

Министерство образования и науки Кыргызской Республики  
Кыргызский государственный технический университет им. И.Раззакова

УДК 593.10

*на правах рукописи*

ЧЫНЫБАЕВ МИРЛАН КОЙЧУБЕКОВИЧ

**УРАВНЕНИЯ СВЯЗИ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ В  
МОДЕЛИ СКОЛЬЖЕНИЙ**

Специальность 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор  
А.Б. Салиев

Бишкек 2008

## СОДЕРЖАНИЕ

	ВВЕДЕНИЕ.....	4
ГЛАВА 1	ИСХОДНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ.....	8
1.1.1	Общие представления.....	8
1.1.2	Интенсивность скольжений.....	9
1.1.3	Сопротивление сдвигу.....	13
1.2.	Скольжения при сложном нагружении.....	16
1.2.1	Напряженное состояние.....	16
1.2.2	Деформированное состояние.....	17
1.2.3	Веера скольжений при сложном нагружении.....	18
1.3.	Определяющие уравнения при сложном нагружении	22
ГЛАВА 2	ПОСТРОЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК СОПРОТИВЛЕНИЯ СДВИГУ.....	29
2.1.	Посторонние функции упрочения.....	29
2.1.1	Чистый сдвиг.....	29
2.1.2	Осевое растяжение.....	33
2.1.3	Особенности изменения функции $\Psi$ при больших деформациях.....	36
2.1.4	Стандартная квазилинейная аппроксимация.....	42
2.1.5	Влияние вида деформирования на зависимость $\Psi \sim \Gamma_m$	43
2.2	Построение кинематической характеристики скольжений.....	48
2.2.1	Определяющие факторы характеристики $\Phi$ .....	50
2.2.2	О связи внутренних и внешних деформационных характеристик.....	57
	Выводы по главе 2.....	60

ГЛАВА 3.	ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ	
	ОДНОРОДНОЙ МОНОТОННОЙ ДЕФОРМАЦИИ...	61
3.1	Алгоритм вычисления напряжений.....	61
3.1.1	Напряженные состояния близкие к чистому сдвигу....	61
3.1.2	Напряженные состояния “близкие” к осевому растяжению.....	68
3.1.3	Напряженные состояния при переходе от чистого сдвига к одноосному напряжению.....	73
3.2.	Построение поверхности текучести.....	78
	Выводы по главе 3.....	84
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	85
	ЛИТЕРАТУРА.....	87

## **ВВЕДЕНИЕ**

Знание напряжений при пластической деформации металлов способствуют выявлению возможных очагов разрушения и устранения их причин, а также выявлению прочностных ресурсов и надежности элементов конструкций. Напряжения в пластической области необходимо также знать при проектировании конструкций оптимального веса. Определение напряжений в процессе неупругого деформирования зависит от деформационных соотношений и имеет принципиальные затруднения. В тоже время на практике достаточно надежно можно измерить только значения деформаций. Поэтому аналитическое вычисление напряжений через величины пластических деформаций, несомненно, является актуальной задачей.

Наряду с аналитическими способами существуют и развиваются экспериментальные и экспериментально-расчетные методы определения напряженного состояния в пластической области. Развитие

экспериментальных методов стимулируется и тем обстоятельством, что аналитически определять напряжения аппаратом теории пластичности достаточно сложно, а иногда и невозможно.

Большинство экспериментальных исследований основано на установлении связи напряженного состояния от кинематики процессов пластического деформирования. К этим методам относятся: определение напряжений по искажению делительной сетки; метод оптически активных покрытий, метод визиопластичности, метод выявления линий скольжения. Так же в настоящее время развивается метод исследования пластической деформации измерением твердости [1].

Преимущества этих методов заключаются в их практичности использования. К существенным недостаткам можно отнести сложность определения деформаций во внутренних областях тела и невысокая точность определения сравнительно малых деформаций.

В работе В.С. Ленского [2] для определения напряжений использован метод последовательных приближений предложенный А.А. Ильюшиным [3] для решения задач теории малых упруго-пластических деформаций.

Метод переменных параметров упругости [16] сводит решение задач деформационной теории пластичности к решению последовательности обычных задач упругости. Параметры  $E^*$  и  $\mu^*$  называются переменными параметрами упругости, так как они зависят от напряженного состояния в точке (параметра пластичности  $\psi$ ). В упругой области  $E^* = E$  и  $\mu^* = \mu$ .

Уравнения деформационной теории пластичности можно представить как уравнение теории упругости, если модуль упругости в них заменить текущим модулем (рис. 1).

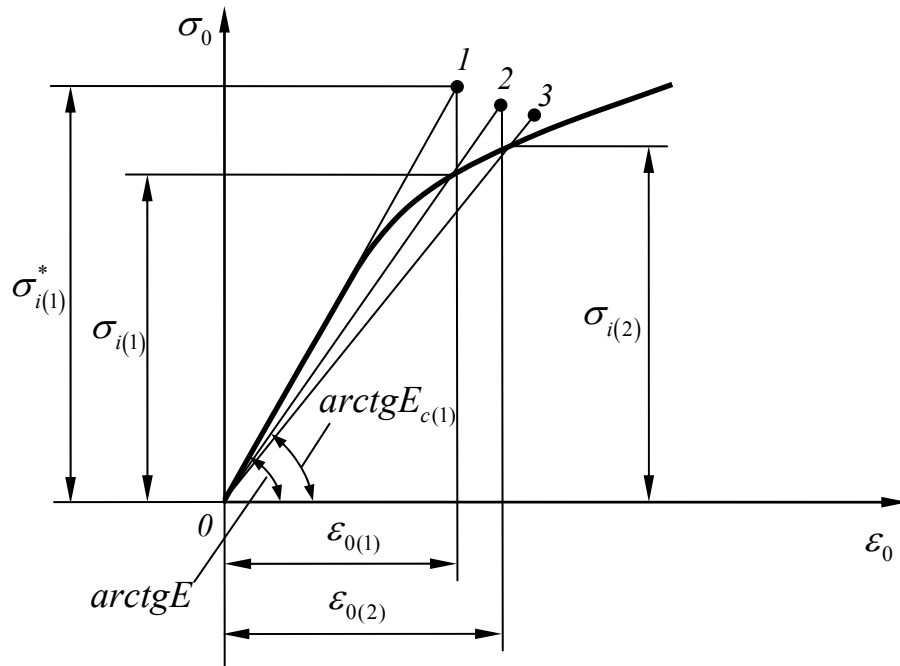


Рис.1 Метод упругих решений

Запись уравнений пластичности в форме уравнений упругости еще не продвигает дело, так как значения сечущего модуля и коэффициента Пуассона заранее неизвестны. Решение задачи находят методом последовательных приближений.

В первом приближении (рис.1) материал считается упругим ( $E_{(1)}^* = E$ ,  $\mu_{(1)}^* = \mu$ ) и решается обычная задача упругости. В результате определяются интенсивность напряжений  $\sigma_{i(1)}$  в упругом теле и соответствующее значение эквивалентной деформации

$$\varepsilon_{0(1)} = \frac{\sigma_{i(1)}^*}{E}.$$

По величине  $\varepsilon_{0(1)}$ , определяется по кривой деформирования величина  $\sigma_{i(1)}$  и сечущий модуль

$$E_{c(1)} = \frac{\sigma_{i(1)}}{\varepsilon_{0(1)}}.$$

Во втором приближении полагают

$$E_{(2)}^* = E_{c(1)}, \quad \mu_{(2)}^* = \frac{1}{2} - \frac{1-2\mu}{2} \frac{E_{c(1)}}{E}$$

и снова решают задачу упругости при полученных значениях параметров упругости. В результате получают значения  $\sigma_{i(2)}^*, \varepsilon_{0(2)}$  и новое значение

$$\text{секущего модуля } E_{c(2)} = \frac{\sigma_{i(2)}}{\varepsilon_{0(2)}}.$$

Процесс считается законченным, если для n-го приближения

$$\left| \sigma_{i(n)} - \sigma_{i(n-1)} \right| < \Delta_1; \quad \left| \sigma_{i(n)}^* - \sigma_{i(n)} \right| < \Delta_2$$

где  $\Delta_1$  - принятая точность сходимости приближений,  $\Delta_2$  - принятая точность расчета.

К недостаткам такой модели можно отнести пренебрежение историей нагружения и упругими составляющими деформаций.

В данной диссертационной работе, основываясь на деформационных соотношениях для монотонной пластической деформации: сопротивление сдвигу построена как функция, зависящая от скольжений, и выявлены главные факторы, влияющие на ее изменение; выведена параметрическая форма уравнений зависимости напряжений от пластических деформаций; впервые, в рамках пространственной модели скольжений, в полном объеме решена задача определений напряжений при заданных монотонных пластических деформациях.

Основные результаты диссертации доложены на Международном научно-техническом симпозиуме «Образование через науку» (Бишкек, 2004 г.), XXII Международной конференции «Математическое моделирование в механике деформируемых тел и конструкций» (Санкт-Петербург, 2007 г.), Международной научно-технической конференции «Вторые Ержановские чтения» (Актюбе, Казахстан, 2007), Международной научно-технической конференции «Современные проблемы механики» (Самарканд, Республика Узбекистан), научных семинарах кафедры «Механика» Кыргызского

государственного технического университета им. И.Раззакова (2004- 2008 гг.).

По теме диссертационной работы опубликованы 10 научных статей в Известиях Кыргызского государственного технического университета им. И.Раззакова, Материалах Международного научно-технического симпозиума «Образование через науку» (Бишкек, 2004), Трудах Международной XXII конференции Математическое моделирование в механике деформируемых тел и конструкций. Методы граничных и конечных элементов. (Санкт-Петербург, 2007), Материалах международной научно-технической конференции «Вторые Ержановские чтения» (Актюбе, Казахстан, 2007), Материалах международной научно-технической конференции «Современные проблемы механики» (Самарканд. Республика Узбекистан)

Диссертация изложена на 88 страницах машинописного текста, состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы из 16 наименований. Иллюстративный материал представлен рисунками, компьютерными графиками (их общее количество 38).

# ГЛАВА 1

## ИСХОДНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

**1.1.1. Общие представления.** Механизмом пластической деформации в обычных условиях является скольжение, которое в физике твердого тела часто представляется как перемещение “краевой” дислокации (лишней атомной плоскости).

При относительно малых усилиях сдвига “лишняя” полуплоскость может передать свои функции соседней полуплоскости, объединившись с ближайшей атомной полуплоскостью (или же возможен выход дефектов на поверхность тела).

Поскольку в поликристаллических телах имеется множество кристаллов, как угодно ориентированных, то все плоскости и направления находятся в одинаковых условиях, и имеет место начальная изотропность (усредненных) механических свойств в достаточно большем объеме материала. Так, в механике деформаций создается “математическая модель” твердого тела: сплошная, идеально однородная и начально изотропная. Пластическая деформация происходит главным образом, за счет больших перемещений (скольжений) структурных дефектов, (а не самих атомов): скользят не “кристаллографические” плоскости, а сингулярные неоднородности, расположенные в них определенным образом [4].

Если на пути краевой дислокации не встречается препятствий то она легко выходит на поверхность тела, от чего происходит упрочнение (улучшается структура) тела. Упрочнение происходит и в другом случае, когда по пути перемещения дислокаций встречаются непроходимое препятствие в виде границ зерен и других дефектов, имеющих разную ориентацию. Так или иначе, но если уже происходит пластическая деформация, то она сопровождается ростом сопротивления скольжению в



одних направлениях (по пути движения дислокаций) и его снижением в некоторых других направлениях (в частности – в противоположном к направлению перемещений дислокаций). Такое изменение прочностных свойств возникает как от упругих деформаций, так и от скольжений в данный и во все другие моменты времени, во всех плоскостях и направлениях (возникает деформационная анизотропия и в частности эффект Баушингера).

В соответствии со сказанным принято [4] считать, что проблема пластичности заключается в математической формулировке и решении двух главных задач: Первая, основная задача – установление зависимости перемещения точек тела (деформаций) от напряжений за пределом упругости в процессе произвольного нагружения. Данную задачу можно сформулировать математически, “если будут установлены тензорные соотношения между напряжениями, деформациями ...” [3]. Изучение этих соотношений А.А. Ильюшин [3] считает предметом основ общей математической теории пластичности. Вторая - определение деформационного (раз)упрочнения, вызванного пластическими деформациями начально-изотропного тела.

Хотя некоторыми авторами высказывались пессимистические относительно перспектив и возможности применения концепции скольжения за последние годы здесь были получены ряд достаточно важных результатов в решении обеих этих задач. Появились реальные перспективы количественного материалов не только при простых, но и сложных нагружениях [5].

**1.1.2. Интенсивность скольжений.** Макро однородную пластическую деформацию в концепции скольжений характеризуется “интенсивностью” скольжений  $\varphi_{nl}$ , зависящей от плоскости скольжения, определяемой его нормалью ( $n$ ), и от самого направления скольжения в этой плоскости ( $l$ ).

Чтобы определить пластическую деформацию поликристаллического тела, обусловленную деформациями составляющих его зерен, строятся взаимно перпендикулярные оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и полусфера единичного радиуса с центром в начале координат (рис.1.1). Затем плоскости скольжения каждого кристалла мысленно перемещаются параллельно друг друга до их касания с полусферой. Тогда плоскости скольжения в кристаллах будут характеризоваться указанными точками касания на полусфере, задаваемые сферическими координатами  $\alpha$  и  $\beta$  (рис.1.1), и сдвиги в кристаллах рассматриваем как результат скольжений в соответствующих точках.

Так как распределение зерен в металлах случайно материал предполагается первоначально изотропным, и никаких предпочтительных направлений не существует. Поскольку число кристаллических зерен в каждом макро объеме тела практически несчетное множество, то в предельном случае указанные точки касания считаются распределенными равномерно и непрерывно, а также покрывающем всю полусферу.

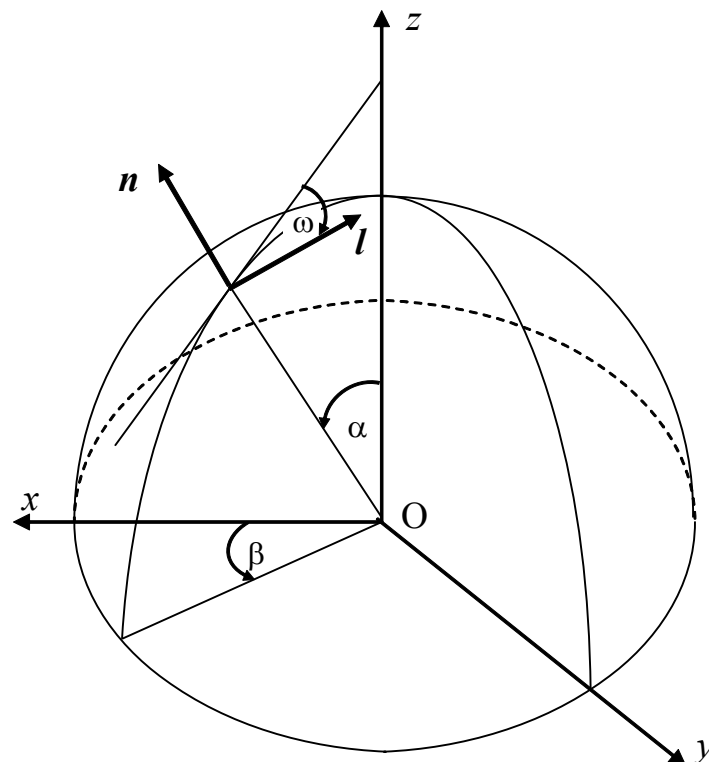


Рис. 1.1. Нормаль ( $n$ ) к плоскости скольжения и направление ( $l$ ) скольжения

Проекции векторов  $n$  и  $l$  на оси  $x, y, z$  будут:

$$\begin{aligned} n_z = \cos \alpha; n_y = \sin \alpha \sin \beta; n_x = \sin \alpha \cos \beta; l_z = \cos \omega \sin \alpha; \\ l_y = \sin \omega \cos \beta - \cos \omega \cos \alpha \sin \beta; l_x = -\sin \omega \sin \beta - \cos \omega \cos \alpha \cos \beta. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Направление скольжения  $l$  (рис.1.1) в плоскости касательной к полусфере определим углом наклона ( $\omega$ ) этого направления к плоскости  $zOn$ , к одинаково ориентированным плоскостями скольжений (с общими нормальными  $n$ ) велико, то в предельном случае угол  $\omega$  может принимать все значения от 0 до  $2\pi$ .

Таким образом, всевозможные системы скольжения охватываются полностью, если угол ( $\alpha$ ) между  $n$  и осью  $Oz$  меняется в пределах от 0 до  $\pi/2$ , угол наклона оси  $Ox$  к плоскости  $zOn$  ( $\beta$ ) – от 0 до  $2\pi$ , а угол  $\omega$  (для каждого значения  $\alpha$  и  $\beta$ ) – в пределах от 0 до  $2\pi$ .

Результатом множества скольжений происходящих вблизи выбранных плоскостей и направлений ( $n, l$ ) является изменение прямого угла между векторами  $n$  и  $l$  на величину, которая обозначается через  $2d\Gamma_{nl}$  и полагается по определению<sup>1</sup> равной

$$d\Gamma_{nl} = \varphi_{nl} dD = \varphi_{nl} dR d\omega \quad (1.2)$$

Здесь  $D$  – область скольжений;  $dD$  – ее элемент, равный произведению телесного угла ( $dR = \sin \alpha d\alpha d\beta$ ), образованного нормальными близкими к выбранной  $n$ , на угол ( $d\omega$ ) раствора направлений элементарных скольжений в окрестности выделенного направления ( $l$ ).

---

<sup>1</sup> Формула (1.2) дает “смысл” и определение понятия интенсивности скольжения  $\varphi_{nl}$ .

Интенсивность скольжений – одно из основных понятий, введенных в теорию пластичности М.Я. Леоновым [4]. Именно, функция  $\varphi_{nl}(x,y,z,t)$  определяет весь процесс пластической деформации в произвольный момент времени ( $t$ ). Она является характеристикой скольжений в сплошной однородной модели, усредненной характеристикой сдвигов во многих кристаллах поликристаллического тела, находящегося в макро однородном поле напряжений (при таком понимании интенсивности скольжений  $\varphi_{nl}$  становится безразличным, сколько плоскостей и направлений смещений имеют кристаллы, составляющие поликристаллическое тело, и применять в теории пластичности сплошную однородную и начально изотропную модель твердого тела).

Механизм скольжения связывается с локальными перемещениями структурных дефектов, которые происходят в каждой плоскости (скольжения) вообще говоря, неоднородно. Из эксперимента можно определить только компоненты тензора (макро) деформаций. Считая затем материал и нагрузку идеально однородным (и сплошным), подбираются уравнения для определения функции  $\varphi_{nl}$ , соответствующей эксперименту. Эта функция ( $\varphi_{nl}$ ) играет роль обобщенной координаты и полностью определяет движение системы (тела), а также пластическую деформацию и все связанные с ней эффекты.

