

**КЫРГЫЗСКИЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
им. И РАЗЗАКОВА**

**На правах рукописи  
УДК 539.4**

**Джаналиев Нурлан Рахманкулович**

**ПРЕДЕЛЬНЫЕ НАГРУЗКИ ПРИ ИЗГИБЕ  
УПРУГИХ ГИБКИХ СИСТЕМ**

Специальность 01.02.04 –  
механика деформируемого твердого тела

**Автореферат диссертации**

на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Бишкек – 2004

Работа выполнена в Кыргызском техническом университете  
им. И. Раззакова

**Научный руководитель -** доктор физико-математических наук,  
профессор Абдрахманов С.А.

**Официальные оппоненты -** доктор физико-математических наук,  
профессор Рудаев Я.И.

кандидат физико-математических наук,  
Мекенбаев Б.Т.

**Ведущая организация -** институт физики и механики горных  
пород НАН КР

Защита диссертации состоится « 18 » июня 2004 г. в « 14<sup>00</sup> » часов на заседании диссертационного совета Д 01.04.240 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора (кандидата) физико-математических наук в Кыргызском техническом университете им. И.Раззакова по адресу: 720044, Кыргызская Республика, г.Бишкек, пр.Мира, 66.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Кыргызского технического университета им. И.Раззакова.

Автореферат разослан « \_\_\_ » мая 2004 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,  
к.т.н., доцент

А.С. Иманкулова

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### Актуальность темы диссертации:

Широкая автоматизация различных отраслей экономики, повышение эффективности производственных процессов связаны с ростом технических требований к первичным измерительным приборам и датчикам, которые являются неотъемлемой частью информационных систем и систем управления. Ответственную роль выполняют при этом упругие чувствительные элементы, воспринимающие измеряемую величину. Геометрическая форма таких упругих элементов разнообразна и зависит от их назначения и конструкции прибора. Обладая достаточной гибкостью, упругие элементы способны заметно изменять свои размеры и форму под нагрузкой, и это является их основным свойством. Такой элемент может нагружаться циклически, тогда напряжения в нем переменны во времени, поэтому при работе недопустимо его механическое разрушение или искажение формы вследствие наступления массовых пластических деформаций или потери устойчивости, что приведет к нарушению точности выполняемого элементом преобразования. В связи с этим к рабочим качествам чувствительных упругих элементов, в особенности к стабильности их упругих свойств, предъявляются высокие требования. В зависимости от конкретных условий работы и назначения упругого элемента за предельное состояние обычно принимают такое, при котором в опасной точке детали происходит переход из одного механического состояния материала в другое, например, из упругой области в область упруго-неупругих деформаций. Предельное механическое состояние каждого материала характеризуется определенным уровнем напряжений. В частности наступление неупругих деформаций характеризуется величиной предела текучести. Соответствующую такому напряжению нагрузку будем называть предельной нагрузкой. Однако точность работы приборов во многом зависит также и от качества изготовления упругого элемента. Поэтому, как и всякая деталь, учитывая качество изготовления и другие отклонения, например, непостоянство упругих свойств, вследствие изменения температуры, упругий элемент при работе должен иметь некоторый коэффициент запаса по отношению к предельному состоянию, когда он полностью или частично теряет свои рабочие свойства. Использование коэффициента запаса при расчетах упругих элементов принижали необходимость точного расчета предельной нагрузки. Однако современные достижения в науке и технике делают возможным изготовление деталей с высокой точностью и устойчивостью к изменениям температуры, свойства которых приближаются к идеальным. Точное определение предельной нагрузки дает возможность уменьшить коэффициент запаса и, тем самым, уменьшая размеры упругого элемента, экономить на сырье.

Исследования в области материаловедения приводят к появлению материалов, обладающих специальными нетрадиционными свойствами.

Расчеты статических и силовых характеристик, при проявлении таких свойств, становятся одним из основных направлений при их изучении. Например, некоторые металлические сплавы (такие, как  $TiNi$ ,  $CuAlZn$  и др.) после получения заметной неупругой деформации, при нагреве восстанавливают свою первоначальную геометрическую форму. Это необычное поведение материалов называется эффектом памяти формы. Оно обусловлено типом фазовых превращений, известным как термоупругие мартенситные превращения. Одной из основных особенностей механического поведения материалов с памятью формы является эффект генерации реактивных усилий в элементе. Если воспрепятствовать свободному формовосстановлению предварительно деформированного образца, то он в процессе обратного мартенситного превращения (нагрева) генерирует реактивные усилия, величина которых зависит от накопленной фазовой деформации и жесткости защемления.

Для проявления эффекта памяти формы необходимым условием является наличие неупругих деформаций, появление которых, как было отмечено, обеспечиваются предельной нагрузкой. Величина реактивных усилий зависит от области неупругих деформаций, которая в свою очередь напрямую зависит от разности между приложенной нагрузкой и предельной нагрузкой.

Таким образом, актуальность данной темы диссертационного исследования обусловлена:

1. необходимостью более точного изучения предельного состояния упругих элементов гибких систем в целях недопущения нарушения точности выполняемых ими преобразования;

2. важностью знать величину предельных нагрузок при изгибе гибких элементов из материалов с памятью формы при изучении реактивных усилий, возникающих при формовосстановлении.

3. запросами эксперимента, проводимого с материалами, обладающими памятью формы, для сравнительного анализа и выявления их нетрадиционных свойств.

Диссертационная работа выполнялась в соответствии с программой научно-исследовательских работ НИИ физико-технических проблем, действующего при КТУ им. И.Раззакова, и является составной частью научной тематики по проектам: «Исследование чистого и продольного изгиба гибких балок из материала со специальными свойствами» и «Исследование эффекта формовосстановления и возникающих при этом реактивных усилий», утвержденным Госагентством по науке и интеллектуальной собственности при Правительстве Кыргызской Республики.

Целью исследования является разработка метода расчета предельных нагрузок при больших изгибах гибкой балки, а также определение влияния геометрической формы, параметров балки и способов ее закрепления на величину этой нагрузки. В соответствии с поставленной целью, объектом исследования является предельная нагрузка при больших изгибах гибких балок.

