\sqrt{7}}$ чыгарылышы жок

$a)\ tg\alpha = \frac{1}{\sqrt{7}}$

б) $tg\alpha = -\frac{1}{\sqrt{7}}$ чыгарылышы болбойт, себеби $\alpha<90^0$

$$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} = \frac{2\cdot\frac{1}{\sqrt{7}}}{1-(\frac{1}{\sqrt{7}})^2} = \frac{2}{\sqrt{7}}\cdot\frac{7}{6} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$ (3) кө койсок

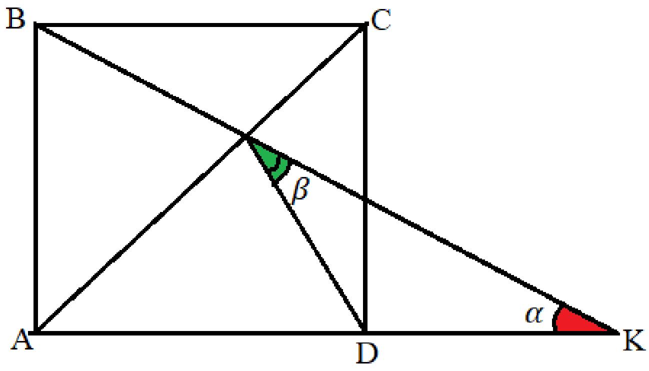
$$x = \frac{7}{tg2\alpha} = \frac{7}{\frac{\sqrt{7}}{3}} = 3\sqrt{7}$$

Жообу: $3\sqrt{7}$

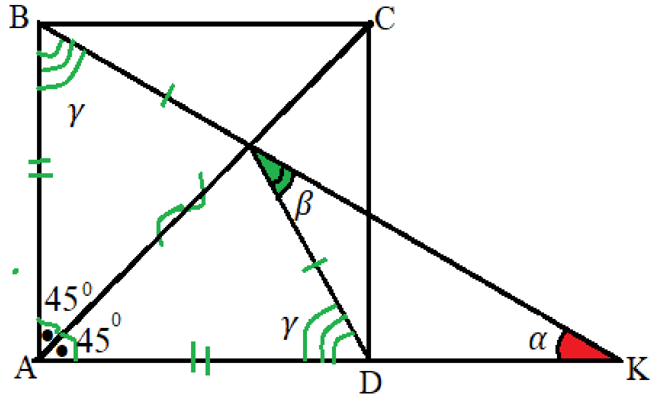
14. Квадратка чиймедеги шарттар аткарылгандай кошумча кесиндилер жүргүзүлгөн. Белгиленген эки бурчтун бурчтук чоңдуктары төмөнкү эки шартты аткарса, аларды тапкыла.

1. Алардын бурчтук чоңдуктары эки орундуу бүтүн сандар.
2. Ал сандар орундары алмашкан эки цифра менен белгиленет

(М: 35º жана 53º)



а)



б)

264-сүрөт

Чыгаруу:

$\alpha + \beta = \gamma$ сырткы бурч

$\alpha + \gamma = 90°$ (ΔАВКда)

$\alpha+\alpha+\beta=90°$

$2\alpha + \beta = 90°$

$\alpha=10x+y$

$\beta=10y+x$ десек

$2(10x + y) + 10y + x = 90°$

$20x + 2y + 10y + x = 90°$

$21x + 12y = 90°$ (3 кө бөлөбүз)

$7x + 4y = 30°$ теңдемесин бүтүн сандарды чыгарабыз.

$4y = 30° - 7x$. $x\in[1; 4]$ маанилерди ала алат.

$y = \frac{30°-7x}{4}$ мында x жуп цифра болуш керек.

1). x=2 болгондо   y=4

анда $\alpha = 24°$, $\beta = 42°$

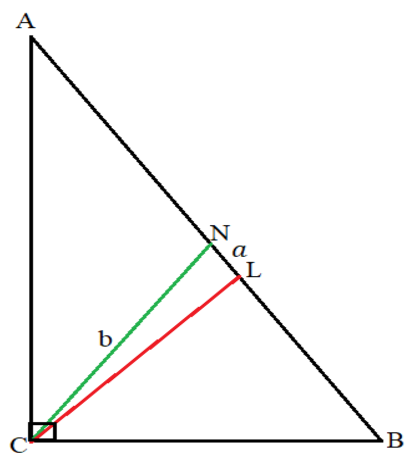
$$y = \frac{30 - 14}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

2). $x = 4$ болгондо $y = \frac{30-16}{4} = \frac{14}{4} = 3{,}5 \notin N$

Жообу: 24° жана 42°

15. ΔABC тик бурчтуу үч бурчтук C чокусунан CN медианасы жана CL биссектрисасы жүргүзүлгөн CN= b

NL= a экендиги белгилүү болсо, берилген үч бурчтуктун аянтын тапкыла.



265-сүрөт

Чыгаруу:

AN=NB=CN себеби алар ΔABC га сырттан сызылган айлананын радиустары

BC=x

AC=y десек, мында x>0, y>0.

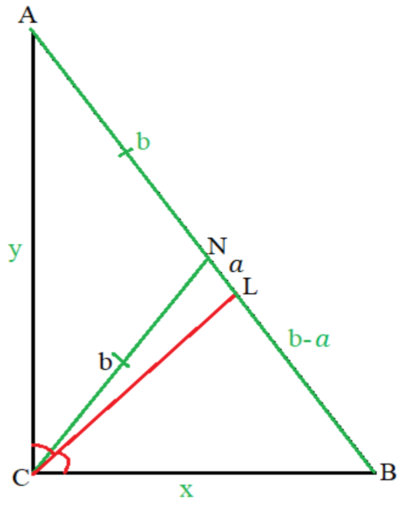
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}xy$$

AN=NB= b

AB=2 b

$AC^2+CB^2=AB^2$

$y^2+x^2=(2\ b)^2$ (1)



266-сүрөт

AL=AN+NL= b + a

BL=BN-LN= b - a

биссектрисанын касиети боюнча

$$\frac{AC}{AL} = \frac{BC}{BL}$$

$$\frac{y}{b+a} = \frac{x}{b-a} \qquad (2)$$

Эки тендемелердин системасын алдык

$$\begin{cases} y^2 + x^2 = 4b^2 & (1) \\ \dfrac{y}{b+a} = \dfrac{x}{b-a} & (2) \end{cases}$$

$y = \frac{b+a}{b-a} \cdot x$ (3) маанисин (1) тендемесине коебуз $(\frac{b+a}{b-a}x)^2 + x^2 = 4b^2$

$$\frac{(b+a)^2}{(b-a)^2}x^2 + x^2 = 4b^2$$

$$x^2 \cdot (\frac{(b+a)^2}{(b-a)^2} + 1) = 4b^2$$

$$x^2 = \frac{2b^2(b-a)^2}{b^2 - a^2}$$

$$x = \frac{b(b-a)\sqrt{2}}{\sqrt{b^2 + a^2}}$$

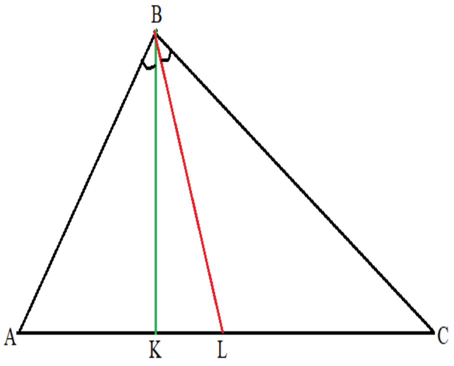
(3) кө x тин ордуна коюп

$$y=\frac{b+a}{b-a}\cdot x=\frac{b+a}{b-a}\cdot\frac{b(b-a)\sqrt{2}}{\sqrt{b^2+a^2}}=\frac{b(b+a)\sqrt{2}}{\sqrt{b^2+a^2}}$$ маанисин алабыз.