При заданной интенсивности скольжений, суммируя элементарные сдвиги (1.2) по всем плоскостям ( $n$ ) и направлений ( $l$ ) скольжения, получим компоненты пластической деформации в заданной системе координат

$$\Gamma_{ij} = \frac{1}{2} \iiint_{(D)} (n_i l_j + n_j l_i) \varphi_{nl} \sin \alpha \, d\omega \, d\alpha \, d\beta, \quad (i, j = x, y, z). \quad (1.3)$$

Такое вычисление деформаций, очевидно, подразумевает, что к данному моменту нагружений ни область скольжений, ни сама интенсивность не

оказались меньше их значений в предшествующие моменты. Деформации соответствующие такому ограничению принято называть монотонными.

**1.1.3. Сопротивление сдвигу.** Вторым основополагающим моментом в теории пластичности М.Я. Леонова является введение и использование понятия сопротивления скольжений, как значения касательного напряжения при достижении которой в тех или иных плоскостях и направлениях происходят сдвиги. Произошедшие сдвиги изменяют данное напряжение, вызывая деформационную анизотропию материала, поэтому сопротивление скольжению определяется указанной функцией. Обозначая его некоторым оператором  $S_{nl}(\varphi_{v\lambda})$ , получают основное уравнение для определения пластической деформации при заданном  $S_{nl}$ :

$$\begin{aligned} S_{nl}(\varphi_{v\lambda}) &= \tau_{nl}, \quad \text{при } \dot{\varphi}_{nl} > 0; \\ \dot{\varphi}_{nl} &= 0, \quad \text{при } S_{nl}(\varphi_{v\lambda}) > \tau_{nl}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где точки над функцией означают производную по времени.

Если задать оператор  $S_{nl}(\varphi_{v\lambda})$ , то равенство (1.4) окажется уравнением для определения функции  $\varphi_{nl}$ . Интенсивность скольжений ( $\varphi_{nl}$ ) связываются с компонентами тензора пластических деформаций в декартовой системе координат формулами (1.3), предложенными Батдорффом и Будянским [6]. Разница заключается лишь в интерпретации «коэффициента  $\varphi_{nl}$ ». В теории Батдорффа-Будянского он задается в виде определенной функции, априори определяющей свойства материала в плоскости скольжения, тогда как в нашем случае  $\varphi_{nl}$  – искомая функция, которая полностью характеризует и кинематику пластической деформации, и прочностные свойства (сопротивлению сдвигу) материала.

Оператор  $S_{nl}(\varphi_{v\lambda})$  задается следующим образом: вначале при заданном законе изменения касательных напряжений  $\tau_{nl}$  и известных компонентах

тензора пластических деформаций, необходимо подобрать, такой оператор  $S_{nl}(\varphi_{\nu\lambda})$ , при котором результаты расчетов совпадают с известными экспериментальными данными. Затем, при найденном  $S_{nl}$ , выявляют закономерности пластического деформирования при тех или иных видах нагружения.

Здесь имеется расхождение с основателями концепции скольжений (Батдорфф, Будянский), которые, как и многие их последователи, пытались непосредственно определить интенсивность скольжений через напряжения, используя свои номограммы. Однако огромный труд не оправдал ожиданий при сопоставлении результатов сложных расчетов и экспериментов; подвела «надежда» на то, что напряжения в отдельных кристаллах в рассматриваемом конгломерате идентичны макро напряжениям.

В нашем подходе взаимодействия кристаллов учитывается косвенно (путем снижения сопротивления сдвигу от упругих и пластических деформаций) так, чтобы макроскопические эффекты в эксперименте совпали с расчетным.

Исходная характеристика  $S_{nl}$  в формуле (1.4), называемая сопротивлением сдвигу, является прочностной характеристикой материала в механике пластических деформаций. Наряду с интенсивностью скольжений она определяет, как и коэффициент упругости, некоторые усредненные в достаточно большом объеме тела величины (макро) однородной деформации. Эта характеристика, как и поверхность нагружения, не поддается непосредственному определению в эксперименте. Сведения же о количественной ее связи с видом, характером и интенсивностью структурных преобразований при неупругой деформации для реальных материалов могут носить лишь гипотетический характер, а аналитическое решение указанного уравнения считалось до сих пор непреодолимо трудным. Считается [4], что задача определения сопротивления сдвигу не допускает математически

строгой формулировки и проблема решается путем подбора удобного оператора для определенного класса деформаций.

Несмотря на указанные неопределенности и сложности их устранения, рассматриваемая теория в принципиальном плане представляется нам более логичной и привлекательной, позволяющей точнее отразить наблюдаемые свойства пластических материалов и открыть реалистические пути решения многих проблем пластичности, как задачи механики.

Соппротивление сдвигу, как указывалось, подбирается так, чтобы результаты расчетов и опытов совпали с точностью требуемой от эксперимента. Представим его (пока) в виде [4] предложенным М.Я. Леоновым на основе многолетних исследований по подбору этого оператора, проведенных совместно с учениками:

$$S_{nl} = \psi(\tau_o, m) + \Psi_o(\tau_o, m) \varphi_{nl} + \Phi(1 - \Gamma_{nl} / \Gamma_m), \quad (1.5)$$

где  $\Gamma_{nl}$  - компоненты тензора пластической деформации,  $\Gamma_m$  - ее максимальная сдвиговая компонента,  $\psi$  и  $\Psi_o$  - функции октаэдрического касательного напряжения ( $\tau_o$ ) и “квазистационарного” инварианта ( $m$ ) равного отношению октаэдрического и максимального касательного напряжения ( $\tau_m$ ),  $\Phi$ - “параметр”, который считается связанным с кинематикой скольжения и поверхностью текучести.

Первое слагаемое в правой части (1.5) представляет собой влияние уровня упругих деформаций (напряжений) на сопротивляемость материала сдвигу. В зависимости от погрешности измерений, рассматриваемого класса материалов и целей исследования, это влияние можно учесть с разной точностью и установить соответствующий характер изменения данного слагаемого с изменением вида и уровня напряжения.

В работе [7], принимая во внимание размерность функции  $\Psi_o$ , введен параметр ( $V$ ) характеризующий меру веерообразности плоскостей и направлений

скольжений и определяемый как “размер” области существования функции  $\varphi_{nl}$ , а искомая функция  $\Psi_0$  представлена в виде:

$$\Psi_0(m, \tau_0) = V(m, \tau_0) \cdot \Psi(m, \tau_0), \quad (1.6)$$

$$\text{где } V = \iiint_{(D)} dR \, d\omega = \iiint_{(D)} \sin \alpha \, d\alpha \, d\omega \, d\beta$$

Условие монотонности ( $\dot{\varphi}_{nl} > 0$ ) позволяет считать, что во всей области скольжений имеет место, указанное условие (1.4)

$$S_{nl}(\varphi_{v\lambda}) = \tau_{nl}, \quad (1.7)$$

а на границе  $L$  области скольжений  $(D)$  монотонной деформации интенсивность скольжений  $\varphi_{nl}$  обращается в нуль ( $\varphi_{v\lambda/L} = 0$ ).

## 1.2. Скольжения при сложном нагружении

**1.2.1. Напряженное состояние.** В произвольной координатной системе тензор напряжений задается шестью компонентами; в главных осях напряженное состояние определяется тремя компонентами, однако наложением гидростатического давления  $\sigma_{cp}$ , которое не влияет на процесс деформирования пластичных материалов, и поворотом координатных осей можно добиться, чтобы отличными от нуля были только две компоненты тензора напряжений, скажем  $\sigma_x = \sigma$  и  $\sigma_y = -\sigma_z = \tau$ . В соответствии с этим как и в [8] нами рассматривается, напряженное состояние  $\sigma_1 = \sigma_x = \sigma$ ,  $\sigma_y = \sigma_2 = -\sigma_z = -\sigma_3 = \tau$ . При этом мы ограничиваемся случаем  $0 < \tau < \sigma/3$ , так как при увеличении значений  $\tau$  от 0 до  $\sigma/3$  напряженное состояние однородного тела изменяется от одноосного растяжения до чистого сдвига. Другие случаи значений  $\tau$  и  $\sigma$  дают те же значения, но с другими главными осями. При этом процесс монотонного деформирования (веера плоскостей и направлений скольжений



не уменьшаются), можно осуществить такими траекториями нагружений, которые находятся внутри заштрихованной (на рис. 1.2) области, и могут быть прямыми (пропорциональное нагружение), выпуклой вправо ломанной или плавной линиями (сложное нагружение).

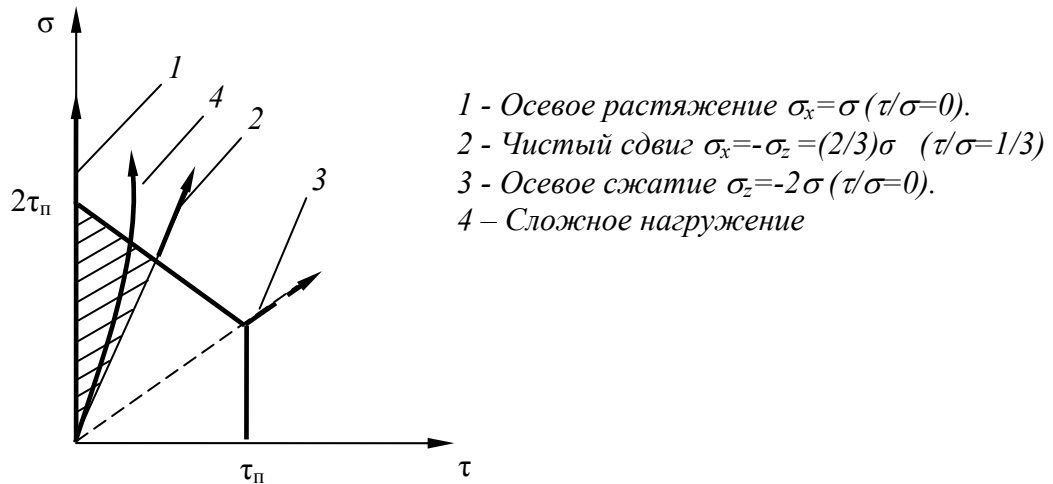


Рис. 1.2. Виды траектории для монотонного деформирования

Касательное напряжение в плоскости с нормалью  $n$  в направлении  $l$  можно представить в рассматриваемом случае в виде

$$\tau_{nl} = n_1 l_1 \sigma_1 + n_2 l_2 \sigma_2 + n_3 l_3 \sigma_3. \quad (1.8)$$

Здесь  $n_i, l_i$  - проекции векторов  $n, l$  на оси  $x, y, z$ .

**1.2.2. Деформированное состояние.** Выше указанному напряженному состоянию ( $\tau$  и  $\sigma$ ) в общем случае соответствует тензор деформаций, имеющий шесть компонент. Эти компоненты входят через сопротивление сдвигу в выражение для интенсивности, и тем самым задача их определения сводится к решению нелинейных интегральных уравнений с неизвестной заранее областью интегрирования. Сложность определения определяющих соотношений заключается еще в том, что пластические деформации (скольжения) зависят от истории нагружения и в каждом конкретном случае

связь деформаций от напряжений может быть уникальной. Наиболее приемлемым в такой ситуации способом их описания является выделение классов нагружения, при которых это описание носит относительно универсальный характер. В данной работе рассматриваются такие классы нагружения, когда сохраняется соосность главных осей напряжений и деформаций.

Состояния чистого сдвига и осевого растяжения (сжатия), являются двумя предельными случаями из всех возможных видов рассматриваемого класса нагружения, которым отвечают состояния чисто пластического сдвига и осе симметричной деформации растяжения (сжатия). Соответствующие им множества плоскостей скольжений является по нашему мнению, двумя крайними (идеальными в смысле их реализации) случаями из всех возможных множеств плоскостей монотонных (непрерывных) скольжений.

Компонента тензора пластического сдвига в таком случае преобразуется по такому же закону как (1.8)

$$\Gamma_{nl} = n_1 l_1 \Gamma_1 + n_2 l_2 \Gamma_2 + n_3 l_3 \Gamma_3, \quad (1.9)$$

где  $\Gamma_i$  - главные пластические деформации ( $i=1,2,3$ ).

В рассматриваемом случае, когда главные оси деформаций и напряжений совпадают и не меняются в процессе нагружения, для деформаций  $\Gamma_i$  будем иметь соотношения

$$\Gamma_3 = -(\Gamma_1 + \Gamma_2), \quad \Gamma_m = (\Gamma_1 - \Gamma_3)/2 = \Gamma_1 + \Gamma_2/2. \quad (1.10)$$

Учитывая при этом еще связь  $n_3 l_3 = -(n_1 l_1 + n_2 l_2)$ , выражения (1.8) и (1.9) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \tau_{nl} &= \tau(n_1 l_1 + 2n_2 l_2) + n_1 l_1 \sigma, \\ \Gamma_{nl} &= (2\Gamma_1 + \Gamma_2)n_1 l_1 + (2\Gamma_2 + \Gamma_1)n_2 l_2. \end{aligned} \quad (1.11)$$

### 1.2.3. Веера скольжений при сложном нагружении

Из равенства  $\tau_{nl} = S_{nl}$  определяется интенсивность скольжений ( $\varphi_{nl}$ ); при этом для выбранного нами вида оператора  $S_{nl}$  (1.5), получаем

$$\varphi_{nl} = \lambda_1(2n_1l_1 + 2n_2l_2\lambda_2/\lambda_1 - \lambda_0/\lambda_1), \quad (1.12)$$

где  $\lambda_0 = \frac{\psi + \Phi}{V\Psi}$ ,  $\lambda_1 = \frac{\tau_m + \Phi}{V\Psi}$ ,  $\lambda_2 = \frac{\tau + \Phi(1 - \Gamma_{12}/\Gamma_m)}{V\Psi}$ ,

$$\tau_m = \tau_{nl}^{\max} = \frac{(\sigma + \tau)}{2} \quad (1.13)$$

$\psi$  - начальное сопротивление сдвигу;  $\Phi$  и  $\Psi$  - характеристики рассматриваемой модели пластического формообразования,  $V$  - мера (объем) множества скольжений.

Область ( $D$ ) определения интенсивности  $\varphi_{nl}$  - множество направлений и плоскостей скольжений находится из условия  $\varphi_{nl} \geq 0$ , согласно которому в этой области должно выполняться неравенство

$$(1 - Q\sin^2\beta)\cos\omega\sin 2\alpha + (Q\sin\alpha\sin 2\beta)\sin\omega \geq \lambda_0/\lambda_1$$

или

$$\cos(\omega - \Omega_c) \geq \cos\Omega, \quad (1.14)$$

где

$$Q = \lambda_2/\lambda_1, \quad \Omega = \arccos(\lambda_0/R\lambda_1), \\ \Omega_c = \arcsin[(Q\sin\alpha\sin 2\beta)/R], \quad (1.15)$$

$$R = \sqrt{(Q\sin\alpha\sin 2\beta)^2 + (1 - Q\sin^2\beta)^2 \sin^2 2\alpha}.$$

Из полученного неравенства (1.14) для возможных направлений скольжений ( $\omega$ ) находится интервал значений

$$\omega \in [\Omega_1, \Omega_2], \quad \text{где } \Omega_{1,2} = \Omega_c \pm \Omega. \quad (1.16)$$

Необходимое условие ( $R \geq \lambda_0/\lambda_1$ ) выполнения неравенства (1.14) будет давать соотношение

$$(Q \sin \alpha \sin 2\beta)^2 + (1 - Q \sin^2 \beta)^2 \sin^2 2\alpha \geq (\lambda_0/\lambda_1)^2. \quad (1.17)$$

На начальной стадии скольжений можно считать  $\tau_m \sim \tau_{II}$  и до некоторого уровня нагружения  $\tau_m$  величина  $\lambda_0/\lambda_1$  будет оставаться близкой к единице; соответственно можно считать  $\lambda_0/\lambda_1 = 1 - u^2/2$  и  $u^2 \ll 1$  [5]. Это будет означать что, при первых сдвигах в соотношении (1.17) должно быть, по крайней мере,  $\sin 2\alpha \approx 1$ , т.е.  $\alpha \sim \pi/4$ . Поэтому полагаем, что на начальной (упругопластической) стадии деформаций наряду с  $u$  малой будет и величина<sup>1</sup>  $\alpha_1 = \alpha - \pi/4$ . В этом случае соотношение (2.4.6) с точностью до малых величин третьего порядка записывается в виде

$$2Q \sin^2 \beta [1 - Q - 2Q\alpha_1 + 0.5Q \sin^2 \beta + 2Q\alpha_1 \sin^2 \beta - 4\alpha_1^2 + 2Q\alpha_1^2 \sin^2 \beta] \leq u^2 - 4\alpha_1^2. \quad (1.18)$$

Отсюда видно, что выражение внутри скобок здесь является функцией имеющей конечные значения и, следовательно, ее множитель  $2Q \sin^2 \beta$  должен быть малой величиной (порядка  $u^2$ ).

Учитывая сказанное, на начальной стадии пластической деформации для интенсивности скольжений  $\varphi_{nl}$ , величин  $\Omega_c$  и  $\Omega$  получено [5] (с точностью до малых третьего порядка в соответствующих разложениях) выражения

---

<sup>1</sup>В общем случае следует считать, что при  $\tau_m \sim \tau_{II}$  должно быть  $\alpha = \alpha_c + \alpha_1$ , где  $\alpha_c$  - зависящая от  $\beta$  функция, определяющая плоскости, где возможны первые сдвиги. Анализ этой возможности показывает, что характер изменения функции  $\alpha_c(\beta)$  зависит от уровня  $\tau$ : При  $\tau=0$  она равно  $\pi/4$  и не зависит от  $\beta$ , а с ростом  $\tau$  график этой функции начинает слабо отклоняться от линии  $\alpha_c(\beta) = \pi/4$ , достигая наибольшего своего значения  $\pi/2$  в "точке"  $\beta = \pi/4$ , когда  $\tau = \sigma$ . Однако, в любом случае при  $\beta \rightarrow 0$  будем иметь  $\alpha_c = \pi/4$ , поэтому для рассматриваемого случая ( $\tau < \sigma/3$ ) считаем  $\alpha_c \sim \pi/4$ .

$$\varphi_{nl} = 0.5\lambda_1[\Omega^2 - (\omega - \Omega_c)^2], \quad \Omega_c = \frac{Q \sin 2\beta}{\sqrt{2}},$$

$$\Omega = \sqrt{u^2 - 4\alpha_1^2 - 2(1-Q)Q \sin^2 \beta}. \quad (1.19)$$

Неравенство  $\varphi_{nl} \geq 0$  с учетом (1.19) дает в пространстве  $(\alpha_1, \beta_1, \omega_1)$  “эллипсоид”, вытянутый вдоль  $\beta_1$  с соответствующей полуосью зависящей (через параметр  $\lambda_2 / \lambda_1$ ) от  $\tau$ . Полное множество плоскостей скольжений определяется максимальным сечением этого эллипсоида, получаемым при  $\omega = \Omega_c$ . Это сечение будет иметь вид более вытянутого вдоль оси  $\beta$  “эллипса”, чем в случае чистого сдвига: Оно целиком входит во множество плоскостей при растяжении-сжатии и в то же время полностью содержит в себе множество плоскостей для случая чистого сдвига (рис.1.3 а, б).