Величина предельной нагрузки непосредственно зависит от формы упругой линии, поэтому для достижения цели исследования поставлены следующие задачи:

1. найти наиболее удобный для расчетов способ определения формы изогнутой оси гибкой балки при больших перемещениях;
2. определить метод расчета предельной нагрузки при изгибе гибкой балки при различных способах приложения нагрузки;
3. исследовать влияние собственного веса балки на величину предельной нагрузки;
4. определить методику расчета формы упругой линии при изгибе пологой тонкой балки, а также величины предельной нагрузки.

Научная новизна и теоретическая значимость полученных результатов заключается в следующем:

1. разработан и применен новый подход к точному решению задачи об изгибе тонкой балки;
2. построены расчетные уравнения для определения предельной нагрузки при продольном и продольно-поперечном изгибах консольной балки;
3. рассмотрены способы применения предложенных методов и решены конкретные задачи по определению предельной нагрузки для балок, закрепленных на двух концах;
4. разработана методика расчета предельной распределенной нагрузки при изгибе тонких балок с учетом собственного веса;
5. используя предложенный метод, решены задачи об изгибе тонкой пологой балки под действием различных распределенных по длине нагрузок и моментов, при этом проведен расчет предельного значения нагрузки, сосредоточенной на свободном конце;
6. изучены и построены графики зависимостей предельных нагрузок от различных параметров изгибаемой балки и от способов нагружения;
7. построены алгоритмы расчетов и составлены программы на языке Turbo Pascal для определения формы упругой линии и предельной нагрузки при различных способах нагружения.

Практическая значимость полученных результатов:

1. полученные в данной работе результаты по определению предельных нагрузок могут использоваться при проектировании упругих элементов и определении их предельных состояний;
2. методы расчета упругой линии и предельных нагрузок, а также полученные зависимости могут быть использованы при расчете реактивных усилий, возникающих при формовосстановлении элементов из материала, обладающего эффектом памяти формы;
3. полученные зависимости и построенные графики предельной нагрузки позволят предсказать приближенно ее величину для конкретной балки и, тем самым, повысить производительность труда экспериментаторов, работающих с тонкими элементами из материалов, обладающих нетрадиционными свойствами.

4. разработан достаточно простой метод определения формы упругой линии при продольно-поперечном изгибе тонкой балки, что дает возможность для ознакомления студентов с расчетами больших прогибов тонких балок.

Апробация результатов диссертации:

Основные положения и узловые результаты научного исследования докладывались и обсуждались на международной научной конференции в КТУ им. И.Раззакова в 2001 году; на научно-практической конференции, посвященной 10-летию Кыргызской Республики и 5-летию образования НГУ, в 2001 году; на юбилейной научной конференции, посвященной 10-летию независимости Кыргызской Республики и 10-летию Токмоцкого Технического Института, в 2001 году; на первом съезде инженеров КР, проходившей в КТУ, в 2001 году; на международной научной конференции в институте физики и механики горных пород НАН КР в 2002 году; на юбилейной научно-практической конференции, посвященной 70-летию факультета физики и электроники КНУ им. Ж. Баласагына, в 2003 году; на международной научно-практической конференции, посвященной 2200 – летию Кыргызской Государственности, в КГУСТА в 2003 году, на расширенном заседании кафедры «механика» КТУ в 2003 году, а также на еженедельных научных семинарах в лаборатории «Память металлов» КТУ им. И.Раззакова.

Полученные результаты согласуются с экспериментальными данными, полученными в лаборатории «Память металлов» Кыргызского технического университета им. И.Раззакова, а также с частными известными теоретическими и численными результатами, полученными другими методами у других авторов.

Опубликованность результатов

Основные результаты диссертации опубликованы в 10 работах.

Структура и объем диссертации

Диссертация содержит 157 страниц и состоит из введения, четырех глав и двух приложений. Основной текст изложен на 137 страницах, содержит 1 таблицу и 43 рисунка. Список использованной литературы состоит из 95 наименований.

## КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** отмечена актуальность работы; сформулированы цель и задачи исследования; приведены основные научные положения; указаны практическая ценность и апробация работы.

**В первой главе** проведен анализ современного состояния проблемы.

Эффект формовосстановления и расчет реактивных усилий исследован в лаборатории «Память металлов» для элементов, получивших малые прогибы. В этом случае справедливы законы линейной теории, и расчет предельной нагрузки не представлял особого интереса.

Характерным свойством тонких балок в отличие от всех других видов упругих тел является то, что под действием внешних сил упругая линия может получать очертания, сильно отличающиеся от первоначальной формы оси стержня. Теория больших упругих перемещений является во всех случаях нелинейной, и любая задача является статически неопределимой.

Основополагающий вклад в формулировку нелинейной проблемы деформирования балки аппроксимационным способом внес Г.Кирхгоф, впервые показавший, что задаче об упругой линии соответствует в теории вращения тяжелого твердого тела задача о колебаниях физического маятника. Благодаря этому уже известные решения динамики твердого тела стали применять к определению деформации тонкой балки.

Задачу о продольном изгибе и некоторые другие частные случаи исследовал Л.Эйлер посредством бесконечных рядов. В работе Е.П.Попова изложены методы точного решения задач по определению упругой линии при изгибе тонкой балки. Однако исследования в области изгибов тонких балок ограничивались исследованием форм упругой линии.

Проведенный нами анализ научной литературы по проблемам, связанным с предельными нагрузками при изгибе гибких упругих систем, показал, что хотя теоретически вопрос о форме упругой линии в частных случаях разрешен, в литературе недостаточно освещены их численные интерпретации, а задача определения предельной нагрузки, вообще говоря, никем не исследована. В силу этого, возникла необходимость исследования методов расчета предельной нагрузки, изучения параметров, от которых она зависит, а также формы этих зависимостей.

**Во второй главе** проведено исследование предельных нагрузок при изгибе балки, защемленной на одном конце, под действием сосредоточенной нагрузки.

Преобразуя дифференциальные уравнения, описывающие упругие линии при продольно-поперечном и продольном изгибах

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = -\frac{M}{EI}, \quad \frac{x''}{(1+x'^2)^{3/2}} = \frac{M}{EI}, \quad (1)$$

получена система дифференциальных уравнений для изгиба балки в виде:

$$\begin{cases} \cos \theta \cdot \frac{d\theta}{dx} = -\frac{M}{EI} \\ y' = \operatorname{tg} \theta, \end{cases} \quad (2)$$

где  $\theta$  – угол наклона касательной в текущей точке оси балки к оси абсцисс. При этом система декартовых координат связана с осью балки так, что ее начало находится в защемлении, а нагрузка направлена перпендикулярно к оси  $Ox$ . Интегрирование этого уравнения дает связь синуса угла наклона касательной в точке от ее координаты.

$$\sin \theta = \beta(a-x)^2 + c, \quad (3)$$

где  $\beta = \frac{P}{2EI}$ ,  $a$  – абсцисса конца упругой линии балки, а константа интегрирования зависит от угла  $\theta_0$  в защемлении или  $\theta_1$  на свободном конце. Таким образом, способы интегрирования дифференциальных уравнений упругой линии оказываются во всех рассматриваемых случаях аналогичными.