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}x\cdot y=\frac{1}{2}\frac{b(b-a)\sqrt{2}}{\sqrt{b^2+a^2}}\cdot\frac{b(b+a)\sqrt{2}}{\sqrt{b^2+a^2}}=\frac{b^2(b^2-a^2)}{b^2+a^2}$$

Жообу: $S_{\Delta}=\frac{b^2(b^2-a^2)}{b^2+a^2}$

16. Үч бурчтуктун бир чокусунан жүргүзүлгөн медиана жана бийиктиктин анын жактары менен бирдей бурчту түзгөндүгү белгилүү болсо, ал үч бурчтуктун тик бурчтуу экендигин далидегиле.



267-сүрөт

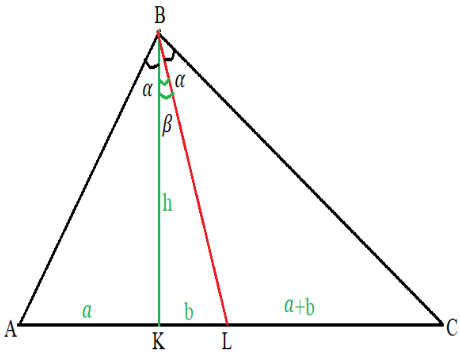
Берилди: ∠ABK= ∠LBC

BK-бийиктик

BL-медиана

Далилдөө керек: ∠ABC=90^0

ΔABC нын жактары үчүн Пифагордун теоремасы аткарылаарын далилдеп коюу жетиштүү.



268-сүрөт

Белгилөөлөрдү киргизели

∠ABK= ∠LBC=α

∠KBL=β

AK= a

KL= b

BK=h десек

AL=LC

LC= a + b

KC= a +2 b

ΔABKда $\quad tg\alpha = \frac{a}{h} \qquad (1)$

ΔKBL де $\quad tg\beta = \frac{b}{h} \qquad (2)$

ΔKBC да $\quad tg(\alpha+\beta) = \frac{KC}{h} = \frac{a+2b}{h} \qquad (3)$

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta}$$

$$\frac{a+2b}{h} = \frac{\frac{a}{h} + \frac{b}{h}}{1 - \frac{a}{h} \cdot \frac{b}{h}}$$

$$\frac{a+2b}{h} = \frac{(a+b)h}{h^2 - ab}$$

$h^2(a+b) = (a+2b)(h^2 - ab)$ мындан

$h^2 = a^2 + 2ab$

$h = \sqrt{a^2 + 2ab}$

ΔAKBда $\quad AB^2 = AK^2 + BK^2 = a^2 + h^2 = a^2 + a^2 + 2ab = 2a^2 + 2ab$

ΔBKCда $\quad BC^2 = BK^2 + KC^2 = h^2 + (a+2b)^2 =$

$$= a^2 + 2ab + a^2 + 4ab + 4b^2 = 2a^2 + 6ab + 4b^2$$

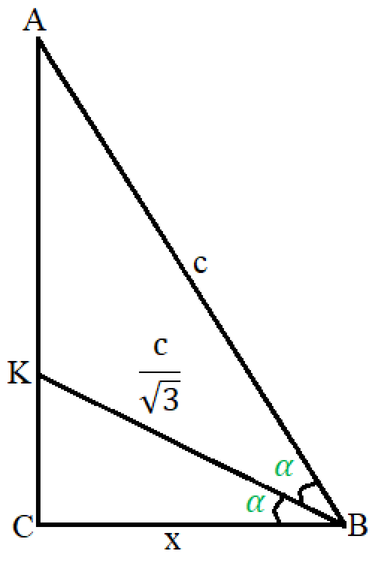
$$AC^2 = (AK + KL + LC)^2 = (a + b + a + b)^2 = (2a + 2b)^2;$$

$$AB^2 + BC^2 = 2a^2 + 2ab + 2a^2 + 6ab + 4b^2 = 4a^2 + 8ab + 4b^2$$

$$= (2a + 2b)^2$$

$AB^2 + BC^2 = AC^2$ шарты аткарылгандыктан, $\angle B = 90^0$ демек, ΔABC-тик бурчтуу үч бурчтук.

17. Эгерде тик бурчтуу үч бурчтуктун гипотенузасы c жана бир тар бурчунун биссектрисасы $\frac{c}{\sqrt{3}}$ болсо, ал үч бурчтуктун катеттерин тап.



269-сүрөт

Берилди: AB=c

BK=$\frac{c}{\sqrt{3}}$, BK-биссектриса

Табуу керек: AC-?

BC-?

BC=x дейли, мында $0<x<\frac{c}{\sqrt{3}}$

ΔKCBда $\cos\alpha = \frac{x}{\frac{c}{\sqrt{3}}} = \frac{x\sqrt{3}}{c}$

ΔACBда $\cos 2\alpha = \frac{x}{c}$

$$2\cos^2\alpha - 1 = \frac{x}{c}$$

$$2\left(\frac{\sqrt{3}x}{c}\right)^2 - 1 = \frac{x}{c}$$

$$6\left(\frac{x}{c}\right)^2 - \frac{x}{c} - 1 = 0$$

$$D = (-1)^2 - 4\cdot 6(-1) = 1 + 24 = 25$$

$$\left(\frac{x}{c}\right)_{1;2} = \frac{1\pm\sqrt{25}}{2\cdot 6} = \frac{1\pm 5}{12}$$

$$\left(\frac{x}{c}\right)_1 = \frac{1+5}{12} = \frac{1}{2}$$

$\left(\frac{x}{c}\right)_2 = \frac{1-5}{12} = -\frac{1}{3}$ (маселенин шартын канааттандырбайт).

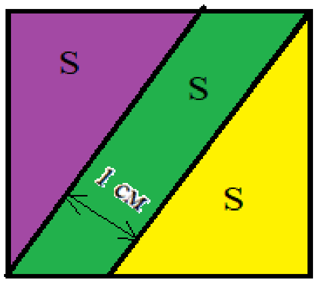
$$\frac{x}{c} = \frac{1}{2}; \quad x = \frac{1}{2}c$$

$$AC^2 = AB^2 - CB^2 = c^2 - (\frac{c}{2})^2 = c^2 - \frac{c^2}{4} = \frac{3c^2}{4}$$

$$AC = \frac{c\sqrt{3}}{2}$$

Жообу: $CB = \frac{1}{2}c$; $AC = \frac{c\sqrt{3}}{2}$

18. Эки параллель түз сызык квадраттын аянтын үч бирдей бөлүккө бөлөт. Эгерде эки түз сызыктын арасындагы аралык 1см болсо, квадраттын аянтын тап.