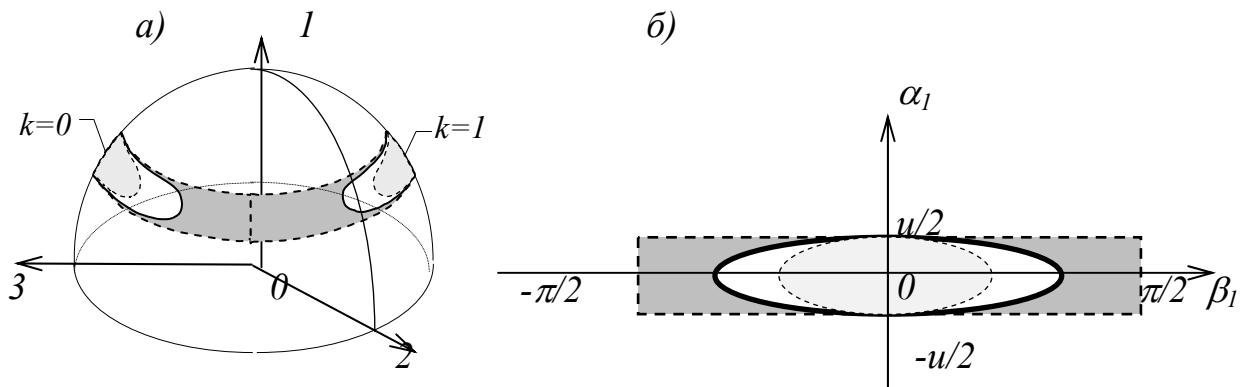


Рис.1.3 Множество плоскостей скольжений очерчен сплошной линией. (Пунктирные линии - границы множеств плоскостей скольжений для чистого сдвига и растяжения-сжатия).

Для искомой области скольжений при этом будем иметь соотношения

$$\alpha = \pi/4 + \alpha_1, \quad |\alpha_1| \leq \alpha_0 = \frac{1}{2} \sqrt{u^2 - 2(1-Q)Q \sin^2 \beta}, \quad (|\alpha_1| < 1); \quad (1.20)$$

$$\Omega_c - \Omega \leq \omega \leq \Omega_c + \Omega; \quad |\beta| \leq \beta_0.$$

а относительно предельного для  $\beta$  значения ( $\beta_0$ ) можно сказать следующее.

Из выражения для  $\alpha_0$  видно, что  $|\sin\beta| \leq u/\sqrt{2(1-Q)Q}$ . Это условие будет верно для всех<sup>2</sup>  $\beta \in [-\pi/2, \pi/2]$  и  $\beta_0 = \pi/2$ , если окажется  $Q(1-Q) \leq u^2/2$  (Рис.1.4 в).

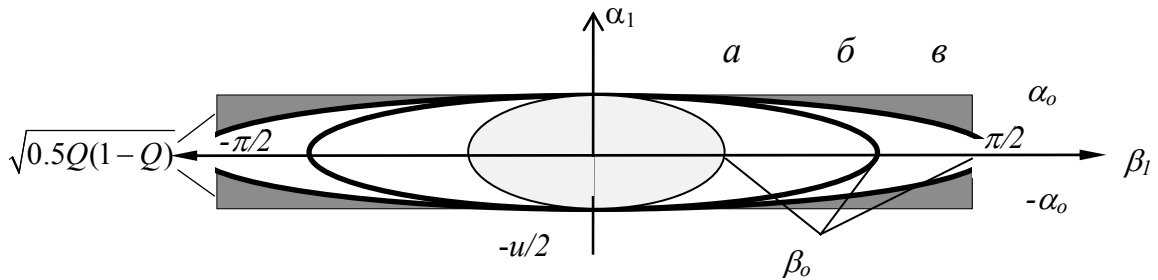


Рис.1.4 Две такие картины, центр которых  $(\alpha_1, \beta_1=0)$  располагаются в “точках”  $\alpha = \pi/4, \beta = k\pi$  ( $k=0,1$ ) множества плоскостей скольжения, определяют характер развития границ последних на разных этапах деформирования.

В противном случае (когда  $(1-Q)Q > u^2/2$ ) значение  $\beta_0$  будет зависеть от величины  $Q$  и тем самым от величины  $\tau$ :  $\beta_0 = \arcsin(u/\sqrt{2(1-Q)Q})$  (см. рис.1.4 а, б).

### 1.3. Определяющие уравнения при сложном нагружении

Компоненты пластической деформации для исследуемого сложного нагружения с учетом формулы (1.3) можно записать в следующем виде

$$\Gamma_1 = \iiint_{(D)} n_1 l_1 \varphi_{nl} \sin \alpha \, d\omega \, d\alpha \, d\beta$$

$$\Gamma_2 = \iiint_{(D)} n_2 l_2 \varphi_{nl} \sin \alpha \, d\omega \, d\alpha \, d\beta, \quad \Gamma_3 = -(\Gamma_1 + \Gamma_2) \quad (1.21)$$

На начальной стадии пластической деформации (при малых значениях параметра  $u$ ), как было установлено ранее (п.1.2.3), интенсивность скольжений  $\varphi_{nl}$  определяется выражением (1.19). Границы области

<sup>2</sup> Множество плоскостей скольжений состоит из двух симметричных (относительно  $\beta = \pm\pi/2$ ) частей с центрами в “точках”  $\alpha = \pi/4, \beta = 0$  и  $\beta = \pi$ . Учитывая эту симметрию, здесь и далее рассматривается только локализованная вокруг первой “точки” часть этого множества, для которой  $\beta_0 \leq \pi/2$ .

скольжений, определяемые условием  $\varphi_n=0$ , и разложив направляющие косинусы векторов  $n$  и  $l$  (1.1) в ряд по степеням  $\alpha_1$  и  $\omega$  получим

$$\begin{aligned} n_1 l_1 \sin \alpha_1 &= \frac{\sqrt{2}}{4} \left( 1 + \alpha_1 - \frac{5}{2} \alpha_1^2 - \frac{\omega^2}{2} \right), \\ n_2 l_2 \sin \alpha_1 &= \frac{1}{4} \left( \omega \sin 2\beta - \sqrt{2} \alpha_1 \sin^2 \beta \right) - \frac{\sqrt{2}}{4} \sin^2 \beta \end{aligned} \quad (1.22)$$

здесь

$$\Omega_c - \Omega \leq \omega \leq \Omega_c + \Omega,$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \alpha_1, \quad |\alpha_1| \leq \alpha_0, \quad \alpha_0 = \sqrt{u^2 - 2Q(1-Q)\sin^2 \beta} / 2, \quad \alpha_0 \ll 1$$

$$|\beta| \leq \beta_0, \quad \beta_0 = \arcsin(u / \sqrt{2Q(1-Q)}), \quad \text{если } Q(1-Q) \geq \frac{u^2}{2}$$

$$\beta_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \text{если } Q(1-Q) \leq \frac{u^2}{2}$$

При полученных выражениях для интенсивности (1.19), границ области скольжений и направляющих косинусов (1.9) интегралы, определяющие компоненты тензора пластических деформаций с сохранением только старших членов разложения можно записать [5] в следующем виде

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \frac{\sqrt{2}}{8} \lambda_1 \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \int_{\Omega_c - \Omega}^{\Omega_c + \Omega} \left[ \Omega^2 - (\omega - \Omega_c)^2 \right] d\omega d\alpha_1 d\beta \\ \Gamma_2 &= \frac{1}{8} \lambda_1 \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \int_{\Omega_c - \Omega}^{\Omega_c + \Omega} \left( \omega \sin 2\beta - \sqrt{2} (1 + \alpha_1) \sin^2 \beta \right) \left[ \Omega^2 - (\omega - \Omega_c)^2 \right] d\omega d\alpha_1 d\beta \end{aligned} \quad (1.23)$$

Далее интегрирование полученных интегралов проводится в отдельности.

При интегрировании первого (внутреннего) интеграла воспользуемся подстановкой  $\omega = \Omega_c + \Omega \sin t$ ; при этом будем иметь  $d\omega = \Omega \cos t dt$ ,  $t \in [-\pi/2, \pi/2]$  и в результате интегрирования получаем

$$\int_{\Omega_c - \Omega}^{\Omega_c + \Omega} [\Omega^2 - (\omega - \Omega_c)^2] d\omega = \Omega^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 t dt = \frac{4}{3} \Omega^3 = \frac{4}{3} [u^2 - 4\alpha_1^2 - B \sin^2 \beta]^{\frac{3}{2}}$$

где обозначено  $B = 2Q(1-Q)$ .

Для интегрирования второго интеграла используем следующую подстановку  $\alpha_1 = \left( \frac{u^2 - B \sin^2 \beta}{4} \right)^{1/2} \sin t$ ; в этом случае, будем иметь

$$d\alpha_1 = \left( \frac{u^2 - B \sin^2 \beta}{4} \right)^{1/2} \cos t dt, t \in [-\pi/2, \pi/2];$$

$$\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} (u^2 - 4\alpha_1^2 - B \sin^2 \beta)^{3/2} d\alpha_1 = 0.5 [u^2 - B \sin^2 \beta]^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 t dt = \frac{3}{16} \pi (u^2 - B \sin^2 \beta)^2$$

Вычисление внешнего интеграла дает следующее выражение

$$\int_{-\beta_0}^{\beta_0} (u^2 - B \sin^2 \beta)^2 d\beta = 2u^4 \beta_0 - 2Bu^2 (\beta_0 - \sin 2\beta_0) + 2B^2 \left( \frac{3}{4} \beta_0 - \frac{\sin 2\beta_0}{2} + \frac{\sin 4\beta_0}{16} \right)$$

В итоге получено

$$\Gamma_1 = \frac{\sqrt{2}}{16} \pi \lambda_1 u^4 \left[ 2\beta_0 - 4p(\beta_0 - \sin 2\beta_0) + 4p^2 \left( \frac{3}{4} \beta_0 - \frac{\sin 2\beta_0}{2} + \frac{\sin 4\beta_0}{16} \right) \right], \quad (1.24)$$

где обозначено  $p = Q(1-Q)/u^2$ .

Результатом вычислений по (1.21) компоненты  $\Gamma_2$  с использованием тех же подстановок являются следующие выражения:



**Внутренний интеграл-**

$$\int_{\Omega_c - \Omega}^{\Omega_c + \Omega} (\omega \sin 2\beta - \sqrt{2}(1 + \alpha_1) \sin^2 \beta) [\Omega^2 - (\omega - \Omega_c)^2] d\omega = (\Omega_c \sin 2\beta - \sqrt{2}(1 + \alpha_1) \sin^2 \beta) \Omega^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 t dt + \sin 2\beta \Omega^4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 t \sin t dt = \frac{4}{3\sqrt{2}} (Q \sin^2 2\beta - 2(1 + \alpha_1) \sin^2 \beta) \Omega^3 = \frac{4}{3\sqrt{2}} [Q \sin^2 2\beta - 2(1 + \alpha_1) \sin^2 \beta] (u^2 - 4\alpha_1^2 - B \sin^2 \beta)$$

После интегрирование по переменной  $\alpha_1$ -

$$\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} [(u^2 - 4\alpha_1^2 - B \sin^2 \beta)^{3/2}] (Q \sin^2 2\beta - 2(1 + \alpha_1) \sin^2 \beta) d\alpha_1 =$$

$$= 0.5(Q \sin^2 2\beta - 2 \sin^2 \beta) [u^2 - B \sin^2 \beta]^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 t dt -$$

$$0.5 \sin^2 \beta [u^2 - B \sin^2 \beta]^{5/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin t \cos^4 t dt =$$

$$= \frac{3\pi}{16} (Q \sin^2 2\beta - 2 \sin^2 \beta) (u^2 - B \sin^2 \beta)$$

Вычисление внешнего интеграла-

$$\int_{-\beta_0}^{\beta_0} (Q \sin^2 2\beta - 2 \sin^2 \beta) (u^2 - B \sin^2 \beta)^2 d\beta =$$

$$-2 \left\{ (1 - 2Q) \left[ \beta_0 - \frac{\sin 2\beta_0}{2} - 4p \left( \frac{3}{4} \beta_0 - \frac{\sin 2\beta_0}{2} + \frac{\sin 4\beta_0}{16} \right) + 4p^2 \left( \frac{5}{8} \beta_0 - \frac{15 \sin 2\beta_0}{32} + \frac{3 \sin 4\beta_0}{32} - \frac{\sin 6\beta_0}{96} \right) \right] + 2Q \left[ \frac{3}{4} \beta_0 - \frac{\sin 2\beta_0}{2} + \frac{\sin 4\beta_0}{16} - 4p \left( \frac{5}{8} \beta_0 - \frac{15 \sin 2\beta_0}{32} + \frac{3 \sin 4\beta_0}{32} - \frac{\sin 6\beta_0}{96} \right) + 4p^2 \left( \frac{35}{64} \beta_0 - \frac{7 \sin 2\beta_0}{16} + \frac{7 \sin 4\beta_0}{64} - \frac{\sin 6\beta_0}{48} + \frac{\sin 8\beta_0}{512} \right) \right] \right\}$$

В результате получено

$$\Gamma_2 = -\frac{\sqrt{2}}{16} \lambda_1 \pi u^4 \left\{ (1-2Q) \left[ \beta_0 - \frac{\sin 2\beta_0}{2} - 4p \left( \frac{3}{4} \beta_0 - \frac{\sin 2\beta_0}{2} + \frac{\sin 4\beta_0}{16} \right) + 4p^2 \left( \frac{5}{8} \beta_0 - \frac{15 \sin 2\beta_0}{32} + \frac{3 \sin 4\beta_0}{32} - \frac{\sin 6\beta_0}{96} \right) \right] + 2Q \left[ \frac{3}{4} \beta_0 - \frac{\sin 2\beta_0}{2} + \frac{\sin 4\beta_0}{16} - 4p \left( \frac{5}{8} \beta_0 - \frac{15 \sin 2\beta_0}{32} + \frac{3 \sin 4\beta_0}{32} - \frac{\sin 6\beta_0}{96} \right) + 4p^2 \left( \frac{35}{64} \beta_0 - \frac{7 \sin 2\beta_0}{16} + \frac{7 \sin 4\beta_0}{64} - \frac{\sin 6\beta_0}{48} + \frac{\sin 8\beta_0}{512} \right) \right] \right\} \quad (1.25)$$

В полученных выражениях для компонент деформаций через параметр  $\lambda_l$  входит мера множества скольжений  $V$

$$V = \iiint_{(D)} dR d\omega = \iiint_{(D)} \sin \alpha d\alpha d\omega d\beta = \iiint_{(D)} \frac{\sqrt{2}}{2} \left( 1 + \alpha_1 - \frac{\alpha_1^2}{2} \right) d\alpha_1 d\omega d\beta \quad (1.26)$$

Вычисление последнего интеграла проводится аналогичным образом

### **Внутренний интеграл**

$$\int_{\Omega_c - \Omega}^{\Omega_c + \Omega} \left( 1 + \alpha_1 - \frac{\alpha_1^2}{2} \right) d\alpha_1 = \sqrt{2} \left( 1 + \alpha_1 - \frac{\alpha_1^2}{2} \right) \Omega$$

Второй интеграл-

$$\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} (u^2 - 4\alpha_1^2 - B \sin^2 \beta)^{1/2} d\alpha_1 = 0.5 (u^2 - B \sin^2 \beta)^{1/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{\pi}{4} (u^2 - B \sin^2 \beta)$$

Внешний интеграл-

$$\int_{-\beta_0}^{\beta_0} (u^2 - B \sin^2 \beta) d\beta = 2u^2 \beta_0 - 2B(\beta_0 - 0.5 \sin 2\beta_0)$$

В результате получается

$$V = \frac{\pi}{2} u^2 (2\beta_0 - p(2\beta_0 - \sin 2\beta_0)) \quad (1.27)$$

Подставляя найденное значение меры множества скольжений (1.27) в выражения для пластической части главных компонент (1.24) и (1.25) установлено

$$\Gamma_1 = \frac{\tau_m - \text{ш}}{4\Psi} \left[ \frac{2\beta_0 - 4p \left( \beta_0 - \frac{\sin 2\beta_0}{2} \right) + 4p^2 \left( \frac{3}{4}\beta_0 - \frac{\sin 2\beta_0}{2} + \frac{\sin 4\beta_0}{16} \right)}{2\beta_0 - p(2\beta_0 - \sin 2\beta_0)} \right], \Gamma_3 = -(\Gamma_1 + \Gamma_2), \left( p = Q \frac{1-Q}{u^2} \right), \quad (1.28)$$

$$\Gamma_2 = -\frac{\tau_m - \text{ш}}{4\Psi} \left\{ \frac{1-2Q}{2\beta_0 - p(2\beta_0 - \sin 2\beta_0)} \left[ \beta_0 - \frac{\sin 2\beta_0}{2} - 4p \left( \frac{3}{4}\beta_0 - \frac{\sin 2\beta_0}{2} + \frac{\sin 4\beta_0}{16} \right) + 4p^2 \left( \frac{5}{8}\beta_0 - \frac{15\sin 2\beta_0}{32} + \frac{3\sin 4\beta_0}{32} - \frac{\sin 6\beta_0}{96} \right) \right] + \frac{2Q}{2\beta_0 - p(2\beta_0 - \sin 2\beta_0)} \left[ \frac{3}{4}\beta_0 - \frac{\sin 2\beta_0}{2} + \frac{\sin 4\beta_0}{16} - 4p \left( \frac{5}{8}\beta_0 - \frac{15\sin 2\beta_0}{32} + \frac{3\sin 4\beta_0}{32} - \frac{\sin 6\beta_0}{96} \right) + 4p^2 \left( \frac{35}{64}\beta_0 - \frac{7\sin 2\beta_0}{16} + \frac{7\sin 4\beta_0}{64} - \frac{\sin 6\beta_0}{48} + \frac{\sin 8\beta_0}{512} \right) \right] \right\}. \quad (1.29)$$

$$\beta_0 = \arcsin \left( u / \sqrt{2(1-Q)Q} \right), \quad Q = \frac{\tau + \Phi \frac{\Gamma_{23}}{\Gamma_{13}}}{\tau_m + \Phi} \quad (1.30)$$

Для установления зависимостей деформаций от напряжений в явной форме рассмотрены асимптотические разложения определяющих соотношений (1.28) и (1.29) [8] для наиболее характерных трех случаев: 1- Случай (рис.1.4.а), когда множество плоскостей скольжения не развито относительно  $\beta$ , т.е. - при  $\beta_0 \ll 1$ ; 2- когда эта область приближается к соответствующей области при осевом растяжении-сжатии, но остается разомкнутой, т.е.  $\beta_1 = (\pi/2 - \beta_0) \ll 1$  (рис.1.4.б); и 3- случай, когда эта область будет уже сомкнутой (рис.1.4.в,  $\beta_0 = \pi/2$ ).