Подставляя формулу (3) в уравнение длины дуги, используя подстановки

$$m^2 = \frac{1-c}{\beta}; \quad n^2 = \frac{1+c}{\beta}, \quad t = a-x,$$

после несложных преобразований, из таблицы эллиптических интегралов, получим уже известное выражение в эллиптических интегралах 1 рода

$$l = \frac{1}{\sqrt{2\beta}} \left( F\left(\frac{\pi}{2}, \chi\right) - F(\varphi, \chi) \right), \quad (4)$$

где

$$\chi^2 = \frac{m^2}{m^2 + n^2}; \quad \varphi = \arccos \frac{a}{m}; \quad \varphi' = \arccos \frac{a-x}{m}. \quad (5)$$

Вычисление величины  $a$  проведено численно из (4), используя итерацию

$$a_{i+1} = a_i + \frac{(l-l^i)}{2} \sqrt{1 - (\sin \theta_0 - \beta a_i^2)^2}.$$

Величина горизонтального перемещения точки оси балки определена через амплитуду эллиптического интеграла по формуле

$$x = a - m \cdot \cos \left[ am \left[ \sqrt{2\beta} \cdot s + F(\varphi, \chi) \right] \right],$$

где  $s$  – длина балки от текущей точки  $(x,y)$  до защемления.

Проинтегрировав второе уравнение системы (2), с учетом (3), после несложных преобразований получим известное уравнение, описывающее упругую линию балки, выраженную в эллиптических интегралах 1 и 2 рода

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\beta}} (2E(\varphi', \chi) - 2E(\varphi, \chi) - F(\varphi', \chi) + F(\varphi, \chi)). \quad (6)$$

Для каждого из рассмотренных случаев проведен расчет изгиба и построены упругие линии балок различных поперечных сечений и длин.

Далее проведен расчет предельной нагрузки. Для разных значений угла  $\theta_0$  определены зависимости безразмерных величин  $\bar{a} = \frac{a}{l}$  от различных значений силового параметра

$$\bar{\beta} = \frac{Pl^2}{2EI}. \quad (7)$$

Зависимость  $\bar{a} \cdot \bar{\beta}$  от  $\bar{\beta}$  при  $\theta_0 \neq \pm \pi/2$  описана аппроксимирующим многочленом

$$A\bar{\beta}^4 + B\bar{\beta}^3 + C\bar{\beta}^2 + D\bar{\beta} + E - \frac{M_0 l}{2EI} = 0, \quad (8)$$

где коэффициенты  $A, B, C, D$  и  $E$  зависят от угла  $\theta_0$ .

Тогда, для определения той величины нагрузки, при которой в защемлении момент равен определенному значению  $M_0$ , необходимо решить



уравнение (8) относительно  $\bar{\beta}$  с учетом (7). Это уравнение имеет 4 корня и минимальный из его положительных решений, например, при  $M_0=M_T$  даст значение предельной нагрузки  $P_T$ , соответствующее появлению неупругих деформаций в заделке. Таким образом, задача определения предельной нагрузки сведена к решению алгебраического уравнения четвертого порядка.

Для продольного изгиба (при  $\theta_0 = \pi/2$ ) получено следующее выражение:

$$P = \frac{2EI}{l^2} \cdot [-0.0098(\bar{a} \cdot \bar{\beta})^4 + 0.1294(\bar{a} \cdot \bar{\beta})^3 + 0.036(\bar{a} \cdot \bar{\beta})^2 + 0,1496(\bar{a} \cdot \bar{\beta}) + 1,199], \quad (9)$$

причем  $\bar{\beta} \cdot \bar{a} = \frac{M_0 \cdot l}{2EI}$ .

При  $M_0=M_T$ , отсюда определяется величина предельной нагрузки  $P_T$ .

Далее проведен более точный расчет предельной нагрузки используя описанную методику расчета величины  $a$  по заданному значению нагрузки  $P$ , а также их связь с напряжением в сечении  $P_T a = \sigma_T W$ . Для расчета предельной нагрузки использована рекуррентная формула

$$P^{i+1} = \frac{1}{4} \left( 3P^i + \frac{\sigma_T W}{a_i} \right).$$

На основании данных, полученных при расчете величины  $P_T$ , на рис. 1 построены графики зависимости предельной нагрузки от угла наклона  $\theta_0$ , для балки прямоугольного поперечного сечения изготовленной из стали с пределом упругости  $\sigma_T=2400$  кг/см<sup>2</sup> и модулем упругости  $E=2 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>. При этом длина балки  $l=100$  см, ширина  $b=3$  см. Линия 1 построена для высоты балки  $h=0,4$  см, линия 2 для  $h=0,3$  см, линия 3 для  $h=0,2$  см.

Здесь наименьшее значение  $P_T$  имеет при наибольшем плече, то есть при том начальном угле, когда балка изгибается так, что прямая, соединяющая концы балки, перпендикулярна линии действия данной предельной нагрузки. Такие значения  $P_T$  достигаются для балки высотой  $h=0,2$  см при угле  $\theta_0^{\min} = 23^\circ$ , при этом нагрузка  $P_T = 0,488$  кг, а для  $h=0,4$  см при угле  $\theta_0^{\min} = 11^\circ$ , при этом нагрузка  $P_T = 1,928$  кг. Для сравнения, вычисленные по формуле (8) значения следующие: для балки высотой  $h=0,2$  см при угле  $\theta_0^{\min} = 23^\circ$  получена нагрузка  $P_T = 0,486$  кг, а для  $h=0,4$  см при угле  $\theta_0^{\min} = 11^\circ$  - нагрузка  $P_T = 1,892$  кг. Отметим, что формула (8) тем точнее, чем балка гибче.