270-сүрөт

Ортоңку тилке параллелограм

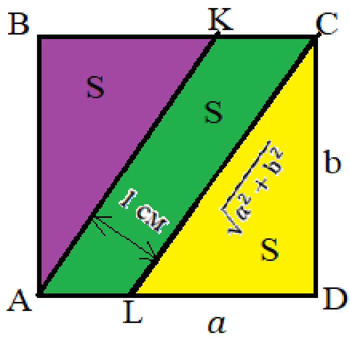
Квадраттын жагын b дейли $b > 0$

$AB=BC=CD=AD= b$

$BK=LD=a$ дейли

$LC=\sqrt{a^2+b^2}$

$$S_n = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot 1 = \sqrt{a^2 + b^2}$$



271-сүрөт

$S_\Delta = \frac{1}{2}ab$ $\quad S_{AKCL} = S_\Delta$ $\quad S_\Delta = \frac{S_{ABCD}}{3} = \frac{1}{3}b^2$

$$\begin{cases} S_{AKCL} = \sqrt{a^2+b^2} \cdot 1 = \sqrt{a^2+b^2} & (1) \\ S_\Delta = \frac{1}{2}ab & (2) \\ S_\Delta = \frac{1}{3}b^2 & (3) \end{cases}$$

(2) менен (3)нү

барабарласак $b = \frac{3}{2}a$ ны табабыз.

(b) нын маанисин (1) барабардыкка коюп, аны (2) менен барабарласак

$$S = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (\frac{3}{2}a)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{9}{4}a^2} = \sqrt{\frac{13a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{13}}{2}$$

$$\frac{a\sqrt{13}}{2} = \frac{1}{2}a \cdot b$$

$$b = \sqrt{13}$$

$S_{кв} = b^2 = \sqrt{13}^2 = 13$ изделген аянт 13 кв. бирдик.

Жообу: 13 кв. бирдик.

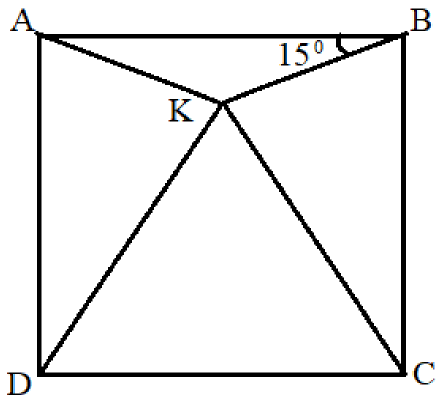
19. ABCD-квадрат

ΔАКВ-тең капталдуу жана

∠ABK=15^0 болсо,

ΔDKC-тең жактуу экендигин

далилдегиле.



272-сүрөт

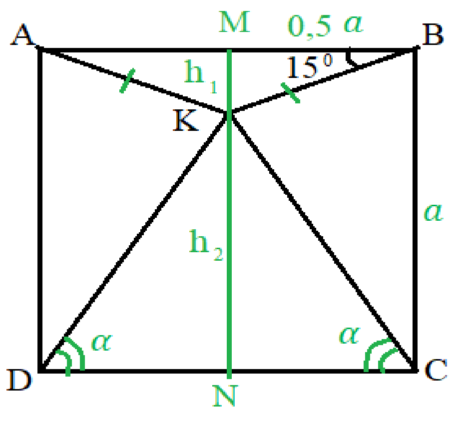
кв. жагы $= a$

∠KCN=α

MK=h_1

NK=h_2 менен белгилейли

$$\begin{cases} tg15^0 = \frac{h_1}{0{,}5a} \\ tg\alpha = \frac{h_2}{0{,}5a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_1 = 0{,}5a \cdot tg15^0 \\ h_2 = 0{,}5a \cdot tg\alpha \end{cases}$$



мүчөлөп кошсок

273-сүрөт

$h_1 + h_2 = 0{,}5a(tg15^0 + tg\alpha)$ мындан $h_1 + h_2 = a$ болгондуктан

$$a = 0{,}5a(tg15^0 + tg\alpha)$$

$$0{,}5(tg15^0 + tg\alpha) = 1$$

$tg15^0 = tg(60^0 - 45^0) = \frac{tg60^0 - tg45^0}{1 + tg60^0 \cdot tg45^0} = \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}$ экендигин колдонсок

$$tg15^0 + tg\alpha = 2$$

$$tg\alpha = 2 - tg15^0 = 2 - \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} = \frac{2+2\sqrt{3}-\sqrt{3}+1}{1+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+3}{1+\sqrt{3}}$$

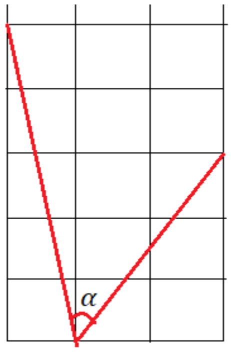
$$= \frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}{1+\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$tg\alpha = \sqrt{3}$ $\angle DCK=60^0$ анда $\angle DKC=60^0$, $\angle CDK=60^0$ мындан $x=60^0$.

ΔDKB да эки бурчу тең 60^0 тан болсо, үчүнчү бурчу да 60^0 болот.

Анда ал үч бурчтук тең жактуу үч бурчтук.

20. Сүрөт боюнча α бурчун тап.



274-сүрөт

I жол

$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$

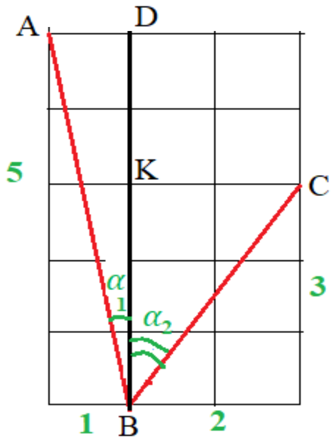
$tg\alpha_1 = \frac{AD}{BD} = \frac{1}{5}$

$tg\alpha_2 = \frac{KC}{KB} = \frac{2}{3}$

$tg\alpha = tg(\alpha_1 + \alpha_2) =$

$= \frac{tg\alpha_1 + tg\alpha_2}{1 - tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2} = \frac{\frac{1}{5}+\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}} = 1$

$tg\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 45^0$



275-сүрөт

II жол

AD=1 KC=2 $\sin\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{26}}$ $\sin\alpha_2=\frac{2}{\sqrt{13}}$

BD=5 KB=3 $\cos\alpha_1=\frac{5}{\sqrt{26}}$ $\cos\alpha_2=\frac{3}{\sqrt{15}}$

AB=$\sqrt{26}$ BC=$\sqrt{13}$

$\sin\alpha=\sin(\alpha_1+\alpha_2)=\sin\alpha_1\cdot\cos\alpha_2+\cos\alpha_1\cdot\sin\alpha_2=$

$=\frac{1}{\sqrt{26}}\cdot\frac{3}{\sqrt{13}}+\frac{5}{\sqrt{26}}\cdot\frac{2}{\sqrt{13}}=\frac{3}{13\sqrt{2}}+\frac{10}{13\sqrt{2}}=\frac{13}{13\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\ \Rightarrow\ \alpha=45^0$

III жол Чийме боюнча

AB=$\sqrt{26}$

BC=$\sqrt{13}$

AC=$\sqrt{13}$ косинустардын теоремасын колдонобуз

$$\cos\alpha=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2\cdot AB\cdot BC}=\frac{\sqrt{26^2}+\sqrt{13^2}-\sqrt{13^2}}{2\cdot\sqrt{26^2}\cdot\sqrt{13^2}}=\frac{26+13-13}{2\cdot 13\cdot\sqrt{2}}=\frac{26}{26\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\ \Rightarrow\ \alpha=45^0$

IV жол

AB=$\sqrt{26}$

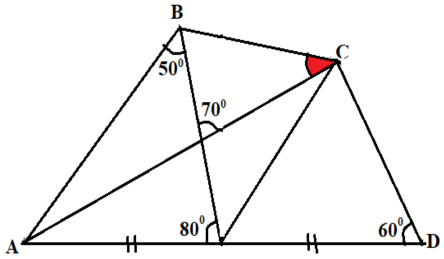
BC=$\sqrt{13}$

AC=$\sqrt{13}$ демек ΔABC теӊ капталдуу.