В первом случае разложение выражений (1.28) и (1.29) в ряды по степеням  $\beta_0$  (при  $\beta_0 \approx u / \sqrt{2(1-Q)Q} \leq 0.5 \div 0.8$ , или в градусах при  $\beta_0 \leq 30^\circ \div 45^\circ$ ) дают соотношения

$$\Gamma_1 = \frac{\tau_m - \tau_n}{5\Psi} \left( 1 - \frac{\beta_0^2}{35} \right), \Gamma_2 = -\frac{\tau_m - \tau_n}{5\Psi} \left( \frac{1-2Q}{7} \beta_0^2 \right), \Gamma_3 = -\frac{\tau_m - \tau_n}{5\Psi} \left( 1 - \frac{1,2-2Q}{7} \beta_0^2 \right). \quad (1.31)$$

Во втором случае, когда  $\pi/2 - \beta_0 = \beta_1 \ll 1$ , будем иметь  $p \approx 0.5 / (1 - \beta_1^2) \geq 0.5$  или, соответственно,  $0 \leq Q(1-Q) \leq 0.5u^2(1 + \beta_1^2)$  и разложение выражений (1.28) и (1.29) в ряд по степеням  $\beta_1$  дает соотношения

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \frac{\tau_m - \psi}{5\Psi} \left( \frac{15}{16} + \frac{5}{16} \beta_1^2 \right), \\ \Gamma_2 &= -\frac{\tau_m - \psi}{5\Psi} \left( \frac{5}{32} - \frac{5}{32} \beta_1^2 - \frac{6}{32} Q \right), \\ \Gamma_3 &= -\frac{\tau_m - \psi}{5\Psi} \left( \frac{25}{32} + \frac{15}{32} \beta_1^2 + \frac{6}{32} Q \right). \end{aligned} \quad (1.32)$$

В третьем случае имеем  $\beta_0 = \pi/2$  и соответственно  $p \leq 0.5$ . При этом выражения (1.28) и (1.29) значительно упрощаются и принимают следующий вид

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \frac{\tau_m - \tau_n}{4\Psi} \left( \frac{1-2p+1,5p^2}{1-p} \right) = \frac{\tau_m - \tau_n}{4\Psi} - \frac{\lambda_1 u^2}{8} p \left( 1 - \frac{0.5p}{1-p} \right), \\ \Gamma_2 &= -\frac{\tau_m - \tau_n}{4\Psi} \left( \frac{0,5-1,5p+1,25p^2}{1-p} - Q \frac{0,25-0,5p+5p^2/16}{1-p} \right) \\ &= -\frac{\tau_m - \tau_n}{8\Psi} (1-0.5Q) + \frac{\lambda_1 u^2}{8} p (1-0.25Q) \left( 1 - \frac{0.25p}{1-p} \right), \\ \Gamma_3 &= -(\Gamma_1 + \Gamma_2). \end{aligned} \quad (1.33)$$

## ГЛАВА 2

### ПОСТРОЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК СОПРОТИВЛЕНИЯ СДВИГУ

Для решения поставленной задачи необходимо, прежде всего, выразить материальные характеристики модели  $\Psi$  и  $\Phi$ , входящие в соотношения (1.28) и (1.29).

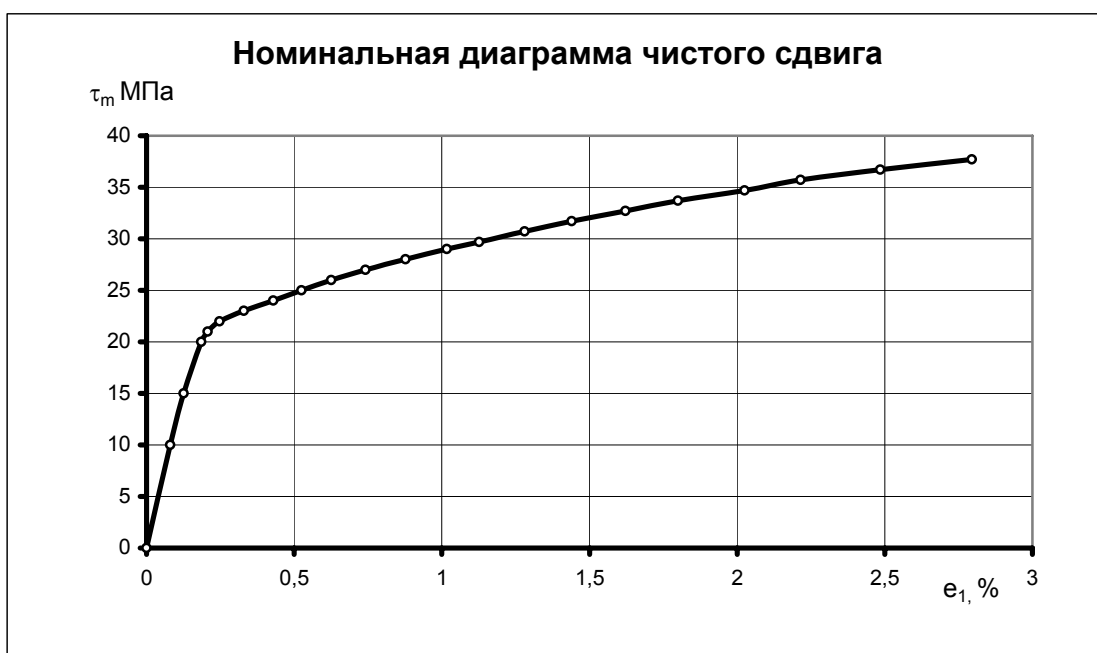
#### 2.1. Посторонние функции упрочения

В работе [9] приведена аппроксимация зависимости материальной функции  $\Psi$  от максимального касательного напряжения с погрешностью в пределах 15-20 %.

Для определения материальной функции  $\Psi$  через величины деформаций достаточно двух экспериментов на одноосное растяжение и чистый сдвиг [8]; для более точного отражения ее поведения при других видах оказалось достаточным знание нескольких экспериментальных данных хотя бы при одном сложном нагружении. Необходимые данные для установления характера изменения функции  $\Psi$  и ее параметров взяты из результатов на различные виды деформирования тонкостенных трубок из стали *Ст-40Х*, проведенных Жигалкиным В.М.

##### 2.1.1. Чистый сдвиг

Данные для расчетов взяты из результатов экспериментов на чистый сдвиг тонкостенных трубок из стали *Ст-40Х*, проведенных Жигалкиным В.М., для нескольких образцов и вычисленных по ним усредненным номинальным значениям деформаций. Согласно этим данным  $\nu=0.33$ ,  $E=2.1 \cdot 10^5$  Мпа (рис.2.1.).



*Рис. 2.1. Диаграмма чистого сдвига*

Табл.2.1.

№	$\tau_m/9,81$	$\Gamma_m$	$9,81 \cdot \Psi_{сд}^{эксп}$	$9,81 \cdot \Psi_{сд}^{расч}$	$\Delta_{сд}, \%$
1	23	0,0011	2089,90	1860,12	10,99
2	24	0,0020	1270,46	1241,34	2,29
3	25	0,0029	961,22	969,54	-0,87
4	26	0,0038	784,77	801,56	-2,14
5	27	0,0049	654,05	674,41	-3,11
6	28	0,0062	552,63	574,48	-3,95
7	29	0,0075	482,97	502,27	-4,00
8	29,7	0,0085	440,53	458,48	-4,08
9	30,7	0,0099	396,93	410,97	-3,54
10	31,7	0,0114	362,13	372,27	-2,80
11	32,7	0,0132	329,82	337,37	-2,29
12	33,7	0,0148	305,83	310,07	-1,39
13	34,7	0,0170	278,80	281,98	-1,14
14	35,7	0,0188	262,66	262,74	-0,03
15	36,7	0,0214	240,03	239,93	0,04
16	37,7	0,0244	218,67	218,85	-0,08

Для расчета значений  $\Psi$  при заданных значениях деформаций и напряжений в соответствии с зависимостью (1.18) получим формулу

$$\Psi_{cd} = \frac{\tau_m - \tau_n}{4\Gamma_m} \quad (2.1)$$

По вычисленным значениям (табл. 2.1) строим кривую зависимости  $\Psi \sim \Gamma_m$  (рис.2.2.)

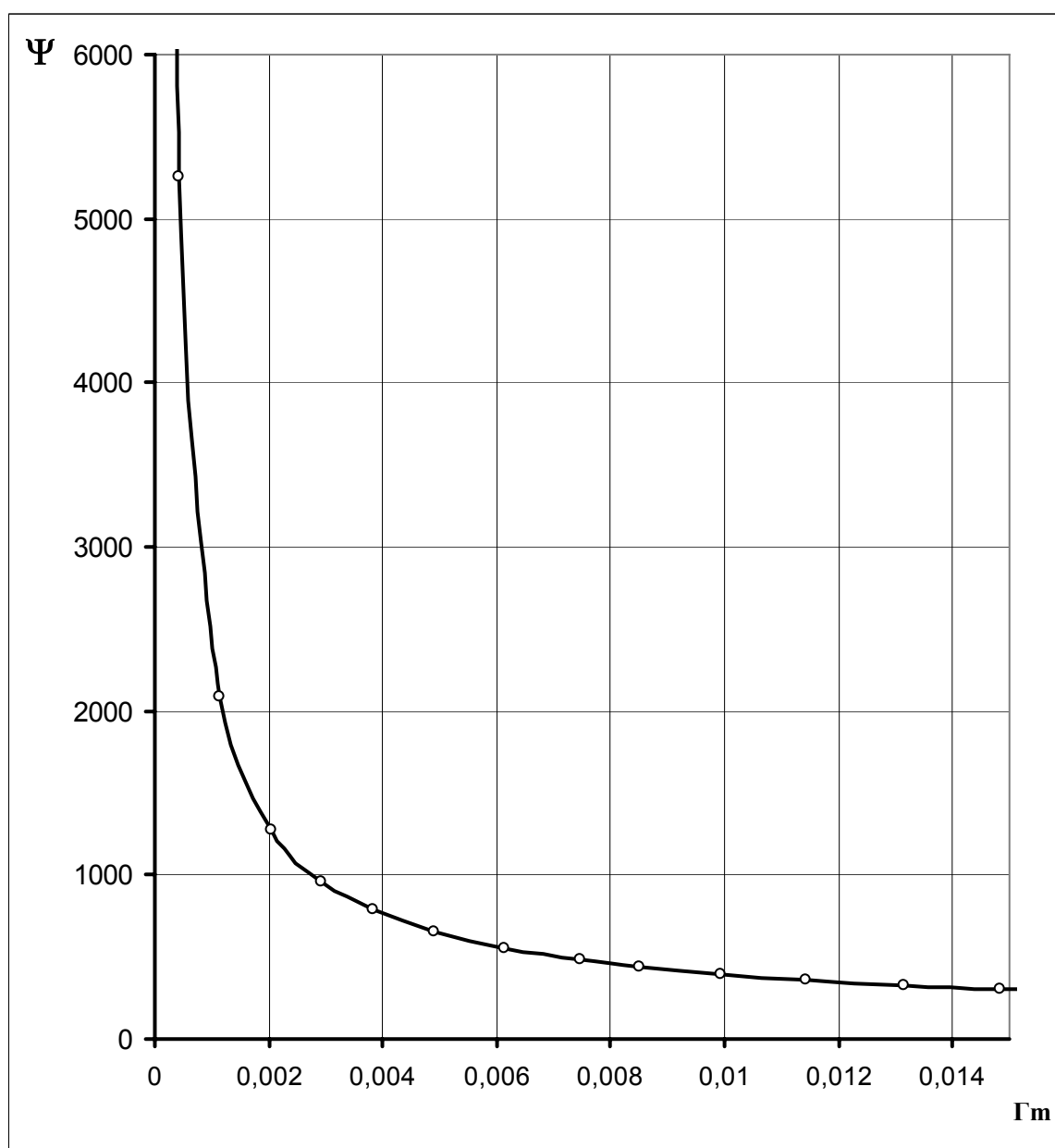


Рис.2.2. Характер определяющей функции  $\Psi$  в зависимости от максимальной сдвиговой деформации  $\Gamma_m$  для случая чистого сдвига.

Полученного вида кривую можно аппроксимировать зависимостью типа

$$y = \frac{a}{x^\alpha} + b \quad (2.2)$$

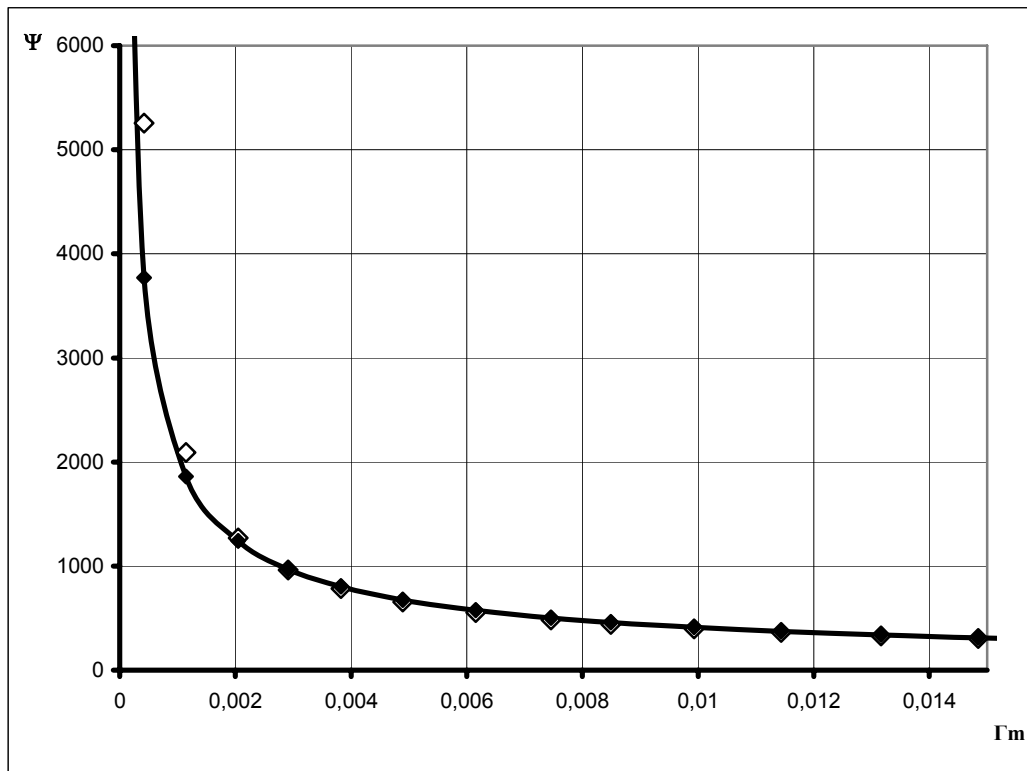
где в нашем случае  $x = \Gamma_m$ ,  $y = \Psi$ ,  $a = A_{c\partial}$

При этом для аналитической зависимости получим формулу

$$\Psi_{c\partial} = \frac{A_{c\partial}}{\Gamma_m^\alpha} + b \quad (2.3)$$

$A_{c\partial}$ ,  $\alpha$  и  $b$  подбираем таким образом, чтобы соответствующая кривая проходила через экспериментальные точки. Проведенные расчеты показали, что с погрешностью в пределах 1-4%, подбирая соответствующие параметры, получим следующие результаты  $A_{c\partial}=16.27$ ,  $\alpha=0.7$  и  $b=0$ . Величины отклонения экспериментальных данных от расчетных, при этих значениях параметров приведены в табл. 2.1, а график этой зависимости изображен на рис.2.3.





2.3 Сравнение экспериментальной и расчетной кривой ( $\Psi \sim \Gamma_m$ )

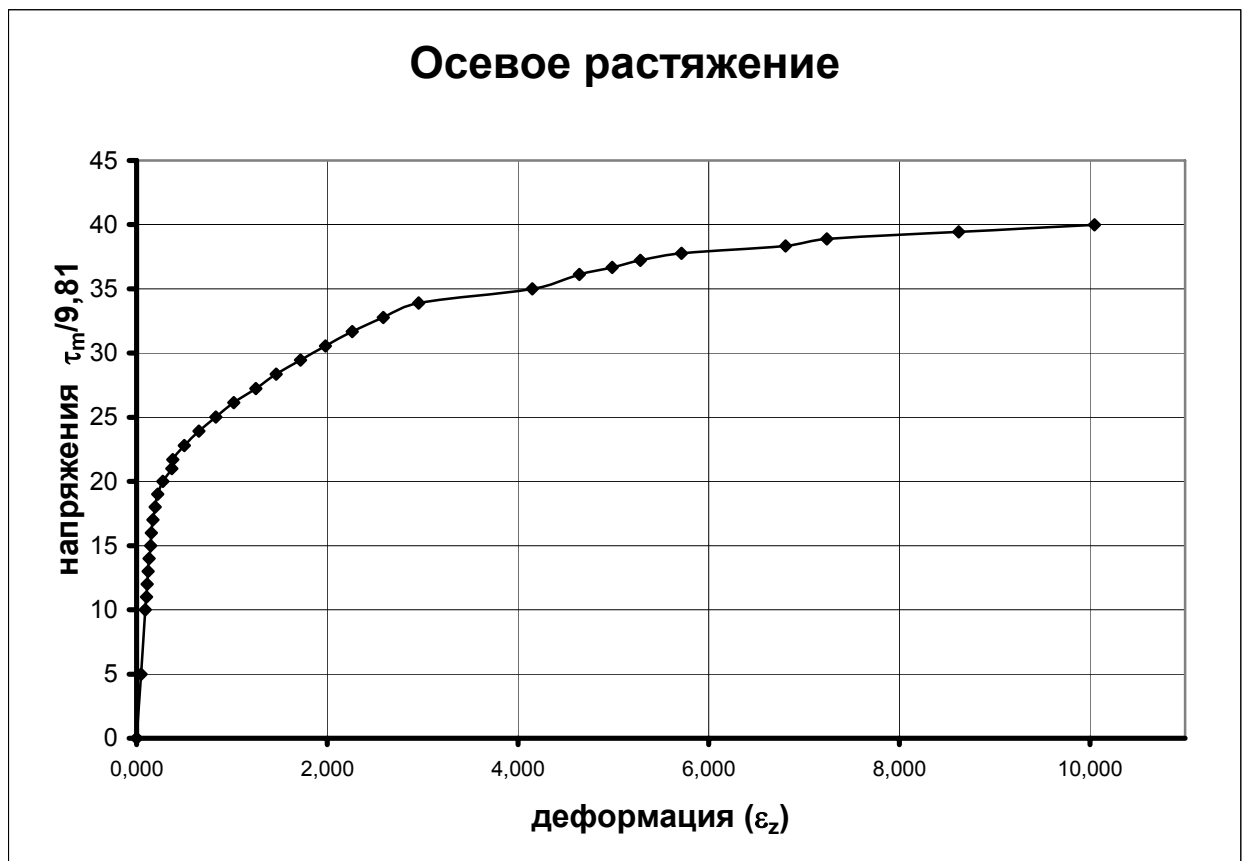
Как видно, для рассматриваемого образца с достаточно высокой точностью можно принять

$$\Psi_{cd} = \frac{16,27}{\Gamma_m^{0,7}} \quad (2.4)$$

При малых деформациях  $\Gamma_m \in [0.01; 0.05\%]$  относительная погрешность составляет 3-10% при  $\Gamma_m \in [0.07; 0.7\%]$  составляет 1-4%.