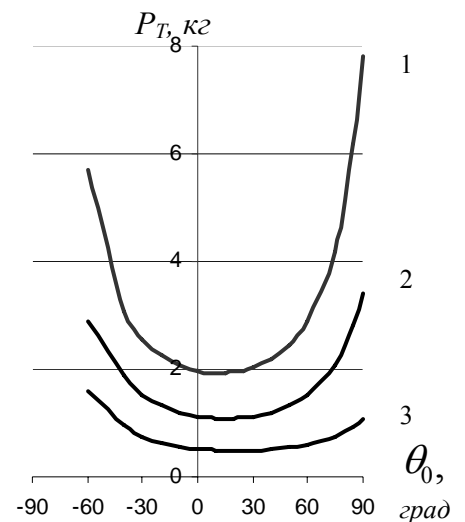


Рис. 1

Далее проведен расчет упругой линии при следящем действии силы. При наличии точки «сжатия» (в смысле Е.П.Попова, точка «сжатия» определяется тем, что в данном сечении изогнутого стержня внутренняя сила  $N$  является «чисто» сжимающей), если провести в ней сечение и повернуть систему координат,

то метод определения предельной нагрузки будет аналогичен рассмотренному выше. При этом для любой балки, имеющей длину, большую, чем некоторая предельная длина

$$l_{np} = 2,622 \frac{EI}{\sigma_T W}, \quad (10)$$

из граничных условий вытекает, что  $\bar{\beta} \cdot \bar{a} = 1$ , то есть величина предельной нагрузки не зависит от длины балки:

$$P_T = \frac{\sigma_T^2 W^2}{2EI}. \quad (11)$$

Получено, что:

- если  $l < l_{np}$ , то предельное значение нагрузки достигается уже при  $0 < \alpha < \pi/2$  ( $\alpha$ - угол наклона нагрузки к неподвижной горизонтальной оси) и его расчет можно вести по формуле (8);

- если выполняется неравенство  $l \geq l_{np}$ , то независимо от начальной длины балки предельная нагрузка имеет постоянное значение (11), так как в этом случае длина части от точки приложения нагрузки до опасной точки «сжатия» будет равна постоянной величине  $l_{np}$  (10). Причем, если имеем знак равенства  $l = l_{np}$ , то нагрузка является предельной при  $\alpha = 0$  (случай продольного изгиба) и максимальное напряжение достигается в заделке, которая совпадает с точкой «сжатия». Если получим знак неравенства  $l > l_{np}$ , то под действием предельной нагрузки имеем  $\alpha < 0$ , а напряжение  $\sigma = \sigma_T$  достигается в точке «сжатия».

Далее, для иллюстрации применения нашего метода, построена линия оси балки изготовленной из материала с памятью формы, изогнутой под действием поперечной нагрузки, превышающей предельную.

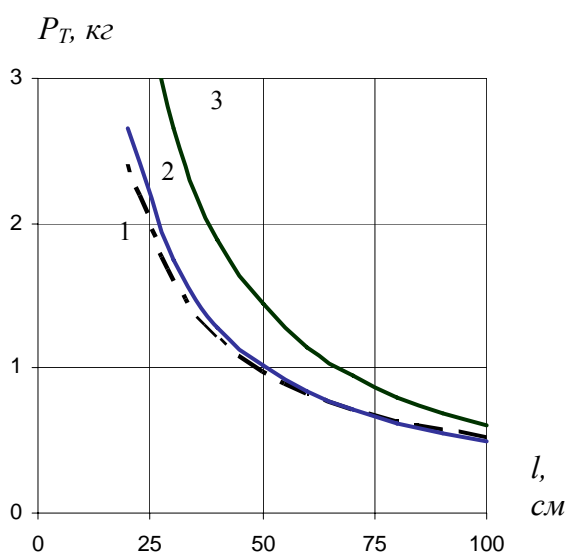


Рис. 2

Зависимость предельной нагрузки от длины балки: линия 1 при  $\theta=0$ ; линия 2 при  $\theta=30^\circ$ ; линия 3 при  $\theta=60^\circ$

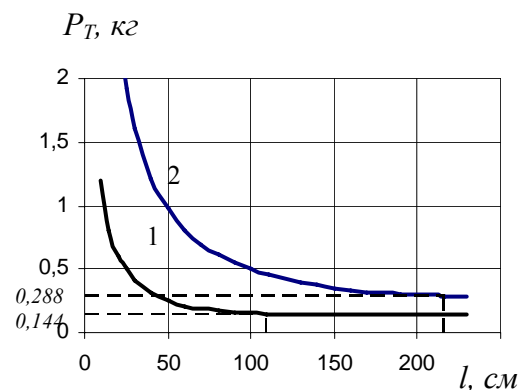


Рис. 3

Зависимость предельной нагрузки от длины балки при ее следящем действии

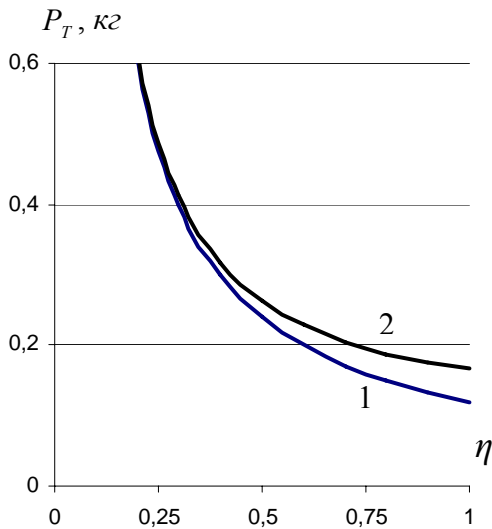


Рис. 4

$\eta = l/l_1$  – безразмерная длина балки ( $l_1=100\text{см}$ ). Линия 1 по линейной теории; линия 2 – при точном расчете.