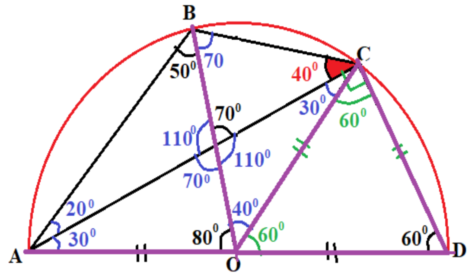
$\sqrt{26^2}=\sqrt{13^2}+\sqrt{13}^2$ болгондуктан (Пифагордун теоремасы аткарылды)

$\angle C=90^o$ жана $\angle A=\angle B=\frac{90^0}{2}=45^o$

21. Кызыл бурчту тапкыла.



276-сүрөт



277-сүрөт

Чыгаруу:

AO=BO=CO=DO

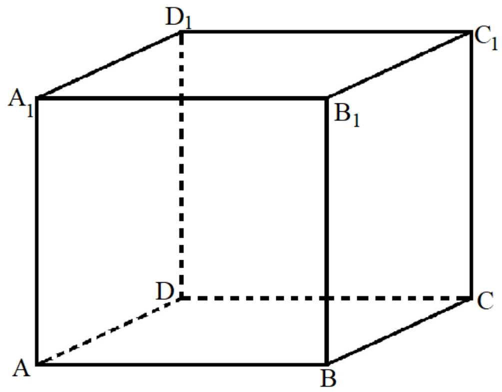
Чиймеде AO=OD=OC=CD=BO экендиги ичиндеги бурчтардын градустук ченин эсептегенде далилденет.

∠BCA=40º

Жообу: 40º

11. СТЕРЕОМЕТРИЯЛЫК МАСЕЛЕЛЕРДИ ЧЫГАРУУ

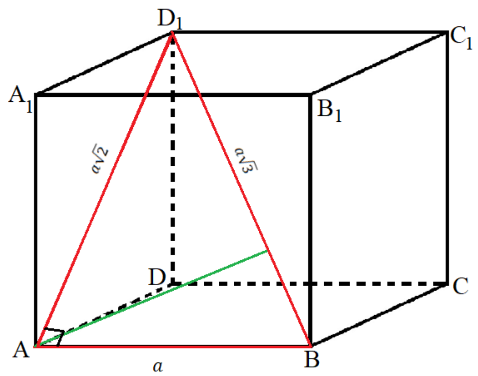
1. Жагы a болгон $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубу берилген. A чекитинен BD_1 түз сызыгына чейинки аралыкты тапкыла [17].



278-сүрөт

Чыгаруу:

A чекитинен BD_1 түз сызыгына чейинки аралык болуп, ΔABD_1 де A чекитинен BD_1 жагына түшүрүлгөн AK бийиктиги эсептелет.



279-сүрөт

ΔABD_1 де $\angle D_1AB$ тик бурч болгондуктан

$S_{ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot AD_1$

$S_{ABD} = \frac{1}{2} BD_1 \cdot AK$ оң жагын барабарласак төмөнкү келип чыгат:

$BD_1 \cdot AK = AB \cdot AD_1$

$$AK = \frac{AB \cdot AD_1}{BD_1} = \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Жообу: $a\sqrt{\frac{2}{3}}$

2. Жагы a болгон $ABCDB_1D_1$ кубу берилген. B чекитинен A_1 C_1 түз сызыгына чейинки аралыкты тапкыла.

Чыгаруу:

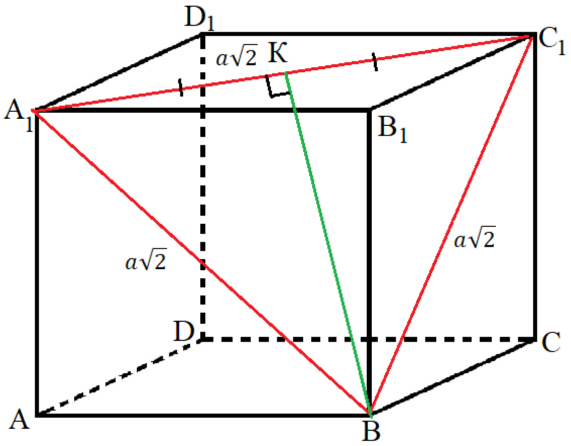
ΔA_1BC_1 - тең жактуу үч бурчтук

$A_1B=BC_1= A_1C_1=a\sqrt{2}$

$A_1K = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$KB=A_1K\cdot\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

Жообу: $\frac{a\sqrt{6}}{2}$



280-сүрөт

Жагы a болгон $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубу берилген. Төмөнкү берилген чекиттен берилген түз сызыкка чейинки аралыкты тапкыла [1]:

3. A чекитинен BB_1 түз сызыгына чейинки аралыкты;

4. A чекитинен CC_1 түз сызыгына чейинки аралыкты;

5. A чекитинен BC түз сызыгына чейинки аралыкты;

6. A чекитинен B_1C_1 түз сызыгына чейинки аралыкты;

7. B чекитинен AC түз сызыгына чейинки аралыкты;

8. B чекитинен A_1C_1 түз сызыгына чейинки аралыкты;

9. A чекитинен B_1C түз сызыгына чейинки аралыкты;

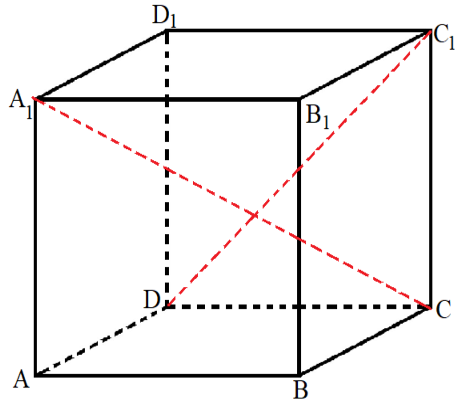
10. A чекитинен A_1C түз сызыгына чейинки аралыкты;

11. B чекитинен DA_1 түз сызыгына чейинки аралыкты;

12. B чекитинен AC_1 түз сызыгына чейинки аралыкты.

3-12-маселелерди өз алдыңарча чыгаргыла.

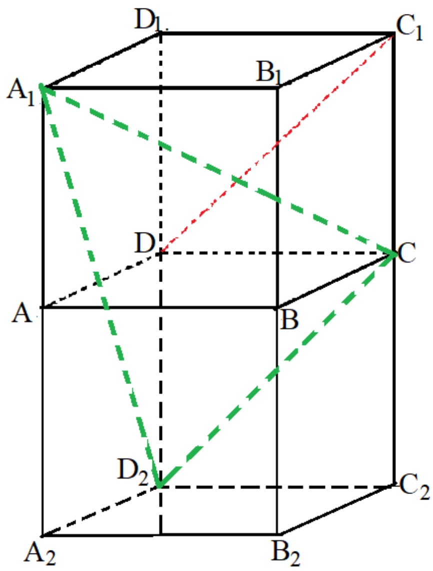
13. Жагы a болгон $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубу берилген. A_1C менен DC_1 түз сызыктарынын арасындагы бурчту тапкыла.