### 2.1.2. Осевое растяжение.

Данные для выявления зависимости  $\Psi \sim \Gamma_m$  при растяжении-сжатии и ее аналитической аппроксимации взяты из результатов на осевое растяжение тонкостенных трубок из стали *Ст-40Х*, проведенных Жигалкиным В.М., для нескольких образцов и вычисленных по ним усредненным соответствующих тем или иным значениям уровня нагружения номинальным значениям деформаций. Полученным таким образом номинальная диаграмма приведена на (рис.2.4).



*Рис. 2.4. Диаграмма осевого растяжения*

Используя зависимость  $\tau_m \sim \Gamma_m$ , аналогично предыдущему рассчитываем значения  $\Psi_p$ , соответствующим заданным экспериментальным значениям  $\Gamma_m$ . Результаты расчетов приведены в табл.2.2 и изображены на рис.2.5.

Табл. 2.2

$\tau_m/9.81$	$\Gamma_1$	$\Gamma_2$	$\Gamma_3$	$\Gamma_m =$ $=(\Gamma_1 - \Gamma_3)/2$	$9,81 \cdot \Psi_p^{эксн}$	$9,81 \cdot \Psi_p^{расч}$	$\Delta_p, \%$
МПа	%	%	%		МПа	МПа	%
0	0	0	0	0	-	-	-
5	0	0	0	0	-	-	-
10	0	0	0	0	-	-	-
11	0,0001	0,0001	-0,0002	1,47E-06	-	-	-
12	-0,0003	0,0004	-0,0001	-6,6E-07	-	-	-
13	0,0004	-0,0003	-0,0001	2,2E-06	129758,4	184019,1	-41,8
14	0,0000	0,0000	0,0000	5,8E-08	2470609	2810452	-13,7
15	0,0077	-0,0048	-0,0029	5,29E-05	13028,67	16923,0	-29,8
16	0,0053	-0,0015	-0,0038	4,58E-05	23494,44	18865,9	19,7
17	0,0120	-0,0022	-0,0098	0,000109	12536,11	9867,14	21,2
18	0,0246	-0,0039	-0,0207	0,000227	7110,798	5687,006	20
19	0,0433	-0,0076	-0,0356	0,000394	4623,69	3752,02	18,8
20	0,0869	-0,0244	-0,0625	0,000747	2589,16	2323,27	10,2
21	0,1715	-0,0621	-0,1095	0,001405	1457,33	1446,81	0,7
21,69	0,1770	-0,0267	-0,1503	0,001637	1510,21	1290,24	14,5
22,80	0,2867	-0,0667	-0,2199	0,002533	1029,53	929,97	9,6
23,91	0,4313	-0,1218	-0,3095	0,003704	748,65	699,34	6,5
25,02	0,5959	-0,1898	-0,4061	0,00501	588,14	557,56	5,2
26,13	0,7756	-0,2729	-0,5027	0,006391	487,71	464,51	4,7
27,24	0,9952	-0,3759	-0,6193	0,008072	407,97	389,88	4,4
28,35	1,1998	-0,4769	-0,7229	0,009613	361,52	342,00	5,3
29,45	1,4444	-0,6050	-0,8395	0,01142	319,41	300,57	5,8
30,56	1,6941	-0,7410	-0,9531	0,013236	288,72	269,07	6,8
31,67	1,9637	-0,8940	-1,0697	0,015167	263,21	242,95	7,7
32,76	2,2785	-1,0792	-1,1993	0,017389	238,81	219,27	8,2
33,89	2,6429	-1,3241	-1,3189	0,019809	216,56	198,85	8,2
35,00	3,8226	-2,2971	-1,5255	0,02674	156,96	158,78	-1,1
36,11	4,3072	-2,4682	-1,8390	0,030731	145,74	143,05	1,8
36,66	4,6470	-2,6427	-2,0043	0,033257	138,07	134,82	2,3
37,22	4,9368	-2,7912	-2,1456	0,035412	132,77	128,62	3,1
37,77	5,3617	-3,0277	-2,3339	0,038478	124,82	120,85	3,1
38,33	6,4514	-3,9022	-2,5492	0,045003	105,90	107,46	-1,4
38,88	6,8762	-4,0157	-2,8605	0,048684	101,38	101,30	0,1
39,44	8,2560	-4,8772	-3,3788	0,058174	86,11	88,64	-2,9
39,99	9,6759	-5,1988	-4,4771	0,070765	74,90	76,528	-2,1

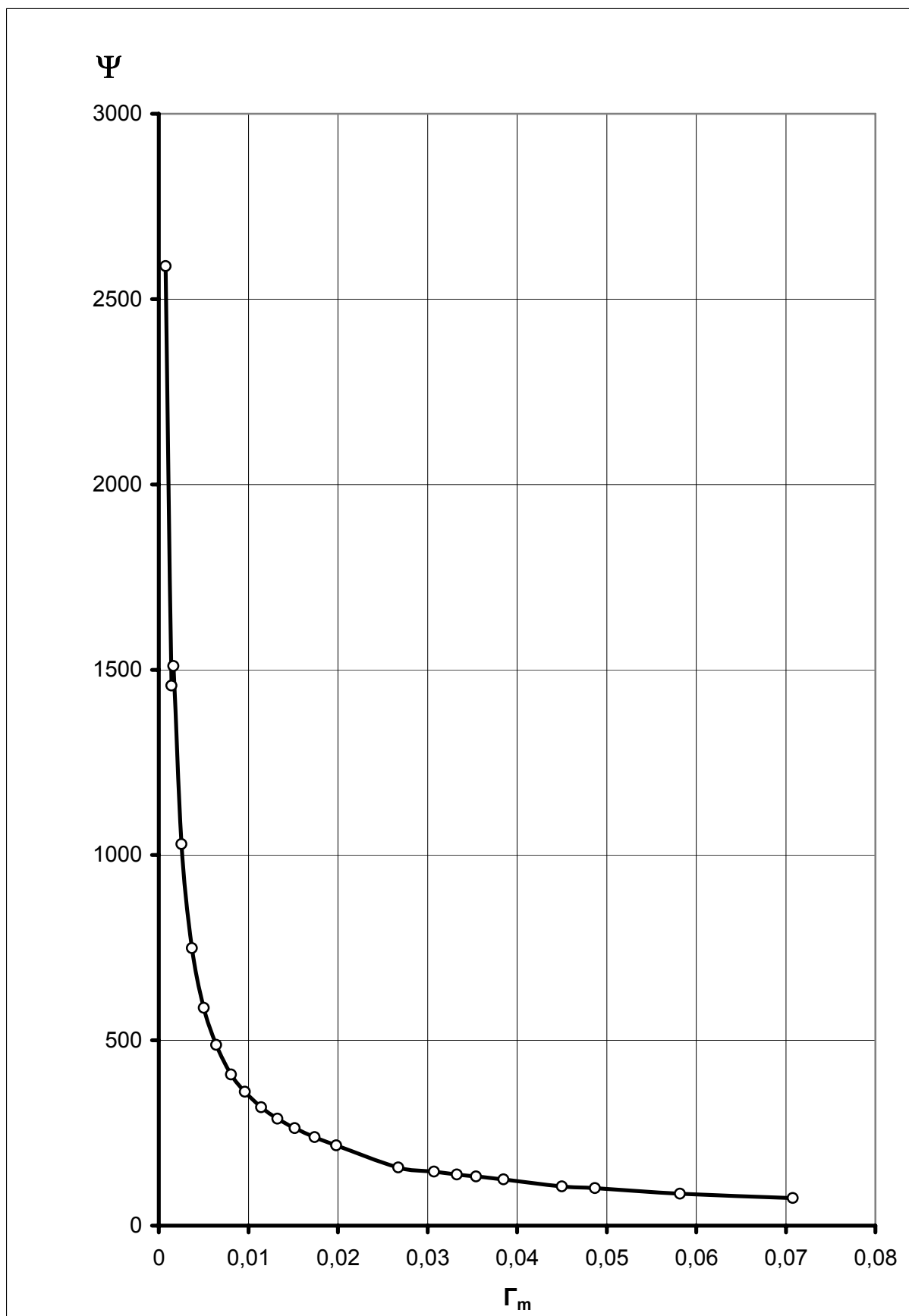


Рис.2.5. Характер определяющей функции  $\Psi$  в зависимости от максимальной сдвиговой деформации  $\Gamma_m$  в случае осевого растяжения.

Эту кривую также будем описывать уравнением того же вида (2.2)

$$\Psi_p = \frac{A_p}{\Gamma_m^\alpha} + b \quad (2.5)$$

данном случае  $x = \Gamma_m$ ,  $y = \Psi_p$ ,  $a_2 = A_p$

Подбор значений параметров  $A_p$ ,  $\alpha$  и  $b$  показал, что для данного случая с достаточно высокой точностью (с погрешностью в пределах 4-5%) можно принять  $A_p=12,5$   $b=0$ ,  $\alpha=0,7$  считать тем самым

$$\Psi_p = \frac{12,5}{\Gamma_m^{0,7}} \quad (2.6)$$

### 2.1.3. Особенности изменения функции $\Psi$ при больших деформациях

В начальной стадии одноосного нагружения для имеющихся экспериментальных данных, а также для номинальной кривой  $\sigma_z \sim \varepsilon_z$  осевой симметрии деформаций не наблюдается ( $\varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$ ) табл. 2.3.

Табл. 2.3

$\tau_m/9.81$	$\varepsilon_1^{ном}$	$\varepsilon_2^{ном}$	$\varepsilon_3^{ном}$	$\Gamma_1^{ном}$	$\Gamma_2^{ном}$	$\Gamma_3^{ном}$	$\Gamma_m$
Мпа	%	%	%	%	%	%	%
11	0,10	-0,03	-0,07	0,000	0,000	0,000	0,000
12	0,11	-0,04	-0,08	0,000	0,000	0,000	0,000
13	0,12	-0,04	-0,08	0,000	0,000	0,000	0,000
14	0,13	-0,04	-0,09	0,000	0,000	0,000	0,000
15	0,15	-0,05	-0,10	0,008	-0,003	-0,005	0,006
16	0,16	-0,05	-0,10	0,005	-0,004	-0,001	0,003
17	0,17	-0,06	-0,11	0,012	-0,010	-0,002	0,007
18	0,19	-0,08	-0,12	0,025	-0,021	-0,004	0,014
19	0,22	-0,09	-0,13	0,043	-0,036	-0,008	0,025
20	0,27	-0,12	-0,15	0,087	-0,063	-0,024	0,056
21	0,37	-0,17	-0,19	0,172	-0,109	-0,062	0,117
21,70	0,38	-0,22	-0,16	0,177	-0,150	-0,027	0,102
22,81	0,50	-0,29	-0,21	0,287	-0,220	-0,067	0,177
23,92	0,66	-0,38	-0,27	0,431	-0,310	-0,122	0,277
25,02	0,83	-0,48	-0,35	0,596	-0,406	-0,190	0,393

26,13	1,02	-0,58	-0,44	0,776	-0,503	-0,273	0,524
27,24	1,25	-0,70	-0,55	0,995	-0,619	-0,376	0,686
28,35	1,47	-0,81	-0,66	1,200	-0,723	-0,477	0,838
29,46	1,72	-0,93	-0,79	1,444	-0,839	-0,605	1,025
30,57	1,98	-1,05	-0,93	1,694	-0,953	-0,741	1,218
31,68	2,26	-1,17	-1,09	1,964	-1,070	-0,894	1,429
32,77	2,59	-1,30	-1,29	2,278	-1,199	-1,079	1,679
33,90	2,96	-1,42	-1,54	2,643	-1,319	-1,324	1,981
35,00	4,15	-1,63	-2,52	3,823	-2,297	-1,525	3,060
36,11	4,65	-1,95	-2,70	4,307	-2,468	-1,839	3,388
36,67	4,99	-2,12	-2,87	4,647	-2,643	-2,004	3,645
37,22	5,29	-2,26	-3,03	4,937	-2,791	-2,146	3,864
37,77	5,72	-2,45	-3,27	5,362	-3,028	-2,334	4,195
38,33	6,81	-2,67	-4,14	6,451	-3,902	-2,549	5,177
38,89	7,24	-2,98	-4,26	6,876	-4,016	-2,861	5,446
39,44	8,63	-3,50	-5,13	8,256	-4,877	-3,379	6,567
39,99	10,05	-4,60	-5,45	9,676	-5,199	-4,477	7,437

Если бы имелись данные экспериментов при строго осесимметричной деформации, то реальная кривая ( $\Psi_p \sim \Gamma_m$ ) проходила бы на большем удалении от кривой ( $\Psi_p \sim \Gamma_m$ ), чем построенная нами кривая ( $\Psi_p \sim \Gamma_m$ ) при установленном  $A_p=12,5$ .

Надо полагать (и это подтверждается рассмотренными нами экспериментальными данными), что с ростом уровня нагружения условие осесимметричности деформации ( $\varepsilon_2 \approx \varepsilon_3$ ) начинает выполняться (табл. 2.3 при  $\Gamma_m \geq 1,98\%$ ) отвечающей случаю осевой симметрии деформации. Поэтому для построения действительной зависимости ( $\Psi_p \sim \Gamma_m$ ) необходимо использовать данные при большом уровне деформирования, т.е. добиваться совпадения расчетной зависимости ( $\Psi_p \sim \Gamma_m$ ) с экспериментальными данными при больших значениях  $\Gamma_m$ . Такое совпадение (с погрешностью 5-6%) достигнуто нами (см. рис.2.6) при  $A_p=12$  (см. табл.2.2).

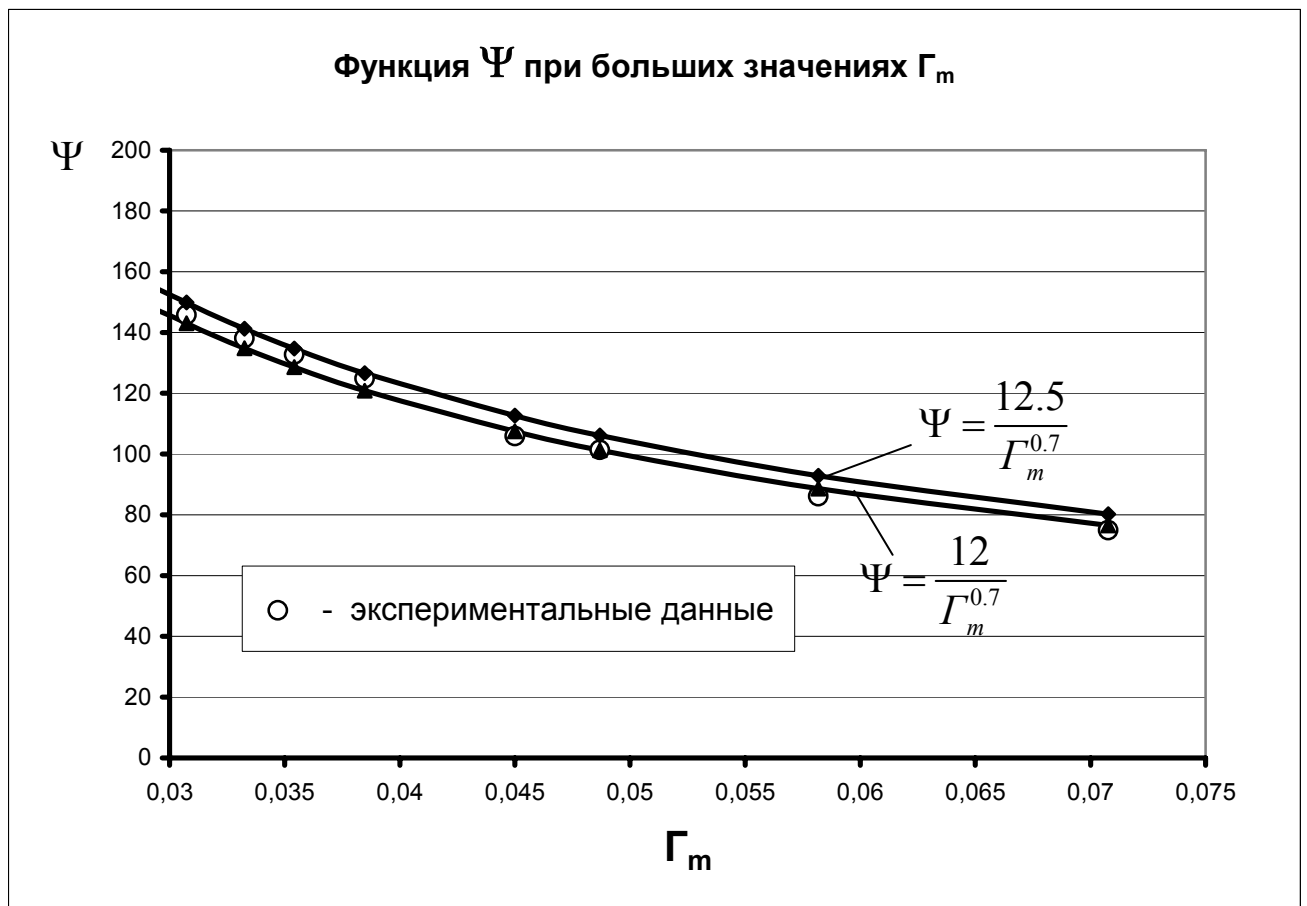


Рис. 2.6. Определяющая функция при больших значения деформаций  $\Gamma_m$

Тем самым для случая растяжения считаем

$$\Psi_p = \frac{12}{\Gamma_m^{0.7}} \quad (2.7)$$

Соответствующая кривая зависимости  $\Psi_p \sim \Gamma_m$  построенная при такой аппроксимации изображенная на рис.2.7 (сплошной линией). Здесь же для сравнения приведена пунктирная кривая, соответствующая случаю  $A_p=12,5$ .