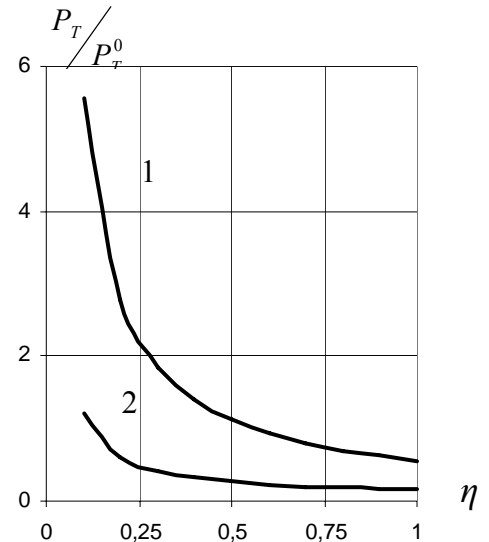


Рис.5

Линия 1 для круглого; линия 2 – для прямоугольного поперечных сечений

Для численной интерпретации описанных методов расчета составлены программы на алгоритмическом языке Turbo Pascal. В работе рассчитаны конкретные примеры изгиба и построены графики зависимостей предельной нагрузки от длины балки, от эксцентриситета приложения нагрузки (в случае продольного изгиба), от угла наклона  $\theta_0$  оси балки в защемлении, а также другие зависимости.

**В третьей главе**, на примере частных случаев закрепления балок на двух концах, применены методы расчета упругих линий и предельных нагрузок, предложенные в главе 2. Разбивая балку на две части в сечении, где приложена сосредоточенная нагрузка, и рассматривая каждую часть в отдельности, исследованы изгибы с условиями согласования перемещений концов и угла наклона касательной в сечении, а также равенства кривизн обеих частей в проведенном сечении.

Рассмотрен изгиб балки, шарнирно закрепленной на двух концах под действием поперечной нагрузки, приложенной в произвольном сечении. Дан метод решения задачи по определению геометрических и силовых параметров и определен способ расчета предельной нагрузки. Для расчета предельной нагрузки оказалось необходимым использовать три вложенных друг в друга цикла пересчета.

Далее исследован изгиб балки, шарнирно закрепленной на одном конце и защемленной на другом. Сосредоточенная поперечная нагрузка приложена в произвольном сечении балки. Упругая линия такой балки при изгибе имеет не только экстремум, но и точку перегиба, в которой момент равен нулю. В силу этого, «опасными» сечениями, в которых нагрузка обеспечивает наибольшие напряжения, равные пределу текучести материала могут быть,

во-первых, место приложения нагрузки, во-вторых, сечение на защемленном конце. Проведя сечение в месте приложения нагрузки, рассматриваются два участка с разными видами закрепления. На участке, конец которого защемлен, кроме сосредоточенной нагрузки, на изгиб балки действует также момент, обеспечивающий появление точки перегиба. Применяя, вложенные друг в друга, циклы пересчета для нахождения формы упругой линии, рассчитываем величины реакций опор. С помощью этих значений пошаговым способом определяются моменты в «опасных» сечениях.

По вычисленным значениям предельных нагрузок, для различных значений длины  $l$  и высоты  $h$ , на рис. 6 построены графики зависимостей предельных нагрузок  $P_T$  от относительной длины  $l_1/l$  (где  $l_1$  - расстояние от защемленного конца до сечения, в котором приложена нагрузка). Здесь при линии 1 и 2 построены при высоте  $h=0,1$  см и длинах  $l=150$  см и  $l=100$  см, соответственно, а линия 3 – при  $l=100$  см и  $h=0,2$  см ( $b=3$ см). Изломы кривых при  $l_1/l \approx 0,585$  соответствуют переходу максимального момента из защемления в сечение, соответствующее точке приложения нагрузки, так что моменты в обоих «опасных» сечениях при этом равны  $M_T$ . Причем напряжение в заделке больше, если  $l_1 < 0,585 \cdot l$ , а при  $l_1 > 0,585 \cdot l$  «опасным» является сечение, в котором приложена нагрузка. Точка минимума части графика с шарнирным закреплением при  $l_1/l \approx 0,65$  является точкой равенства реакций обеих опор.

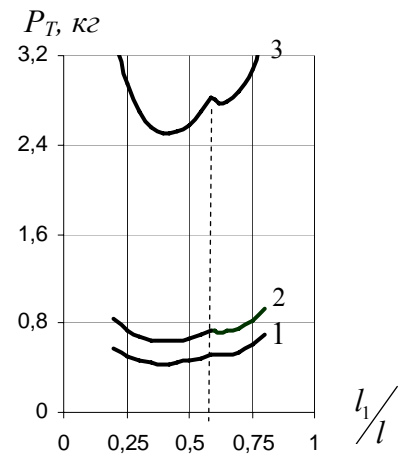


Рис. 6

**В четвертой главе** исследуются изгибы консольных балок под действием поперечных нагрузок с учетом действия собственного веса балки и первоначальной ее кривизны, которые заменялись при расчете распределенными нагрузками и распределенными фиктивными моментами. Считаем, что кривизна  $K(x)$  и нагрузка с интенсивностью  $q(x)$  произвольно изменяются по длине балки. Разбив всю длину упругой линии на малые участки, внутри каждого из них можно считать указанные величины постоянными, но различными на разных малых участках. Тогда каждый из таких малых участков будет находиться в условиях класса задач, рассмотренных в главе 2.

Расчеты упругой линии и предельных нагрузок проводились, начиная со свободного конца балки. Задавая здесь некоторое начальное значение для угла наклона касательной, рассчитывались координаты первого участка, а затем шло «наращивание» до последнего защемленного участка.

Определены предельные значения равномерно распределенной нагрузки и зависимость ее величины от длины балки (рис.7). Найдена предельная длина консольно-закрепленной балки, при изгибе которой под действием

собственного веса в заделке появляются напряжения, равные пределу текучести материала. Исследована зависимость предельного значения распределенной нагрузки от угла наклона оси балки в защемлении.

Далее для расчета изгиба пологих балок применили аналогичную схему. В случае изгиба пологих балок, на упругой линии могут появляться точки перегиба, поэтому при расчете появляются различные случаи, для которых выведены соответствующие формулы для определения координат кривой оси балки.