281-сүрөт

Чыгаруу:

DC_1 түз сызыгын A_1C түз сызыгы менен кесилишкендей параллель түз сызык менен алмаштырабыз.



282-сүрөт

$DC_1 \parallel D_2C$

$\angle(A_1C;\ DC_1)=\angle(A_1C;\ D_2C)=$

$=\angle A_1C\,D_2$

$A_1D_2= a\sqrt{3}$

$A_1C= a\sqrt{5}$

$D_2C= a\sqrt{2}$

Косинустардын теоремасы боюнча

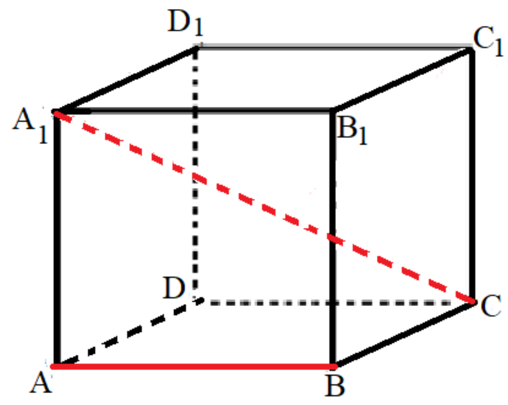
$$\cos(A_1C\,D_2)=\frac{A_1C^2+CD_2^2-A_1D_2^2}{2A_1C\cdot CD_2}=\frac{3a^2+2a^2-5a^2}{2a\sqrt{3}\cdot a\sqrt{2}}=0$$

$\angle A_1C\,D_2=90^o$

A_1C менен DC_1 түз сызыктарынын арасындагы бурч 90^o.

Жообу: 90^o

14. Жагы a болгон $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубу берилген. A_1C менен AB түз сызыктарынын арасындагы бурчту тапкыла.



283-сүрөт

Чыгаруу:

$AB \parallel A_1B_1$

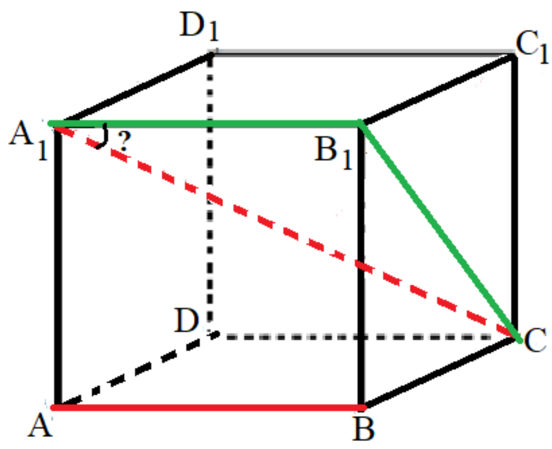
$\angle(A_1C; AB) = \angle(A_1C; A_1B_1) = \angle B_1A_1C$

$A_1B_1 = a$

$B_1C_1 = a\sqrt{2}$

$A_1C = a\sqrt{3}$

Косинустардын теоремасы боюнча



284-сүрөт

$$\cos(B_1A_1C) = \frac{A_1B_1^2 + A_1C^2 - B_1C^2}{2A_1B_1 \cdot A_1C} = \frac{a^2+3a^2-2a^2}{2a \cdot a\sqrt{3}} = \frac{2a^2}{2a^2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\angle B_1A_1C = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$

Жообу: $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$

Төмөндөгү маселелерди өз алдынарча чыгаргыла.

Жагы a болгон $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубу берилген. Төмөнкү түз сызыктардын арасындагы бурчтарды тапкыла [1]:

15. AC түз сызыгы менен BD түз сызыгынын арасындагы бурчту;

16. CC_1 түз сызыгы менен AD түз сызыгынын арасындагы бурчту;

17. AA_1 түз сызыгы менен B_1C түз сызыгынын арасындагы бурчту;

18. BB_1 түз сызыгы менен A_1C түз сызыгынын арасындагы бурчту;

19. AD_1 түз сызыгы менен A_1B түз сызыгынын арасындагы бурчту;

20. DC_1 түз сызыгы менен D_1B_1 түз сызыгынын арасындагы бурчту;

21. AD_1 түз сызыгы менен BD түз сызыгынын арасындагы бурчту;

22. A_1C_1 түз сызыгы менен B_1C түз сызыгынын арасындагы бурчту;

23. A_1C түз сызыгы менен AD түз сызыгынын арасындагы бурчту;

24. A_1B түз сызыгы менен AC түз сызыгынын арасындагы бурчту;

25. AC түз сызыгы менен B_1D_1 түз сызыгынын арасындагы бурчту;

26. A_1B түз сызыгы менен CB_1 түз сызыгынын арасындагы бурчту;

27. B_1C түз сызыгы менен BD_1 түз сызыгынын арасындагы бурчту;

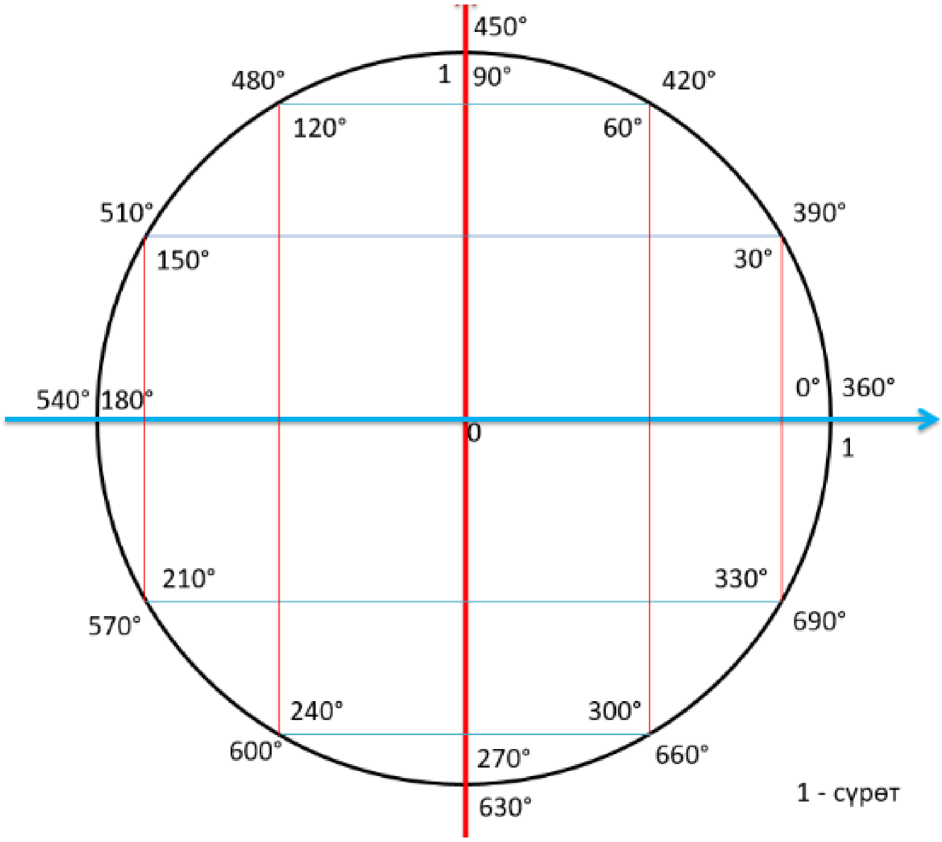
28. BA_1 түз сызыгы менен B_1D_1 түз сызыгынын арасындагы бурчту;