Допускаемая при этом погрешность при малых деформациях  $\Gamma_m \in [0; 0.4\%]$  находится в пределах 6-40%. Столь большая погрешность связывается с характером деформирования на этом участке и в частности с отсутствием осевой симметрии. В интервале  $\Gamma_m \in [0.4; 1.98\%]$  допускаемая погрешность будет порядка 4-8%, а при больших деформациях  $\Gamma_m \in [2; 7\%]$  погрешность составляет 2-3%.

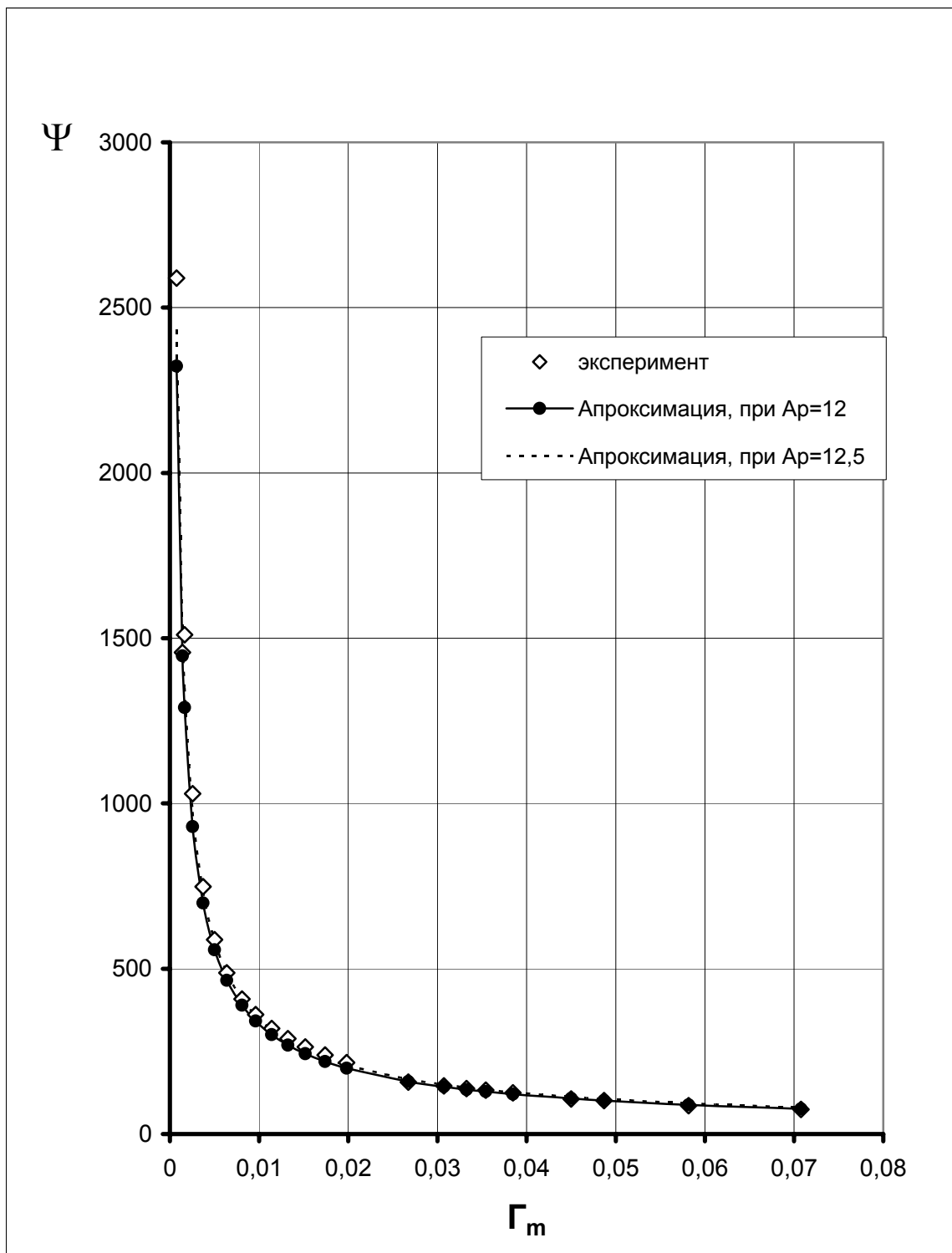


Рис.2.7. Сравнение экспериментальной и расчетной кривой ( $\Psi \sim \Gamma_m$ ) при осевом растяжении

Таким образом, из полученных результатов следует, что зависимость функции  $\Psi$  от уровня деформирования  $\Gamma_m$  (как для случая деформации при

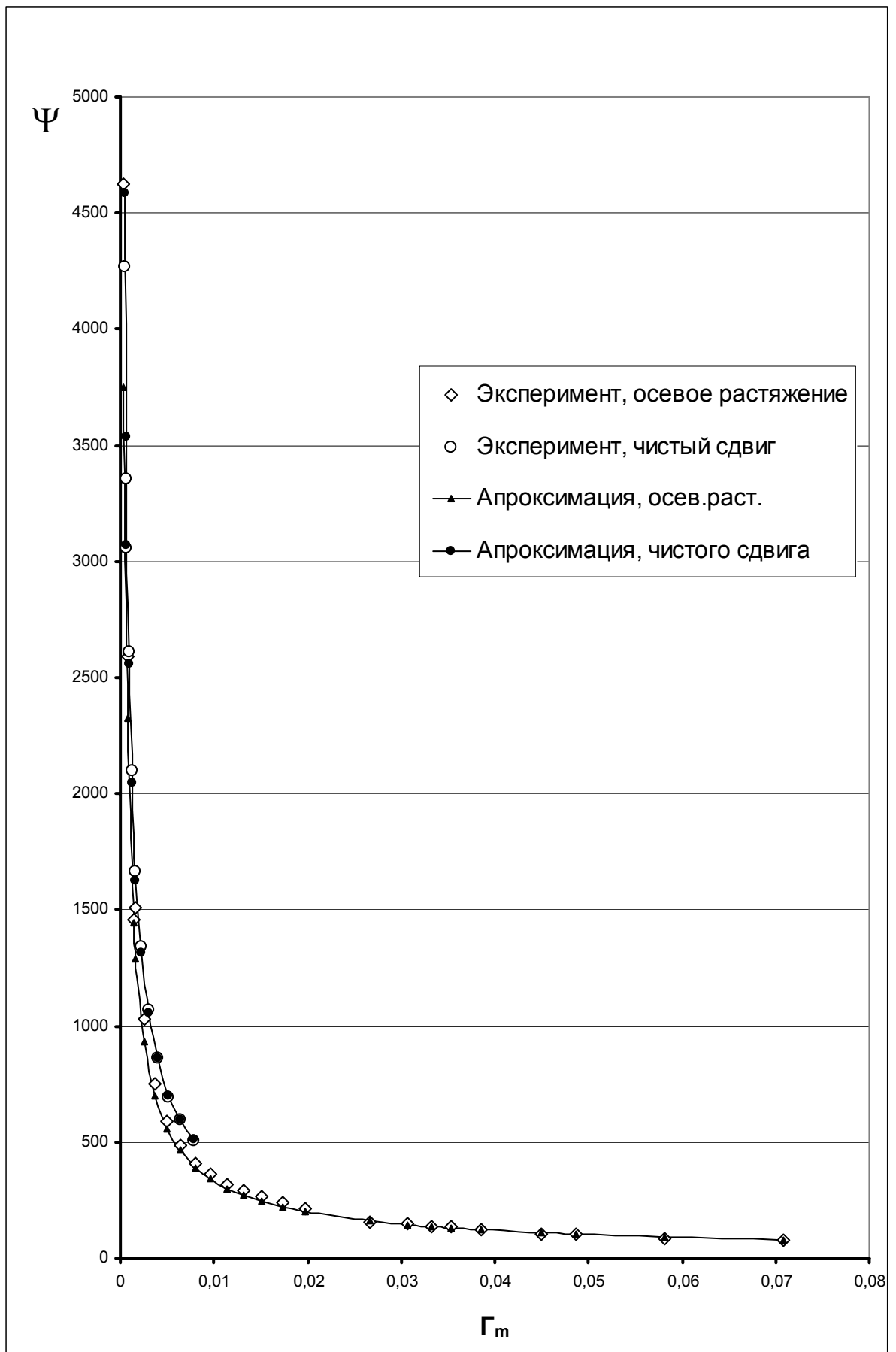


растяжении-сжатии так при деформации чистого сдвига) можно аппроксимировать единой формулой

$$\Psi = \frac{A}{\Gamma_m^{0.7}}, \quad (2.8)$$

в котором величина  $A$  остается постоянной на всей стадии деформирования равной для чистого сдвига  $A_{cd}=16.27$ , а в случае осевого растяжения  $A_p=12$  (рис.2.8). Исходя из этого зависимость функции  $\Psi$  от уровня деформирования  $\Gamma_m$  (6) можно считать единой, а величину  $A$  - функцией зависящей только от вида деформированного состояния т.е.  $A=A(\mu_\varepsilon)$  причем

$$A = \begin{cases} A_p = 12 & \text{при } \mu_\varepsilon = \pm 1 \\ A_{cd} = 16.27 & \text{при } \mu_\varepsilon = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$



*Рис.2.8. Характер определяющей функции  $\Psi$  в зависимости от максимальной сдвиговой деформации  $\Gamma_m$  для случая осевого растяжения и чистого сдвига*

### 2.1.4 Стандартная квазилинейная аппроксимация

При указанном в (2.2) случае  $b=0$  для построения аппроксимации функции  $\Psi$  можно использовать квазилинейную аппроксимацию [10], при которой путем преобразования исходных переменных ( $\Gamma_m$  и  $\Psi$ ) можно построить линейную аппроксимацию для новых переменных ( $\lambda$  и  $\xi$ ).

Для рассматриваемого случая таким преобразованием будет  $\lambda = \ln \Psi$ ;  $\xi = \ln a$  и тогда будем иметь

$$\lambda = h - \alpha \xi \quad (2.10)$$

Задача построения квазилинейной аппроксимации сводится при этом к определению по экспериментальным данным констант  $h$  и  $\alpha$ . В случае чистого сдвига и осевого растяжения экспериментальные значения переменных ( $\lambda$  и  $\xi$ ), а также значения коэффициентов уравнения (2.2), полученные с построением «линии тренда» в офисном приложении MS Excel указаны на рис. 2.9.

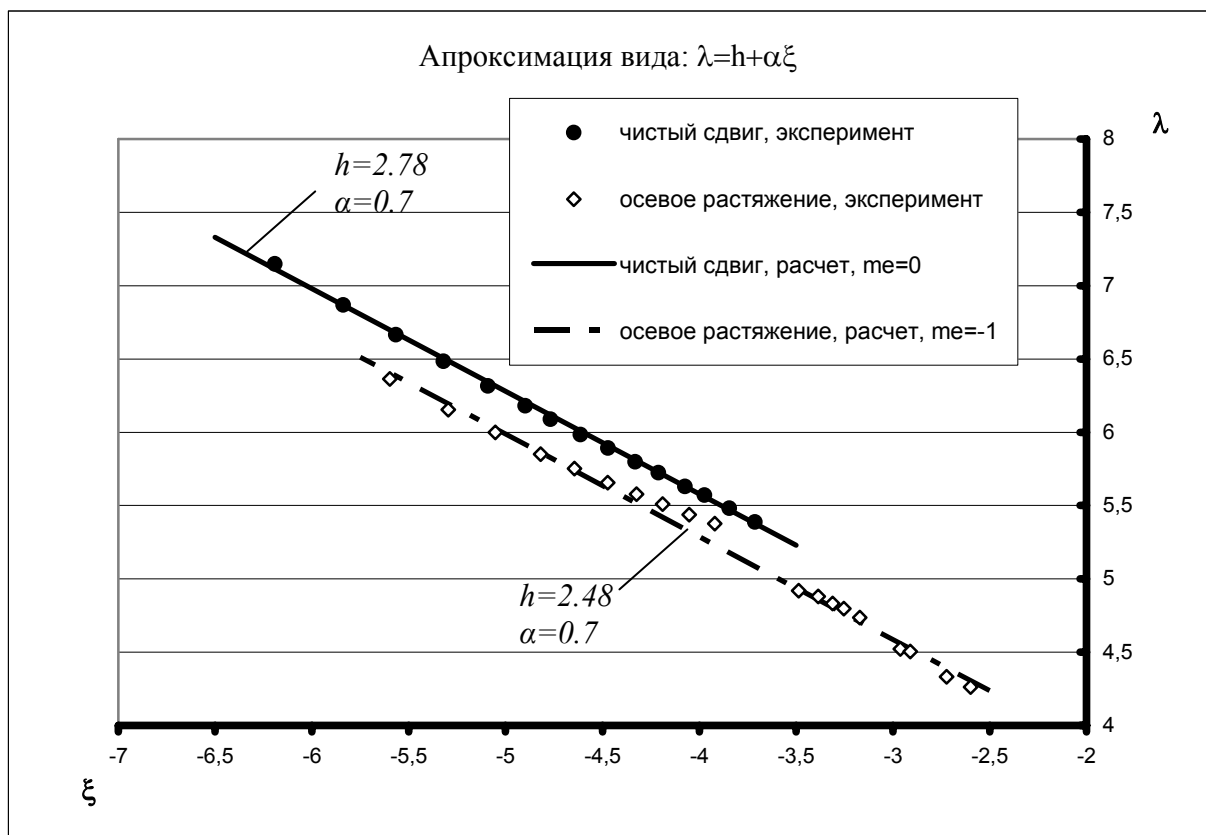


Рис. 2.9. Сравнение экспериментальных и расчетных данных

Из полученных результатов видно, что характер изменения функции  $\Psi$  для случаев чистого сдвига и растяжения является практически единой ( $\alpha=0.7$ ). Величину  $A$  уравнения (2.8) можно получить из выражения  $A = \exp(h)$

$$A = \begin{cases} A_p = 11.94 & \text{при растяжении} \\ A_{сд} = 16.11 & \text{при чистом сдвиге} \end{cases} \quad (2.11)$$

Данный результат практически совпадает с установленными значениями (2.9)

### 2.1.5. Влияние вида деформирования на зависимость $\Psi \sim \Gamma_m$

Рассмотренные экспериментальные данные для реальных образцов, а также их усреднения по нескольким образцам показывают, что в процессе одноосного растяжения тонкостенные трубчатые образцы деформируются не осесимметричным образом ( $\varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$ ), как это обычно принято считать для однородных и изотропных материалов. В начальной стадии деформирования (в пределах  $\tau_m = 11$  МПа вплоть до  $\tau_m \approx 32$  МПа) имеет место неравенство  $\Gamma_1 = \Gamma_2 \neq \Gamma_3 = \Gamma_\phi$ . В качестве характеристики отражающей отличие такого деформирования от ожидаемой (общепринятой) осесимметричной, (когда  $\Gamma_2 = \Gamma_3 = -0,5\Gamma_1$ ) можно взять (величину  $\eta = \frac{\Gamma_2 - \Gamma_3}{\Gamma_m}$  либо же) параметр Лоде-

Надаи

$$\mu_\varepsilon = 2 \frac{\Gamma_2 - \Gamma_3}{\Gamma_m} - 1 \quad (2.12)$$

В идеальном (общепринятом) случае должно быть ( $\eta=0$  или же)  $\mu_\varepsilon = -1$ . Согласно же экспериментальным данным наблюдается довольно стабильное отклонение параметров  $\eta$  и  $\mu_\varepsilon$  от этих ожидаемых величин (рис. 2.10.)

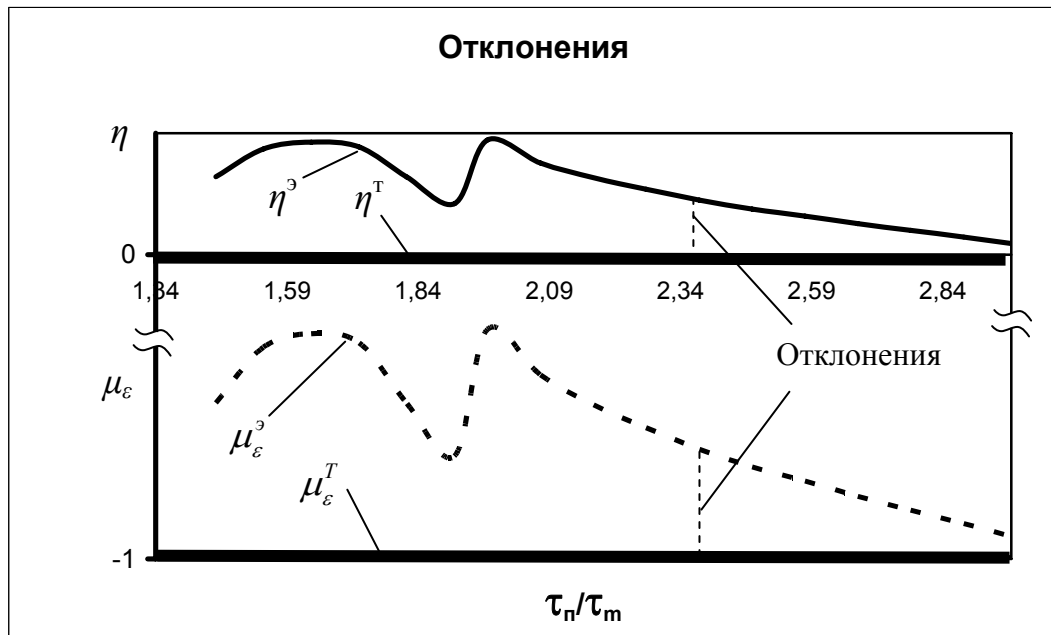


Рис.2.10. Характер отклонения вида деформирования от оссиметричности при растяжении.

Такой характер деформирования, вероятно, обусловлен неоднородностью и не изотропностью реального (поликристаллического) материала что, по нашему мнению, несомненно, должно отражаться на характере возникновения и развития начальных скольжений.

Очевидно, в силу невозможности учета реальной структуры материала, следует считать, что возникновение и развитие начальных скольжений имеет случайную природу и количественное описание такого процесса должно носить вероятностный (статистический) характер. В соответствии с этим можно считать, что указанное отклонение параметров  $\eta$  и  $\mu_\epsilon$  от ожидаемого носит случайный характер. При этом, учитывая еще тот факт, что механизм пластических деформаций, характер неоднородности микроструктуры и кристаллического строения материала многообразны, в соответствии с центральной предельной теоремой можно принять, что такое отклонение будет описываться нормальным законом распределения случайных величин. В частности, экспериментальные значения  $\mu_\epsilon$  можно рассматривать как случайные отклонения этого параметра от математического ожидания

(среднего значения для идеально однородной и изотропной среды), равного нулю - в случае растяжения.