Проведем расчет, для определения моментов на  $k$ -том участке. Считаем найденными величины

$a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$  - проекций на ось  $OX$  всех предыдущих участков и  $\theta_{k-1}$  - угол наклона касательной в начале  $k-1$ -го, или на конце  $k$ -го участка, как его продолжения. Определим  $a_k$  и  $\theta_k$ . Пусть  $R_l = P$ . Запишем формулу момента в точке  $x$  оси  $k$ -го участка:

$$M(x) = R_1(a-x) + R_2(a-a_1-x) + \dots + R_k(a-a_1-a_2-\dots-a_{k-1}-x) \quad (12)$$

Граничные условия для дифференциального уравнения (4.35):

$$\theta(a-a_1-a_2-\dots-a_{k-1}) = \theta_{k-1}, \quad y'(a-a_1-a_2-\dots-a_{k-1}) = \operatorname{tg}\theta_{k-1}. \quad (13)$$

Введем обозначения:

$$A_k = \frac{M^{\phi_k} + a \cdot \sum_{i=1}^k R_i - a_1 \cdot \sum_{i=2}^k R_i - a_2 \cdot \sum_{i=3}^k R_i - \dots - a_{k-1} \cdot R_k}{\sum_{i=1}^k R_i}; \quad (14)$$

$$t_{Hk} = \frac{M^{\phi_k} + a_1 \cdot R_1 + a_2 \cdot (R_1 + R_2) + \dots + a_{k-1} \cdot \sum_{i=1}^{k-1} R_i}{\sum_{i=1}^k R_i}; \quad (15)$$

$$t_{Bk} = \frac{M^{\phi_k} + a_1 \cdot R_1 + a_2 \cdot (R_1 + R_2) + \dots + a_{k-1} \cdot \sum_{i=1}^{k-1} R_i + a_k \cdot \sum_{i=1}^k R_i}{\sum_{i=1}^k R_i}. \quad (16)$$

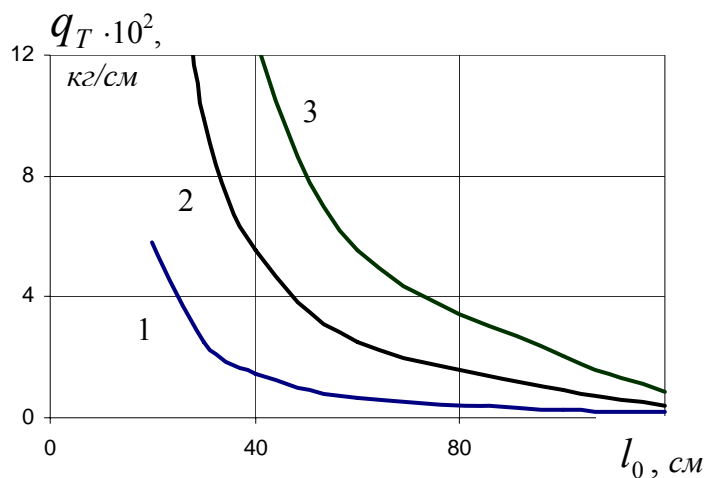


Рис. 7

Предельная распределенная нагрузка. Линия 1 при  $h=0,1$  см, линия 2 при  $h=0,2$  см, линия 3 при  $h=0,3$  см,

Пусть  $\beta_k = \frac{\sum_{i=1}^k R_i}{2 \cdot EI} > 0$ . Решая дифференциальное уравнение (2), получим

$$\sin \theta = \beta_k (A_k - x)^2 + c_k, \quad (17)$$

откуда из граничных условий, при  $x = a - a_1 - \dots - a_{k-1}$ , имеем:

$$c_k = \sin \theta_{k-1} - \beta_k \cdot t_{Hk}^2$$

Применим замену:  $m^2 = \frac{1 - c_k}{\beta_k}$ , а также,

$$\text{если } \frac{1 + c_k}{\beta_k} > 0, \text{ то } \frac{1 + c_k}{\beta_k} = n^2;$$

$$\text{если } \frac{1 + c_k}{\beta_k} < 0, \text{ то } \frac{1 + c_k}{\beta_k} = -n^2.$$

Подставив (17) в формулу длины дуги кривой в пределах  $k$ -го участка, используя таблицу интегралов, получим уравнение для нахождения неизвестной величины  $a_k$ , входящей в  $t_{Bk}$ :

1) если  $t_{Bk}$  и  $t_{Hk}$  одного знака, то есть если  $t_{Bk} \cdot t_{Hk} > 0$ , то

$$\text{при } \frac{1 + c_k}{\beta_k} > 0, \quad l = \frac{1}{\sqrt{2\beta_k}} |F(\varphi', \chi) - F(\varphi, \chi)|; \quad (18)$$

$$\text{при } \frac{1 + c_k}{\beta_k} < 0, \quad l = \frac{1}{\beta_k \cdot m} |F(\bar{\varphi}', \bar{\chi}) - F(\bar{\varphi}, \bar{\chi})|. \quad (19)$$

2) если  $t_{Bk}$  и  $t_{Hk}$  разных знаков, то есть  $t_{Bk} \cdot t_{Hk} < 0$ , то

$$\text{при } \frac{1 + c_k}{\beta_k} > 0, \quad l = \frac{1}{\sqrt{2\beta_k}} (2F(\frac{\pi}{2}, \chi) - F(\varphi', \chi) - F(\varphi, \chi)); \quad (20)$$

$$\text{при } \frac{1 + c_k}{\beta_k} < 0, \quad l = \frac{1}{\beta_k \cdot m} (2F(\frac{\pi}{2}, \bar{\chi}) - F(\bar{\varphi}', \bar{\chi}) - F(\bar{\varphi}, \bar{\chi})), \quad (21)$$

где

$$\chi^2 = \frac{m^2}{m^2 + n^2}, \quad \varphi' = \arccos \frac{t_{Hk}}{m}, \quad \varphi = \arccos \frac{t_{Bk}}{m}; \quad (22)$$

$$\bar{\chi}^2 = \frac{m^2 - n^2}{m^2}, \quad \bar{\varphi}' = \arcsin \sqrt{\frac{m^2 - t_{Hk}^2}{t_{Hk}^2 - n^2}}, \quad \bar{\varphi} = \arcsin \sqrt{\frac{m^2 - t_{Bk}^2}{t_{Bk}^2 - n^2}}. \quad (23)$$

Определив  $a_k$ , и подставив в выражение (17), найдем  $\theta_k$  - угол наклона касательной на конце  $k+1$ -го участка:

$$\sin \theta_k = \beta_k \cdot t_{Bk}^2 + c_k. \quad (24)$$

Также как и ранее, предполагаем, что до предела текучести материал ведет себя упруго. Так как максимальный момент  $M_T$  достигается в защемлении, то он должен удовлетворять условию  $M_T = \sigma_T \cdot W$ . Следовательно, для изгибающего момента можно записать:

$$M = a \cdot R_1 + (a - a_1) \cdot R_2 + \dots + (a - a_1 - \dots - a_{N-1}) \cdot R_N = \sigma_T \cdot W. \quad (25)$$