29. AB_1 түз сызыгы менен BD_1 түз сызыгынын арасындагы бурчту;

30. AB түз сызыгы менен DB_1 түз сызыгынын арасындагы бурчту;

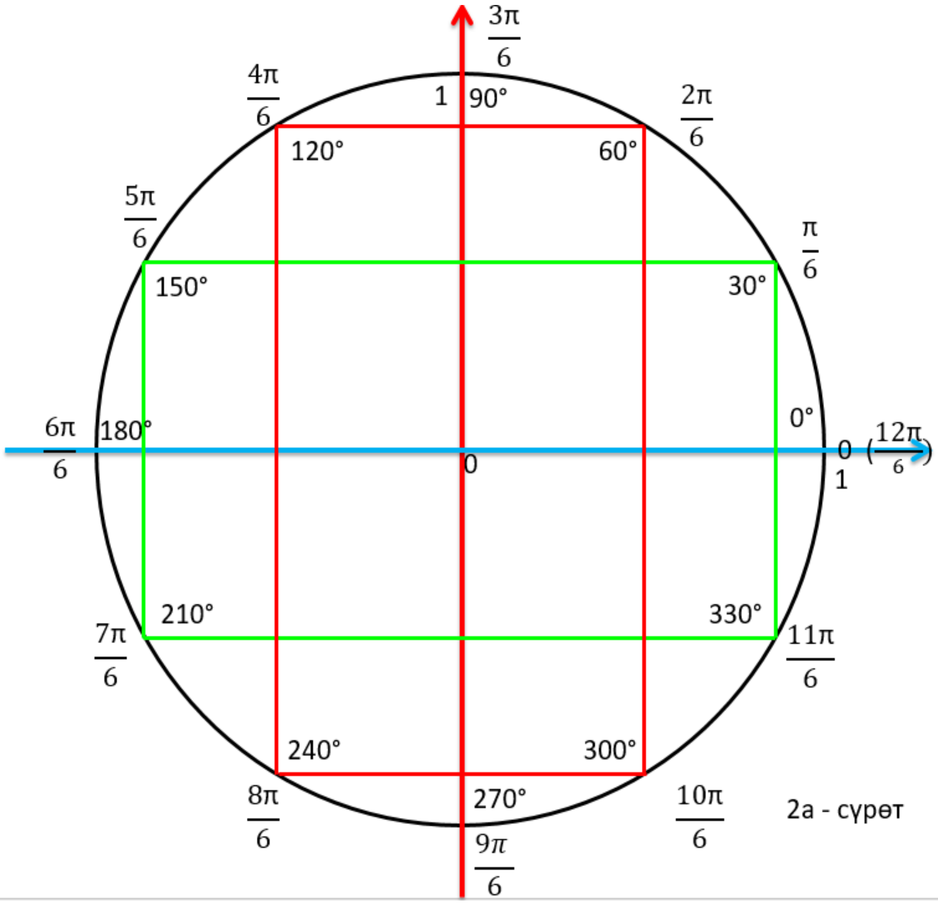
12. ОКУУЧУЛАРГА ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫК БИРДИК АЙЛАНАНЫ КАНТИП ТҮШҮНДҮРҮҮ КЕРЕК

1. Радиусу 1ге барабар болгон айлананы сызабыз.
2. 30° тук кадам менен 0° тан 360° ка чейинки бурчтарды белгилеп чыгабыз. (1-сүрөт)