Значения функции от одной случайной величины также является случайной и ее распределение в таком случае, будет описываться тем же нормальным законом распределения случайной величины.

В соответствии с отмеченным для описания процесса неосесимметричности деформации реального материала при растяжении будем считать, что отклонение параметра  $A$  от ожидаемого  $A_p$  будет описываться функцией вида

$$A(\mu_\varepsilon) = A_p + k \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\mu_\varepsilon^2}{2\sigma^2}} \quad (2.13)$$

для дисперсии  $\sigma$  и постоянной  $k$ , найдем в соответствии с условием (2.9):

$$k \approx 1,87 \quad \sigma \approx 0,24$$

Для оценки возможности использования зависимости (2.13) при других значениях параметра  $\mu_\varepsilon$  рассмотрим участок М-К на рис. 2.11 трехзвенного нагружения (образец 4-101), при котором реализуется переход от состояния чистого сдвига к состоянию осевого растяжения ( $\mu_\sigma \in [0,1]$ ) при постоянном значении  $\tau_m = \sigma_z/2$ .



*Рис. 2.11. Диаграмма трехзвенного нагружения.*

Наименьшее среднеквадратичное отклонение величин  $A(\mu_\epsilon)$  от соответствующих экспериментальных значений, определяемое по методу наименьших квадратов, будет получено при значениях:  $k \approx 2.6$ ,  $\sigma \approx 1/3$ .



Результаты расчетов и сравнения с экспериментальными данными приведены в таблице 2.4. Соответствующий график изменения  $A$  приведен на рис. 2.12. Как видно, наибольшие отклонения находятся в пределах 1,63%.

Таблица 2.4

№	$\tau_m/9.8$	$\Gamma_1$	$\Gamma_2$	$\Gamma_3$	$\Gamma_m$	$\Gamma_m$	$\mu_\epsilon$	$\Psi_{\text{эксп}}$	$A_{\text{эксп}}$	$A_{\text{расч}}$	$\Delta$
		%	%	%	%	%		МПа/9.8			%
							0,000		16,27	15,11	7,16
17	32	0,977	-0,099	-0,878	0,928	0,0093	-0,159	393,5	14,86	14,78	0,57
18	32	0,986	-0,111	-0,875	0,931	0,0093	-0,178	390,0	14,76	14,70	0,44
19	32	1,007	-0,125	-0,882	0,945	0,0094	-0,198	382,2	14,62	14,61	0,08
20	32	1,025	-0,139	-0,886	0,956	0,0096	-0,217	376,1	14,50	14,52	-0,08
21	32	1,055	-0,161	-0,894	0,975	0,0097	-0,247	366,7	14,34	14,36	-0,20
22	32	1,091	-0,184	-0,907	0,999	0,0100	-0,276	356,1	14,17	14,21	-0,31
23	32	1,139	-0,211	-0,928	1,034	0,0103	-0,306	343,1	13,98	14,04	-0,49
24	32	1,187	-0,241	-0,946	1,067	0,0107	-0,338	331,6	13,81	13,86	-0,35
25	32	1,248	-0,278	-0,970	1,109	0,0111	-0,375	318,5	13,63	13,65	-0,14
26	32	1,314	-0,317	-0,997	1,156	0,0116	-0,411	305,7	13,46	13,46	0,07
27	32	1,410	-0,372	-1,038	1,224	0,0122	-0,455	289,0	13,26	13,22	0,23
28	32	1,514	-0,435	-1,079	1,297	0,0130	-0,503	273,8	13,07	13,00	0,57
29	32	1,599	-0,483	-1,116	1,358	0,0136	-0,533	262,3	12,93	12,87	0,51
30	32	1,708	-0,566	-1,142	1,425	0,0143	-0,595	251,8	12,84	12,63	1,66
31	32	1,835	-0,648	-1,187	1,511	0,0151	-0,643	239,2	12,71	12,48	1,80
32	32	1,977	-0,745	-1,232	1,605	0,0160	-0,696	227,4	12,60	12,35	1,99
33	32	2,139	-0,844	-1,295	1,717	0,0172	-0,737	214,1	12,45	12,27	1,40
							-1,000		12	12,03	-0,29

Таким образом, с погрешностью в пределах 1% мы будем считать, что

$$A_p=12; \sigma \approx 1/3; k \approx 2,6.$$

При этом материальную функцию, входящую в выражение для сопротивления сдвига (...) можно определить по формуле

$$\Psi = \left[ A_p + k \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\mu_\epsilon^2}{2\sigma^2}} \right] \cdot \Gamma_m^{-0.7} \quad (2.14)$$

Таким образом, аппроксимация материальной функции  $\Psi$  через величины пластических деформаций позволяет повысить точность ее определения в несколько раз.

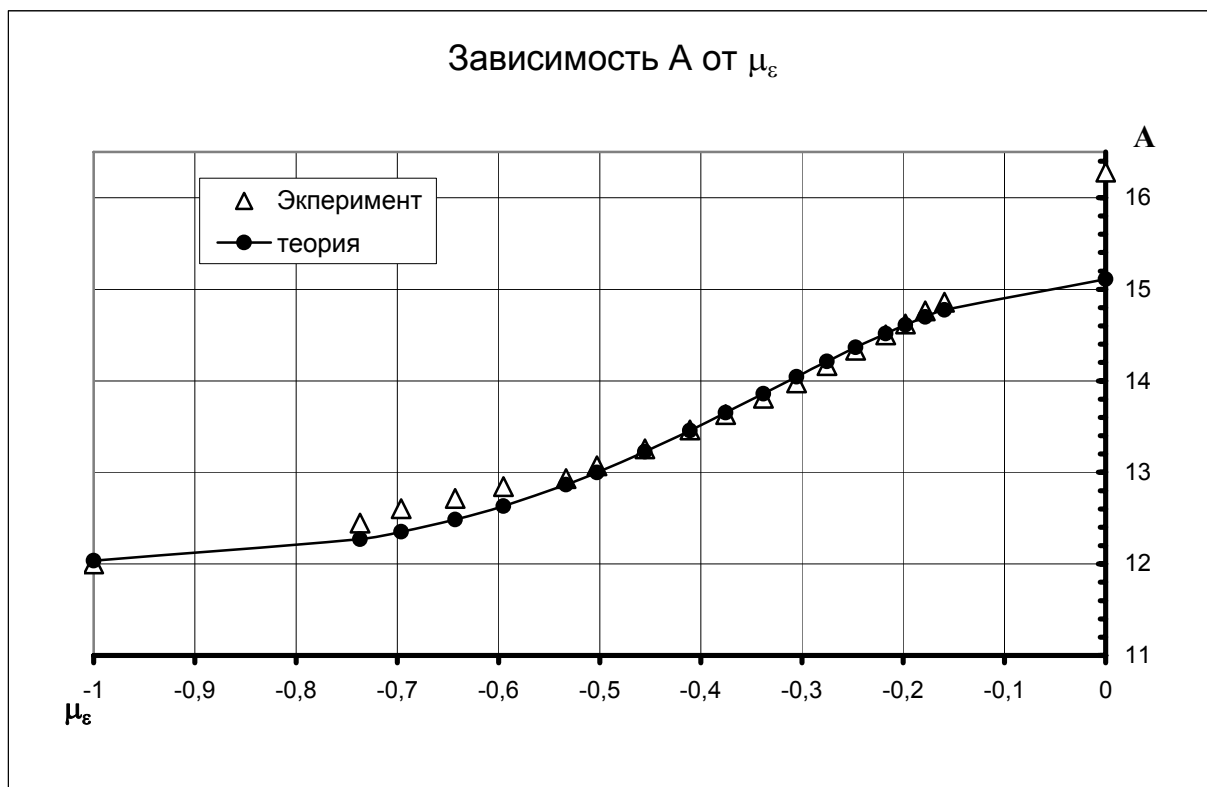


Рис. 2.12. Характер изменения  $A$  в зависимости от вида напряженного состояния

## 2.2. Построение кинематической характеристики скольжений.

В деформационных соотношениях полученных в рамках данной модели для простых видов нагружения, когда вид деформированного состояния не меняется, “параметр”  $\Phi$  не входит в эти соотношения. При изменении же вида деформированного состояния в такие уравнения  $\Phi$  входит явным образом [5]. Поскольку вид деформированного состояния непосредственно зависит от кинематики вееров скольжений, то можно сделать вывод о том, что в общем случае  $\Phi$  будет зависеть от кинематики вееров скольжений.

В работе [4] была выдвинута гипотеза о том, что при переходе напряженного состояния от чистого сдвига к осевому растяжению полное множество плоскостей скольжений определяется максимальным сечением двух эллипсоидов (рис.2.13.) и что одна их полуось (направленная вдоль оси  $\beta$ ) будет монотонно расти (рис.2.13 а). В какой-то момент эти сечения (“эллипсы”) постепенно смыкаются, а затем в пределе (идеального случая) переходят в одну прямоугольную область (очерченную, на рис.2.13.а,б пунктирной линией).

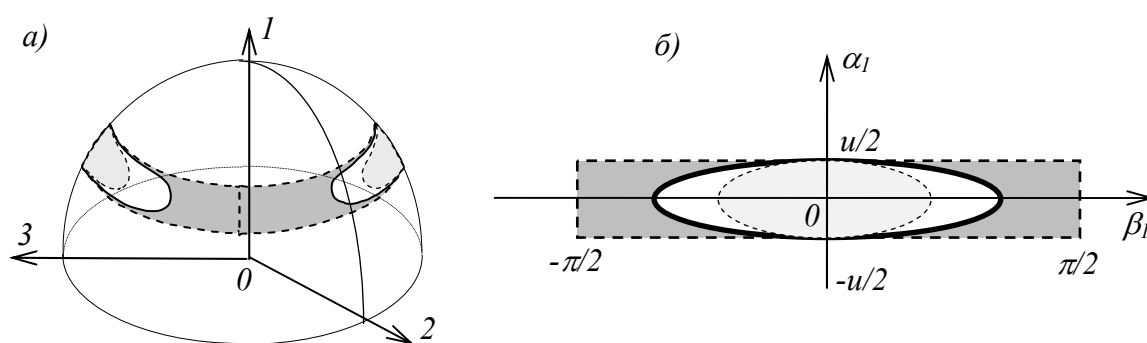


Рис.2.13 Множество плоскостей скольжений очерчен сплошной линией.  
(Пунктирные линии - границы множеств плоскостей скольжений для чистого сдвига и растяжения-сжатия).

В работах [7] и [8] использованием асимптотического разложения для  $\varphi_{nl}$ , установлены границы и характер развития области скольжений. На границе вееров скольжений интенсивность обращается в нуль; из этого условия (после асимптотического разложения с точностью до величин порядка  $u^4$ ) для границы вееров скольжений получено [3] уравнение:

$$\frac{4\alpha^2}{u^2} + \frac{2(1-Q)Q\sin^2\beta}{u^2} = 1, \quad (2.15)$$

$$|\alpha| \leq \frac{u}{2}, \quad |\beta| \leq \beta_0, \quad \text{где } \beta_0 = \arcsin \frac{u}{\sqrt{2Q(1-Q)}}$$

Это уравнение, подобное уравнению для эллипса, определяется двумя параметрами  $(u, \beta_0)$ . В соответствии с этим можно считать, что характеристика  $\Phi$  также зависит от двух параметров, связанных с кинематикой развития вееров скольжений.

Уровень развития “вертикальной” полуоси эллипса ( $u$ ) определяется уровнем нагружения  $\tau_m$  и уровнем деформирования  $\Gamma_m$ , а уровень развития второй полуоси эллипса  $\beta_0$  при  $\beta_0 \leq \frac{\pi}{2}$ , мы связываем с величиной

параметра  $p = \frac{1}{2\sin^2\beta_0}$ , входящего в уравнения связи деформация  $\sim$

напряжение. В том же случае, когда  $\beta_0 = \frac{\pi}{2}$ , веер скольжений уже будет отличаться от эллипса, однако его развитие также связано с параметром  $p$  (рис.2.14). В связи с этим кинематическими характеристиками веера скольжений можно считать параметры  $u$  и  $p$ .

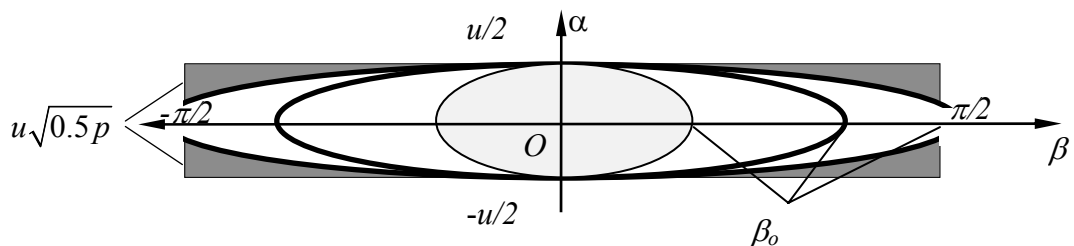


Рис. 2.14. Характер развития вееров скольжений



**2.2.1. Определяющие факторы характеристики  $\Phi$ .** Для выявления связи деформированного состояния ( $\Gamma_m, \mu_\epsilon$ ) с указанными характеристиками веера скольжений, были проведены расчеты и анализ значений этих характеристик, с использованием полученных [5] уравнений связи и данных экспериментов, проведенных В.М.Жигалкиным на различные виды нагружения (одноосное растяжение, чистый сдвиг и переход от состояния чистого сдвига к одноосному растяжению). Согласно зависимостям деформация  $\sim$  нагрузка [5] отношение  $\Gamma_{23}/\Gamma_{13}$  определяется только значениями напряжений и “параметра”  $Q$ , который в свою очередь определяется определенной зависимостью от  $\Phi$  и отношением:

$$\frac{\Gamma_{23}}{\Gamma_{13}} = \frac{\Gamma_2 - \Gamma_3}{\Gamma_1 - \Gamma_3}. \quad (2.16)$$

Расписав эти зависимости, получаем уравнение относительно  $\Gamma_{23}/\Gamma_{13}$ , в которое в качестве параметра входит  $\Phi$ .

Данное уравнение позволяет подобрать значения ( $\Phi, p, Q$ ) так, чтобы найденные по экспериментам значения  $\Gamma_{23}/\Gamma_{13}$  (при известных значениях деформаций и напряжений) оказались его корнями. Полные данные результатов проведенных расчетов представлены [12] в виде диаграммы зависимости  $\Phi \sim p$  на рис.3, а также в приведенной ниже таблице 2.5.

Таблица 2.5.

Номинальное растяжение							
$\tau_m/9,81$	$\Gamma_1^{\text{экс}}$	$\Gamma_2^{\text{экс}}$	$\Gamma_3^{\text{экс}}$	$\Gamma_{23}/\Gamma_{13}^{\text{экс}}$	$p$	$\Phi/\tau_m$	$\Phi/9,81$
МПа	%	%	%				МПа
16	0,005	-0,001	-0,004	0,333	0,389	0,86	13,80
17	0,012	-0,002	-0,010	0,364	0,428	1,02	17,31
18	0,025	-0,004	-0,021	0,370	0,434	1,14	20,48
19	0,043	-0,008	-0,036	0,354	0,409	1,21	22,91
20	0,087	-0,024	-0,063	0,260	0,292	1,18	23,56
21	0,172	-0,062	-0,109	0,167	0,190	1,19	25,05
21,70	0,177	-0,027	-0,150	0,376	0,436	1,47	31,99
22,81	0,287	-0,067	-0,220	0,302	0,337	1,40	32,00
23,92	0,431	-0,122	-0,310	0,254	0,282	1,41	33,69
25,02	0,596	-0,190	-0,406	0,216	0,240	1,43	35,72
26,13	0,776	-0,273	-0,503	0,180	0,201	1,45	37,87

27,24	0,995	-0,376	-0,619	0,151	0,169	1,47	40,15
28,35	1,200	-0,477	-0,723	0,128	0,145	1,50	42,54
29,46	1,444	-0,605	-0,839	0,102	0,117	1,52	44,88
30,57	1,694	-0,741	-0,953	0,080	0,092	1,55	47,28
31,68	1,964	-0,894	-1,070	0,058	0,067	1,57	49,70
32,77	2,278	-1,079	-1,199	0,035	0,040	1,59	52,09
33,90	2,643	-1,319	-1,324	0,001	0,002	1,61	54,57
35,00	3,823	-1,525	-2,297	0,126	0,142	1,67	58,50
36,11	4,307	-1,839	-2,468	0,093	0,105	1,68	60,56
36,67	4,647	-2,004	-2,643	0,088	0,100	1,69	61,79
37,22	4,937	-2,146	-2,791	0,083	0,095	1,69	63,04
37,77	5,362	-2,334	-3,028	0,083	0,094	1,70	64,33
38,33	6,451	-2,549	-3,902	0,131	0,146	1,74	66,61
38,89	6,876	-2,861	-4,016	0,106	0,120	1,73	67,39
39,44	8,256	-3,379	-4,877	0,114	0,128	1,75	68,88
39,99	9,676	-4,477	-5,199	0,049	0,056	1,73	69,06

**Одноосное растяжение, образец 4-028**

$\tau_m/9,81$	$\Gamma_1^{\text{ЭКС}}$	$\Gamma_2^{\text{ЭКС}}$	$\Gamma_3^{\text{ЭКС}}$	$\Gamma_{23}/\Gamma_{13}^{\text{ЭКС}}$	$\rho$	$\Phi/\tau_m$	$\Phi/9,81$
МПа	%	%	%				МПа
21	0,035	-0,010	-0,025	0,257	0,288	1,24	26,11
22	0,054	-0,024	-0,030	0,065	0,077	1,22	26,83
23	0,092	-0,059	-0,033	0,171	0,193	1,30	29,98
24	0,156	-0,110	-0,046	0,244	0,270	1,40	33,66
25	0,245	-0,171	-0,074	0,233	0,259	1,44	36,01
26	0,361	-0,242	-0,119	0,203	0,225	1,46	37,91
27	0,500	-0,325	-0,175	0,182	0,203	1,48	40,02
28	0,654	-0,412	-0,242	0,159	0,178	1,50	42,07
29	0,823	-0,501	-0,322	0,136	0,153	1,52	44,12
30	1,022	-0,606	-0,416	0,116	0,132	1,54	46,24
31	1,207	-0,698	-0,509	0,100	0,113	1,56	48,38
32	1,428	-0,803	-0,625	0,080	0,091	1,58	50,47
33	1,654	-0,905	-0,749	0,061	0,070	1,59	52,55
34	1,893	-1,009	-0,884	0,043	0,050	1,61	54,58
35	2,169	-1,123	-1,046	0,023	0,027	1,61	56,31
36	2,474	-1,234	-1,240	0,002	0,001	1,24	44,63
37	3,073	-1,373	-1,700	0,069	0,078	1,68	62,02
38	3,980	-1,588	-2,392	0,126	0,141	1,73	65,56