По рекуррентной формуле

$$R_1^{i+1} = \frac{1}{2} \left( R_1^i + \frac{\sigma_T W - a \cdot \sum_{i=2}^N R_i + a_1 \cdot \sum_{i=2}^N R_i + a_2 \cdot \sum_{i=3}^N R_i + \dots + a_{N-1} \cdot R_N}{a} \right). \quad (26)$$

определяется предельное значение сосредоточенной на конце нагрузки. Определим проекции участков разбиения на ось ординат. Интегрируя второе уравнение системы (2), используя таблицу интегралов, получим формулы для определения вертикальной составляющей  $k$ -го участка через эллиптические интегралы 2-рода:

1) если  $t_{Bk} \cdot t_{Hk} > 0$ , то

$$\text{при } \frac{1+c_k}{\beta_k} > 0, \quad y_k = \frac{2}{\sqrt{2\beta_k}} |E(\varphi', \chi) - E(\varphi, \chi)| - l; \quad (27)$$

$$\text{при } \frac{1+c_k}{\beta_k} < 0, \quad y_k = m \cdot |E(\bar{\varphi}', \bar{\chi}) - E(\bar{\varphi}, \bar{\chi})| + c_k l. \quad (28)$$

2) если  $t_{Bk} \cdot t_{Hk} < 0$ , то

$$\text{при } \frac{1+c_k}{\beta_k} > 0, \quad y_k = \frac{2}{\sqrt{2\beta_k}} (2E(\frac{\pi}{2}, \chi) - E(\varphi', \chi) - E(\varphi, \chi)) - l; \quad (29)$$

$$\text{при } \frac{1+c_k}{\beta_k} < 0, \quad y_k = m \cdot (2E(\frac{\pi}{2}, \bar{\chi}) - E(\bar{\varphi}', \bar{\chi}) - E(\bar{\varphi}, \bar{\chi})) + c_k l, \quad (30)$$

для тех же значений параметров. Таким образом, найдя все значения  $y_k$ , можно определить прогиб конечной точки балки:  $\bar{y} = y_1 + y_2 + \dots + y_N$ .

На примере пологих балок постоянной кривизны проведен расчет упругих линий и определены предельные значения сосредоточенных нагрузок с учетом нагрузки, распределенной по длине. В частности, рассчитывался конкретный случай распределенной нагрузки в виде собственного веса балки.

На рис. 8 построены графики зависимостей предельных нагрузок  $P_T$  от первоначальной кривизны оси балки при постоянной длине  $l=100$  см ( $b=3$  см). Здесь линия 1 при  $h=0,2$  см, а линия 2 при  $h=0,25$  см. В частности, при  $K=0$  ось балки представляет собой прямую линию. Получены следующие результаты: для  $h=0,2$  см, при  $K=0,0125$  см<sup>-1</sup>, предельная нагрузка оказалась равной  $P_T=0,1484$  кг, а угол наклона касательной на конце балки  $\theta_0=84,7^\circ$ . Для  $h=0,25$  см, при  $K=0,0128$  см<sup>-1</sup> получили:  $P_T=0,2547$  кг, и  $\theta_0=83,3^\circ$ .

Далее описан эксперимент, проведенный на изгиб тонкой полоски с учетом собственного веса. Анализ полученных экспериментальных и расчетных результатов показал хорошую согласованность.

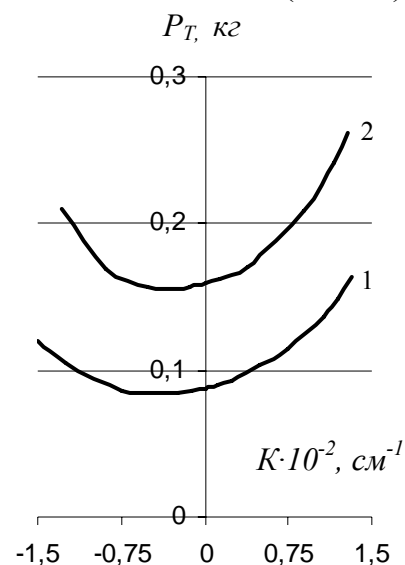


Рис. 8

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Точное решение задач при сильном изгибе тонких стержней определяется в общем случае лишь в интегральной форме. В связи с этим оказалось важным для инженерных расчетов разработать численный метод определения больших перемещений и предельных нагрузок при изгибе тонких балок на ЭВМ. Разработанные методы являются важными для исследования различных возможных форм равновесия упругой линии при больших перемещениях, обусловленных изгибом.

1. Разработан и применен новый подход к точному решению задачи о форме упругой линии балки, нагруженной продольными и продольно-поперечными силами. При этом описывающие их дифференциальные уравнения сведены к системе дифференциальных уравнений 1-го порядка, интегрирование которых дает общую формулу, описывающую упругую линию балки, выраженную в эллиптических интегралах.

2. Задача нахождения предельной нагрузки определяет необходимость вычисления эллиптических интегралов. Для нахождения приближенного значения предельной нагрузки, получено алгебраическое уравнение четвертого порядка, коэффициенты которого зависят от угла наклона касательной в защемлении, а в случае продольного изгиба – алгебраическое выражение, зависящее от параметров балки.

3. Изучен изгиб тонкой балки под действием следящей нагрузки. Получено, что для данного поперечного сечения существует предельная длина балки  $l_{np} = 2,622 \frac{EI}{\sigma_T W}$ , такая, что если выполняется неравенство  $l \geq l_{np}$ , то

предельная нагрузка имеет постоянное значение  $P_T = \frac{\sigma_T^2 W^2}{2EI}$  и не зависит от длины. В этом случае, длина части балки от точки приложения нагрузки до опасной точки «сжатия» равна  $l_{np}$ . Причем максимальное напряжение достигается в заделке только если  $l = l_{np}$ .

4. Получены основные соотношения и рассчитаны на изгиб различные балки, в том числе закрепленные на двух концах. При изгибе балки, защемленной на одном конце и шарнирно закрепленной на другом, зависимости предельной нагрузки от длины  $l_1$  (от места приложения нагрузки до защемления) оказались подобными. Излом на графике этой зависимости при некотором значении  $l_1/l \approx 0,585$  соответствует переходу максимального момента из защемления в сечение, соответствующее точке приложения нагрузки, так что моменты в обеих «опасных» сечениях при этом равны.