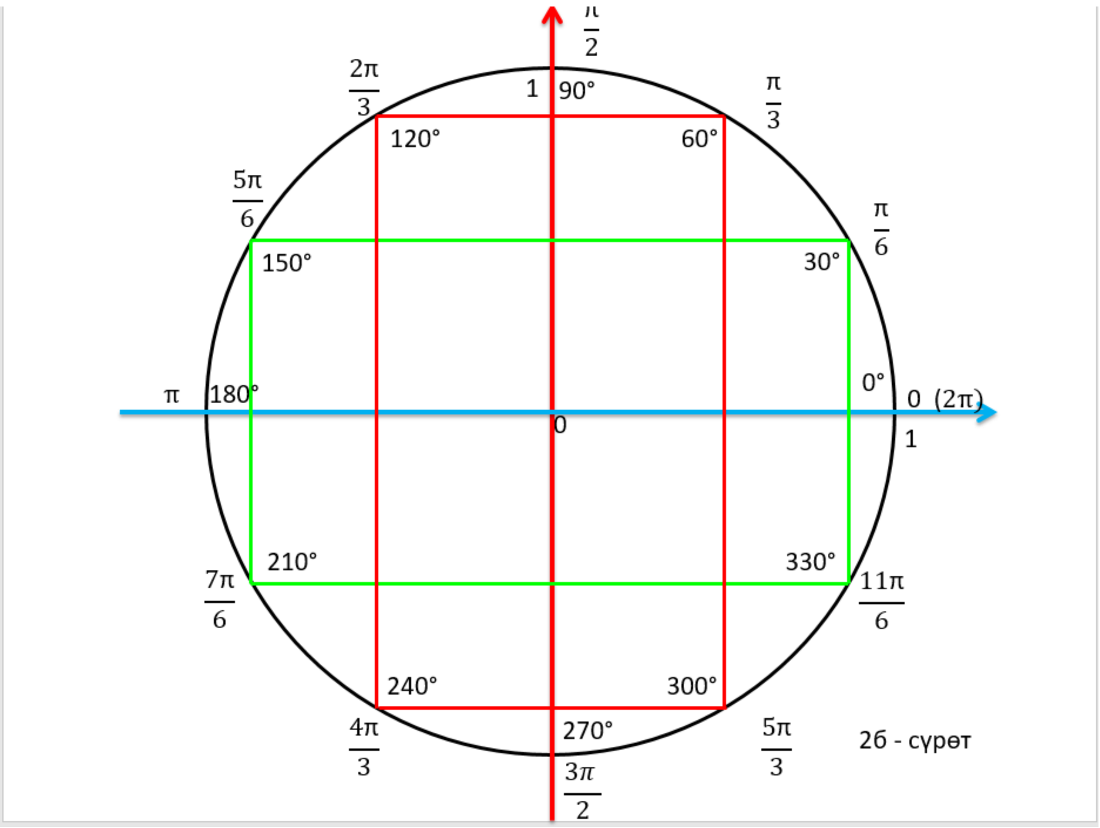


1 - сүрөт

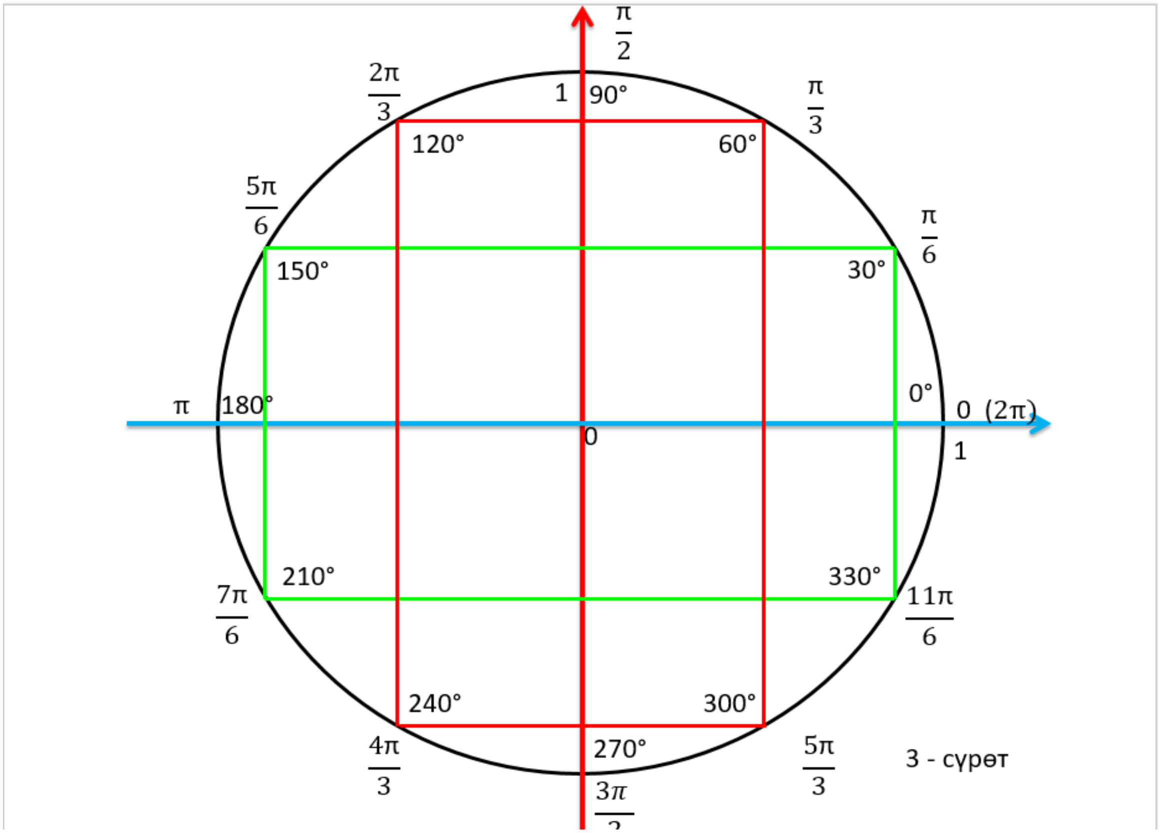
3. $\frac{\pi}{6}$ кадамы менен 0 радиандан 2π радианга чейин белгилеп чыгабыз. (2а-сүрөт)



4. Кыскартыла турган бөлчөктөрдү кыскарткадан кийин 2б – сүрөттөгү абалга келет.

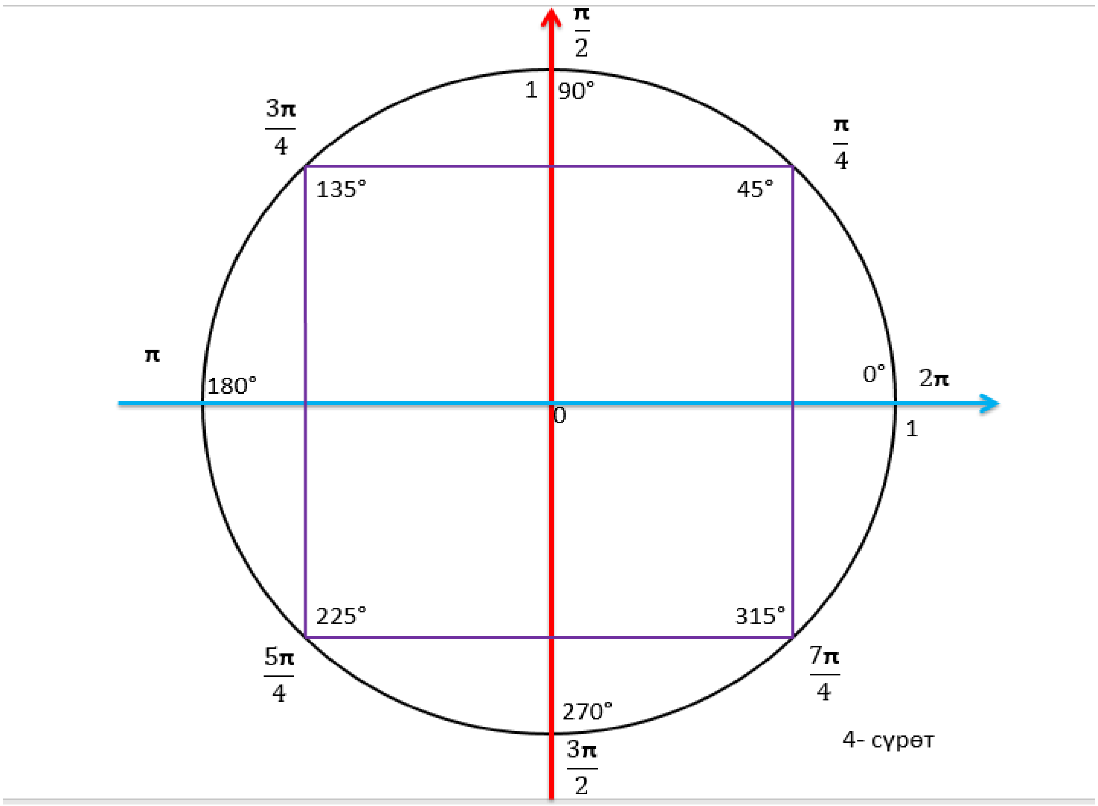


5. Бөлүмдөрү 3 болгон радиандарды туташтырсак, “китеп” форматындагы тик бурчтуктун чокулары болот (3 – сүрөт).



6. Бөлүмдөрү 6 болгон радиандарды туташтырсак, “альбом” форматындагы тик бурчтуктун чокулары болот (3 – сүрөт).

7. 45°, 135°, 225°, 315° градустарга тиешелүү түрдө $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ түрүндөгү радиандар туура келет. Бөлүмдөрү 4 болгон радиандарды туташтырсак, квадраттын чокуларын алабыз (4-сүрөт).



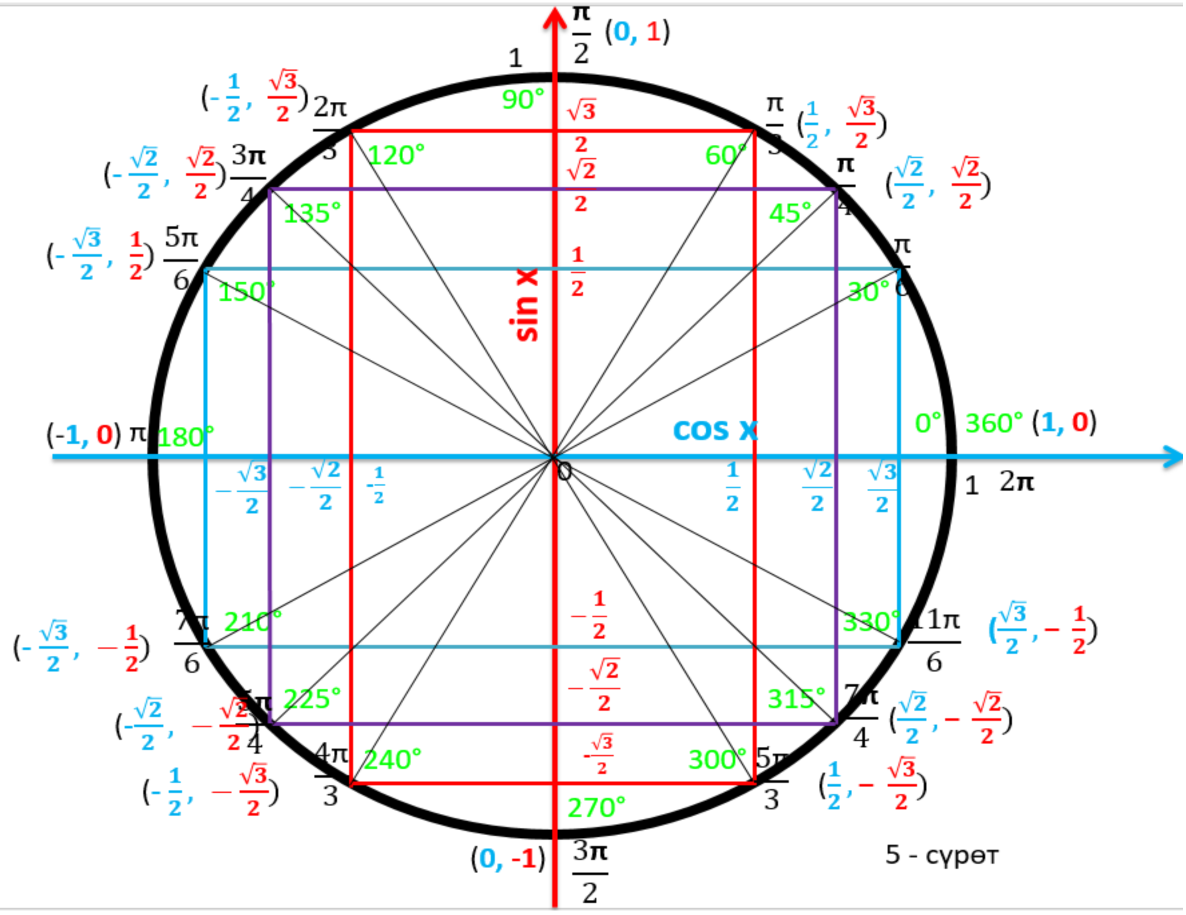
4- сүрөт

8. $\boldsymbol{\pi}$n түрүндөгү радиандар Ox огунда жатат.

Ал эми $\frac{\pi(2n-1)}{2}$ түрүндөгү радиандар Оу огунда жатат.

9. Жогоруда аталган эки тик бурчтук менен квадраттын жактарынын Ох, Оу октору менен кеилишкен чекиттерин тиешелүү түрдө 0; $\pm\frac{1}{2}$; $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$; ±1 координаталарын белгилейбиз жана бирдик айланада жайгашкан 16 чекиттин координаталарын ирээти менен жазып чыгабыз.

Биринчи координатасы $\cos\alpha$, экинчи координатасы $\sin\alpha$ туура келет.



5 - сүрөт

Ошондо, бирдик айлананын Ох огунда жаткан чекиттеринин координаталары (1 ; 0) жана (-1 ; 0);

Оу огунда жаткан чекиттеринин координаталары (0 ; 1) жана (0 ; -1).

“Китеп” форматындагы тик бурчтуктун чокуларында жаткан чекиттердин координаталары $(\pm\frac{1}{2}\ ;\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$.

“Альбом” форматындагы тик бурчтуктун чокуларында жаткан чекиттердин координаталары $(\pm\frac{1}{2}\ ;\ \pm\frac{1}{2})$.

Квадраттын чокуларында жаткан чекиттердин координаталары $(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ \pm\frac{\sqrt{2}}{2})$ экендигин байкадык, мында белгилери чейрегинен көз каранды болот.

Алынган маалыматтарды тригонометриялык функциялардын маанилеринин таблицасына толтурабыз.

α°	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$tg\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$ctg\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	–

α°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
α	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$sin\alpha$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$cos\alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$tg\alpha$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$ctg\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	–

КОЛДОНУЛГАН АДАБИЯТТАР

1. Балаян В.К. Геометрия. Задачи на готовых чертежах 10-11-класс. –Ростов-на-Дону “Феникс”, 2013.
2. Бенжамен Блумдун таксономиясы [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https:// ky.wikipedia.org/wiki. – Загл. с экрана.
3. Виленкин Н.Я., Жохов В.И., Чесноков А.С., Шварцбурд С.И. Математика 5 класс: учебник для учащихся общеобразоват. учреждений. -30-е изд., испр. –М.: Мнемозина, 2012. -280 с.:ил.
4. Геометриялык чиймелер [Электронный ресурс]. – Режим доступа: *https://www.facebook.com/yoursolutionsia/about*– Загл. с экрана.
5. Гнеденко Б.В. "Формирование мировоззрения учащихся впроцесе обучения математике –М.: Просвещение 1982 г.
6. Горстко А.Б. "Познакомтесь с математическим моделированием" –М.: Знание 1991 г.
7. Егерев В.К., Зайцев В.В. Сборник конкурсных задач по математике для поступающих во втузы. Учебн. Пособие./ [Под ред. М.И. Сканави]. – 3-е изд., доп. – М.: Высш. школа, 1978. -519 с., ил.
8. Колмогоров Н.Я. «Алгебра жана анализдин башталышы» орто мектептин 10-11- класстары үчүн окуу китеби. –Б.: “Мектеп” 1992 ж., 314-б.
9. Кускаков М.А. Математика 9-11-класс "Моделирование в решении задач". Волгоград: Учитель 2009 г.

10. Лебедев В. Анализ и решение текстовых задач // Математика в школе. - 2002. - №11. - С. 8.
11. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И., Суворова С.Б. Алгебра. Орто мектептин 8-классы үчүн окуу китеби. –Б.: “Мектеп” 2003 ж.
12. Погорелов А.В. Геометрия. Орто мектептердин 7-11-класстары үчүн окуу куралы. –Ф.: “Мектеп” 1989 ж. 374 б.
13. Рыбникова М.Р. Геометрия. Задачи на готовых чертежах. 7-9 классы. –Луганск: Янтарь, Учебная книга, 2003. – 76 с.
14. Текст түрүндөгү маселелер [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.okuma.kg/online-test. – Загл. с экрана.
15. Устная, но хитрая математика. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://m.facebook.com/groups/963813544555710/announcements/. – Загл. с экрана.
16. Фридман Л.М. "Как научиться решать задачи" Е.Н. Турецкий –М.: Просвещение 1989 г.
17. Шишкин Е., Шишкина Т. " Гуманитариям о математике" Рассказ третий. Модели. Математика No 43 1999 г.
18. Gafur Taskin A., Mustafa Kirikci, Murat Kol, Cockun Arslan. Geometry for 8 th Grade. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://book.zambok.com/. – Загл. с экрана.
19. Math & Beyond. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.facebook.com/groups/3186630728085979/?ref=share&mibextid=KtfwRi/. – Загл. с экрана.

МАЗМУНУ

АЛЫМБАЕВА К.У., ДЖАПАРОВА С.Н.

ТЕКСТТИК МАСЕЛЕЛЕРДИ ЧЫГАРУУДА МАТЕМАТИКАЛЫК МОДЕЛЬ ТҮЗҮҮНҮН ТЕХНОЛОГИЯСЫ

Окуу методикалык колдонмо

Тех. редактору ***Кучкачева Ж.З.***

Басууга берилди 30.03.2024ж. Форматы $60x84^{1}/_{16}$.
Офсеттик кагаз. Офсеттик басуу. Көлөмү 10,25 б.т. Нускасы 500 д.
Бишкек ш., Курчатов көч, 69, “Калем” басма үйү
т. 0706-757610, 49-19-36, E-mail: kalem14@mail.ru
www.kalem.press