5. Разработана методика расчета изгиба и определения предельной распределенной по длине нагрузки. Эта же методика применена для расчета изгиба балки и определения сосредоточенной на свободном конце предельной нагрузки для пологих балок, с учетом собственного веса.

Предложенным в данной работе методом можно рассчитать изгибы



тонкой балки или системы тонких стержней под действием сосредоточенных сил и моментов или при любом виде сосредоточенных связей, а так же изгибы под действием распределенных нагрузок, переменной начальной кривизны и переменного поперечного сечения стержня.

В общем случае изгиба пологого тонкого стержня с начальной кривизной при любых связях и любом нагружении сосредоточенными силами и моментами задача сведена к соответствующей схеме изгиба прямого стержня с добавлением фиктивного момента, геометрически соответствующей кривизне. Фиктивность этого добавочного момента учитывалась при вычислении истинного изгибающего момента и напряжения в произвольном сечении стержня. С учетом этого определены границы существования предельной нагрузки.

6 Показаны возможности решения практических задач изгиба балок, испытывающих любые (в том числе большие) перемещения, при определении предельных нагрузок посредством построенного алгоритма и разработанного пакета программ на ЭВМ, с помощью которых проведены вычисления и построены графики.

В заключение можно сказать, что изложенными в данной работе разработками и методами можно проводить точное исследование сколь угодно больших перемещений при упругом изгибе тонких стержней для широкого класса задач. Проведенные исследования свидетельствуют о широких возможностях описанных методов для расчета изгиба гибких балок при различных вариантах их конфигурации и нагружения.

### **Основные положения диссертации опубликованы в следующих публикациях автора:**

1. Исследование формы упругого изгиба и максимальных нагрузок //Материалы научно-практической конференции «Проблемы образования и науки».- Нарын, НГУ, 2001. – с.3-8 (соавтор С.А. Абдрахманов).

2. Определение максимальной нагрузки при упругом изгибе //Материалы международной конференции: Современные технологии и управление качеством в образовании, науке и производстве: опыт адаптации и внедрения. - Бишкек, КТУ им. И. Раззакова, ч.1, 2001. - с.155-160 (соавторы: С.А. Абдрахманов, А.А. Джанузакова).

3. О предельной нагрузке при продольном упругом изгибе гибких балок //Материалы юбилейной научной конференции, посвященной 10-летию независимости Кыргызской Республики и 10-летию Токмоцкого Технического Института. - Токмок, ТТИ, 2001. - с. 8 -13 (соавторы: С.А. Абдрахманов, А.А. Джанузакова).

4. Основные принципы инженерного расчета многофункциональных материалов //Материалы I го съезда инженеров КР. Журнал "Наука и новые

технологии", 2002.- №1.- с.103 – 107 (соавторы: С.А. Абдрахманов, Ж.Ж. Доталиева).

5. О предельной нагрузке в одной статически неопределимой задаче //Материалы международной научной конференции “Современные проблемы механики сплошных сред и механики горных пород” НАН КР, институт физики и механики горных пород – Бишкек, 2002. - с.80-88 (соавтор С.А.Абдрахманов).

6. О предельной нагрузке при упругом продольно-поперечном изгибе //Научный журнал, Вестник КТУ им. И.Раззакова. - Бишкек, 2002.- №5. - с. 145-149.

7. Об одном способе определения предельной нагрузки при поперечном изгибе //Бишкек: Вестник КНУ им. Ж.Баласагына, выпуск 3, 2003. – с. 38-42.

8. О предельной нагрузке при изгибе полой балки //Алматы: Вестник Каз. АТК им. М.Тынышпаева, 2003. –№3 (22). – с. 19 – 23 (соавтор С.А. Абдрахманов).

9. Определение длины упругой части полой балки при изгибе поперечными нагрузками //Материалы международной научно-практической конференции: Проблемы естественно-технических наук, информационных технологий и управления на современном этапе, посвященной 2200-летию Кыргызской Государственности. - Бишкек: КГУСТА, ИИН, 2003.–с. 385- 394.

10. О предельном значении распределенной нагрузки при изгибе //Бишкек: Известия НАН КР, 2003.- №2-3. – с. 69-73 (соавтор С.А. Абдрахманов).

## РЕЗЮМЕ

**Джаналиев Нурлан Рахманкулович.** *Предельные нагрузки при изгибе упругих гибких систем*

**Ключевые слова:** балка, изгиб, момент, упругая линия, сосредоточенная, распределенная нагрузка, предел упругости, предел текучести, предельная нагрузка, кривизна.

В данной диссертационной работе проводится исследование процесса изгиба тонких балок под действием сосредоточенной нагрузки с учетом собственного веса балки и распределенных по длине нагрузок и моментов. Проведены расчеты предельных нагрузок, при которых в элементе начинают появляться неупругие деформации и предложено уравнение для их вычисления. Изучены зависимости величины предельной нагрузки от геометрических размеров балки при различных способах закрепления концов, которые иллюстрируются графиками.

## РЕЗЮМЕ

**Джаналиев Нурлан Рахманкулович. Серпилгич ийилчээк системалардын ийбдөгь пределдик кьчтёрь.**

**Негизги сөздөр:** *устун, ийб, момент, серпилгич сызык, жыйылган, жайылган кьч, серпилгич предели, пределдик кьч.*

Бул иште серпилгич ийилчээк устундун узундугу боюнча жайылган кьчтёрдөн жана моменттердин таасирин эсепке алып бир чекитте жыйылган кьчтөн астында жука устундун ийб процесси изилденген. Серпилгич ийбдөгү максималдуу кьчтөр эсептелинип, жана аларды эсептөө үчүн атайын формулалар чыгарылган. Ал кьчтёрдөн учтары ар кандай бекитилген устундардын геометриялык параметрлери менен байланыштары каралган. Бул байланыштар үчүн графиктер тургузулуп изилденген.

## RESUME

**Janaliev Nurlan Rahmankulovich. Maximum loads by bending of elastic slender systems.**

**Keywords:** *beam, bending, moment, elastic curve, concentrated, distributed load, elastic limit, yield strength, maximum load, curvature.*

In this work are investigated the process of bend of thin beams under concentrated load, with consideration of distributions along lengths loads and moments. We are determined a maximum load when bending is elastic and obtained equation for them calculation. We are analyzed the dependency it from geometrical parameters.