**Чистый сдвиг, образец 4-115**

$\tau_m/9,81$	$\Gamma_1^{\text{ЭКС}}$	$\Gamma_2^{\text{ЭКС}}$	$\Gamma_3^{\text{ЭКС}}$	$\Gamma_{23}/\Gamma_{13}^{\text{ЭКС}}$	$\rho$	$\Phi/\tau_m$	$\Phi/9,81$
МПа	%	%	%				МПа
29	0,26	-0,003	-0,26	0,491	0,115	4,39	127,43
30	0,35	-0,007	-0,34	0,485	0,144	3,40	101,95
31	0,48	-0,009	-0,47	0,485	0,145	3,46	107,13
32	0,59	-0,012	-0,58	0,485	0,147	3,46	110,85
33	0,72	-0,015	-0,70	0,484	0,151	3,41	112,60
34	0,86	-0,017	-0,84	0,485	0,146	3,65	123,95
35	1,01	-0,021	-0,99	0,484	0,148	3,64	127,24

35,5	1,08	-0,017	-1,07	0,488	0,132	4,21	149,52
36	1,16	-0,020	-1,14	0,487	0,137	4,05	145,83
36,5	1,24	-0,021	-1,22	0,487	0,135	4,16	151,80
37	1,33	-0,024	-1,31	0,486	0,139	4,06	150,14
37,5	1,41	-0,027	-1,39	0,486	0,142	3,97	148,69
38	1,50	-0,027	-1,48	0,486	0,140	4,07	154,59
38,5	1,61	-0,028	-1,58	0,487	0,138	4,19	161,23
39	1,72	-0,029	-1,69	0,487	0,135	4,31	168,02
39,5	1,81	-0,033	-1,77	0,486	0,140	4,16	164,24
40	1,90	-0,034	-1,87	0,487	0,138	4,25	169,97
40,5	2,04	-0,034	-2,00	0,487	0,135	4,39	177,60
41	2,16	-0,037	-2,13	0,487	0,136	4,37	178,98
41,5	2,29	-0,038	-2,25	0,487	0,134	4,47	185,58
42	2,47	-0,039	-2,43	0,488	0,131	4,64	194,74
42,5	2,66	-0,040	-2,62	0,489	0,128	4,80	204,13

**Чистый сдвиг, образец 4-106**

$\tau_m/9,81$	$\Gamma_1^{\text{ЭК}}$	$\Gamma_2^{\text{ЭК}}$	$\Gamma_3^{\text{ЭК}}$	$\Gamma_{23}/\Gamma_{13}^{\text{ЭК}}$	$\rho$	$\Phi/\tau_m$	$\Phi/9,81$
МПа	%	%	%				МПа
23	0,097	-0,013	-0,083	0,388	0,525	1,23	28,18
24	0,184	-0,016	-0,167	0,430	0,571	1,49	35,80
25	0,263	-0,018	-0,244	0,446	0,609	1,74	43,54
26	0,373	-0,020	-0,352	0,458	0,657	2,04	53,13
27	0,486	-0,022	-0,464	0,465	0,696	2,31	62,25
28	0,626	-0,025	-0,601	0,469	0,721	2,51	70,28
29	0,756	-0,029	-0,727	0,471	0,723	2,59	75,25
30	0,896	-0,032	-0,864	0,473	0,739	2,75	82,49
31	1,042	-0,036	-1,006	0,474	0,743	2,84	88,00
32	1,242	-0,040	-1,202	0,476	0,759	2,99	95,76
33	1,459	-0,045	-1,414	0,477	0,768	3,10	102,27
34	1,681	-0,049	-1,633	0,478	0,783	3,24	110,26
35	1,991	-0,053	-1,939	0,480	0,811	3,45	120,92
36	2,654	-0,060	-2,595	0,483	0,865	3,81	137,13

**Чистый сдвиг, образец 4-122**

$\tau_m/9,81$	$\Gamma_1^{\text{ЭК}}$	$\Gamma_2^{\text{ЭК}}$	$\Gamma_3^{\text{ЭК}}$	$\Gamma_{23}/\Gamma_{13}^{\text{ЭК}}$	$\rho$	$\Phi/\tau_m$	$\Phi/9,81$
МПа	%	%	%				МПа
25	0,453	-0,016	-0,436	0,472	0,654	1,93	48,36
26	0,583	-0,017	-0,565	0,477	0,714	2,30	59,77
27	0,726	-0,021	-0,705	0,478	0,719	2,41	65,17
28	0,906	-0,023	-0,883	0,481	0,764	2,71	76,00
29	1,066	-0,025	-1,041	0,482	0,793	2,94	85,30
30	1,236	-0,028	-1,208	0,483	0,807	3,09	92,72
31	1,436	-0,030	-1,406	0,484	0,838	3,33	103,15
32	1,726	-0,034	-1,692	0,485	0,861	3,53	112,80
33	2,016	-0,046	-1,970	0,483	0,806	3,30	109,00
34	2,354	-0,049	-2,306	0,484	0,841	3,55	120,87

**Переход от чистого сдвига к растяжению, образец 4-101**



$\tau_m/9,81$	$\Gamma_1^{\text{экс}}$	$\Gamma_2^{\text{экс}}$	$\Gamma_3^{\text{экс}}$	$\Gamma_{23}/\Gamma_{13}^{\text{экс}}$	$\rho$	$\Phi/\tau_m$	$\Phi/9,81$
МПа	%	%	%				МПа
32	0,644	-0,078	-0,566	0,403	0,406	1,08	32,34
32	0,793	-0,084	-0,709	0,416	0,429	1,23	38,21
32	0,977	-0,099	-0,878	0,420	0,438	1,32	42,12
32	0,986	-0,111	-0,875	0,411	0,425	1,27	40,63
32	1,007	-0,125	-0,882	0,401	0,413	1,23	39,41
32	1,025	-0,139	-0,886	0,391	0,402	1,20	38,54
32	1,055	-0,161	-0,894	0,376	0,385	1,15	36,88
32	1,091	-0,184	-0,907	0,362	0,369	1,12	35,83
32	1,139	-0,211	-0,928	0,347	0,353	1,10	35,06
32	1,187	-0,241	-0,946	0,331	0,337	1,08	34,48
32	1,248	-0,278	-0,970	0,312	0,318	1,06	33,99
32	1,314	-0,317	-0,997	0,295	0,301	1,07	34,11
32	1,410	-0,372	-1,038	0,272	0,280	1,06	34,08
32	1,514	-0,435	-1,079	0,249	0,257	1,08	34,45
32	1,599	-0,483	-1,116	0,233	0,244	1,14	36,61
32	1,708	-0,566	-1,142	0,202	0,214	1,17	37,57

**Переход от чистого сдвига к растяжению, образец 4-140**

$\tau_m/9,81$	$\Gamma_1^{\text{экс}}$	$\Gamma_2^{\text{экс}}$	$\Gamma_3^{\text{экс}}$	$\Gamma_{23}/\Gamma_{13}^{\text{экс}}$	$\rho$	$\Phi/\tau_m$	$\Phi/9,81$
МПа	%	%	%				МПа
29	0,575	-0,063	-0,513	0,413	0,456	1,28	37,07
29	0,700	-0,067	-0,633	0,425	0,436	1,20	34,75
29	0,824	-0,074	-0,750	0,430	0,424	1,16	33,72
29	0,864	-0,091	-0,773	0,417	0,405	1,10	32,04
29	0,887	-0,104	-0,783	0,407	0,387	1,06	30,80
29	0,914	-0,123	-0,791	0,392	0,372	1,04	30,26
29	0,940	-0,143	-0,797	0,377	0,356	1,03	29,86
29	0,970	-0,163	-0,807	0,362	0,337	1,02	29,52
29	1,008	-0,187	-0,821	0,347	0,319	1,02	29,63
29	1,056	-0,217	-0,839	0,328	0,299	1,03	30,00
29	1,109	-0,250	-0,859	0,310	0,279	1,07	30,90
29	1,170	-0,289	-0,881	0,289	0,257	1,11	32,23
29	1,240	-0,333	-0,907	0,267	0,234	1,18	34,24
29	1,341	-0,391	-0,950	0,244	0,210	1,28	37,18
29	1,434	-0,452	-0,982	0,219	0,185	1,43	41,52
29	1,547	-0,525	-1,022	0,194	0,171	1,53	44,40

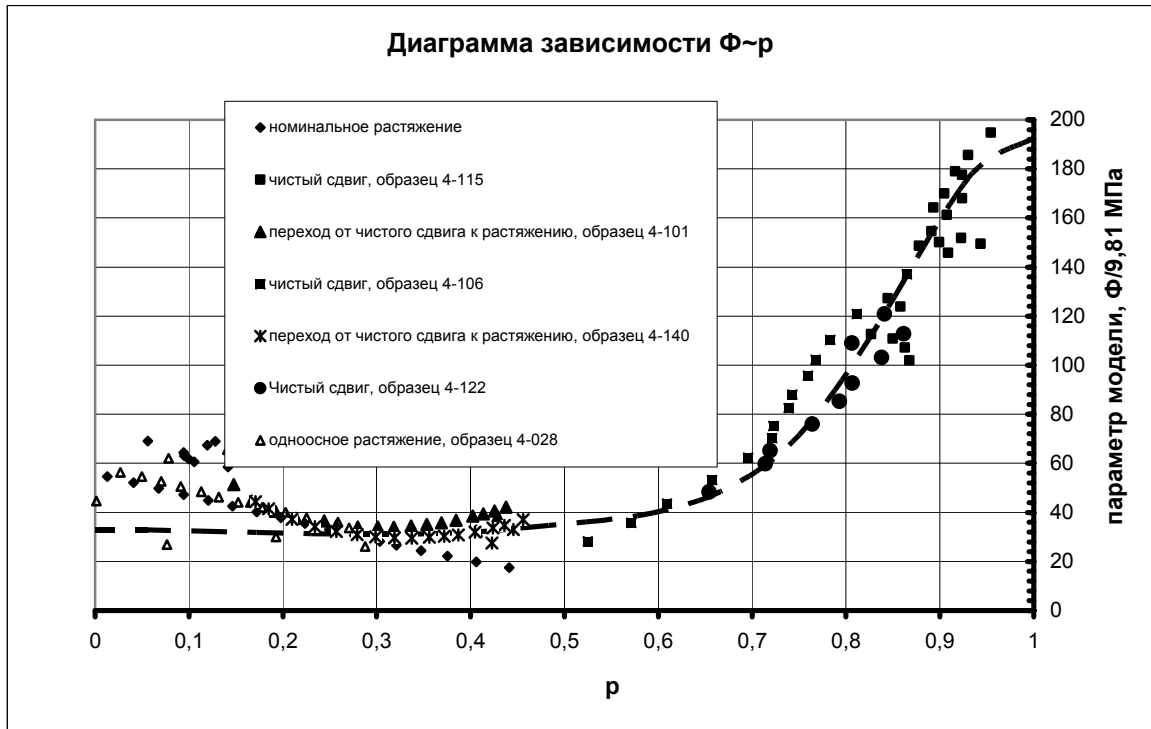


Рис. 2.15. Зависимость  $\Phi \sim p$ .

Как видно из приведенного рисунка, участок значительного изменения значений  $\Phi$  ( $0,5 \leq p \leq 1$ ) соответствует деформированному состоянию “близкого” к сдвигу<sup>2</sup>. Этому участку соответствует значительный рост второй “полуоси” веера плоскостей скольжений ( $\beta_0$ ). В соответствии с этим главным аргументом функции  $\Phi$ , определяющим характер его изменения, целесообразно считать величину  $p$  и тогда данную диаграмму можно количественно описать соотношением вида:

$$\Phi = \Phi_p \left( 1 + \frac{k_\phi}{\sigma_\phi \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(1-p)^2}{2\sigma_\phi^2}} \right) \quad (6)$$

Выражение в скобках здесь является монотонно убывающей (при уменьшении значений  $p$ ) и отвечающей за изменение  $\Phi$  на указанном участке (на рис.3 и 7 кривая соответствующая этому выражению показана пунктирной линией). При этом на множитель  $\Phi_p$  можно возложить

<sup>2</sup> “Близкого” в том смысле, что даже при нагружении чистого сдвига наблюдается появление и рост значений средней компоненты деформации сдвига [8].

ответственность за увеличение параметра  $\Phi$  на участке диаграммы при  $0 \leq p < 0,5$ .

Нами предполагалось, что этот множитель является функцией от уровня деформирования ( $\Gamma_m$ ) либо от величины вертикальной полуоси эллипса ( $u$ ) и произведен соответствующий анализ. Оказалось, что при изменении вида деформирования от чистого сдвига к осевому растяжению при ( $\tau_m = const$ ) вертикальная полуось эллипса  $u$  является постоянной величиной, тогда как для значений  $\Phi_p$  мы наблюдаем изменение в пределах 30-50%. Исходя из этого, можно считать, что параметр ( $u$ ) не является определяющим для значений  $\Phi_p$ . Далее, из диаграммы  $\Phi_p \sim \Gamma_m$  для ряда нагружений приведенной на рис.2.16. видно что, в случае чистого сдвига значение  $\Phi_p$  остается практически постоянным, хотя значения  $\Gamma_m$  монотонно растут. Кроме того, согласно экспериментам на участке  $0,25 \leq p \leq 0,46$  (при переходе от сдвига к растяжению) значения  $\Gamma_m$  растут значительно, тогда как изменение значений  $\Phi$  относительно мало. Исходя из данных фактов можно сделать вывод о том, что  $\Phi_p$  не зависит от уровня деформирования  $\Gamma_m$  (по крайней мере его влияние не существенно).

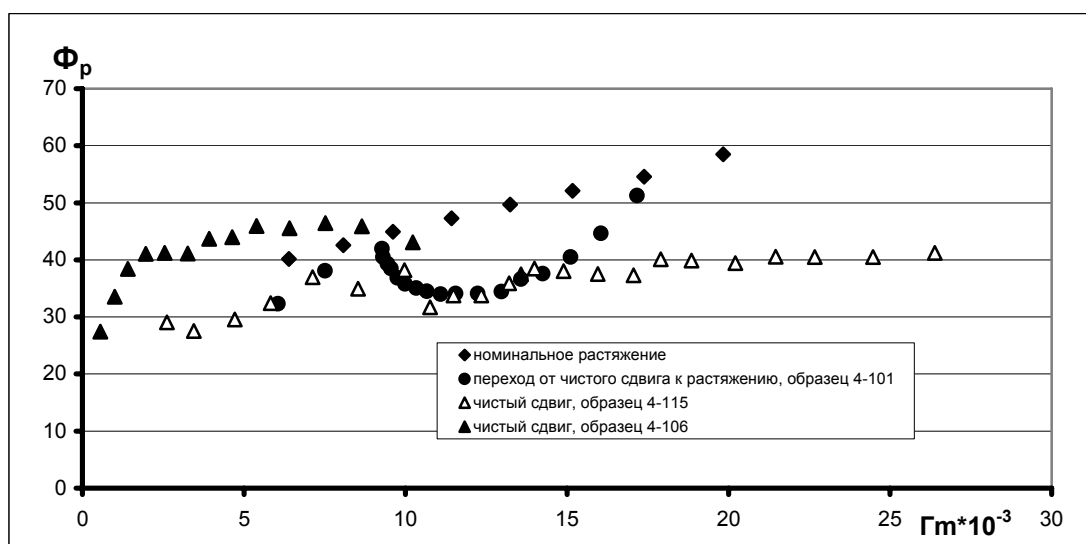


Рис. 2.16. Диаграмма  $\Phi_p \sim \Gamma_m$ .

На указанном участке (при изменении вида деформирования от состояния чистого сдвига к осевому растяжению) возрастает величина поперечной деформации и соответственно изменяется вид деформированного состояния, определяемый параметром Лоде-Надаи  $\mu_\varepsilon$ . В связи с этим нами считается принятым целесообразным связать рост  $\Phi_p$  с изменением (безразмерного) параметра  $\mu_\varepsilon$ .

Изменение  $\Phi$  на участке  $0,5 \leq p \leq 1$  можно удовлетворительно описать выражением внутри скобок в (2.17) при разных наборах значений  $(k_\phi, \sigma_\phi)$ . Различные значения этих наборов при  $p \leq 0,5$  дают относительно слабое, но монотонное изменение  $\Phi$ . Но при  $p < 0,5$  наблюдается значительный рост  $\mu_\varepsilon$ , поэтому можно ожидать соответствующий (почти “пропорциональный”) рост  $\Phi_p$ .

Диаграмма  $\Phi_p \sim \mu_\varepsilon$  построенная с учетом указанных соображений приведена на рис.2.17. Хорошее согласование экспериментальных данных с высказанными соображениями получено при значениях  $k_\phi = 2,7$  и  $\sigma_\phi = 0,16$ :

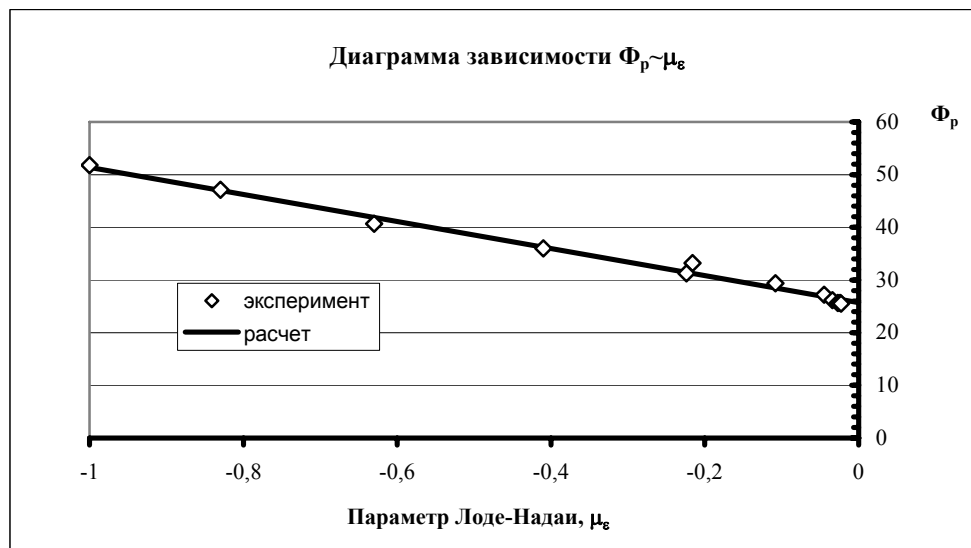


Рис.2.17. Рост  $\Phi_p$  с изменением вида деформирования

Более того, в данном случае оказалось, что диаграмму  $\Phi_p \sim \mu_\varepsilon$  можно аппроксимировать простым выражением:

$$\Phi_p = q(1 - \mu_\varepsilon). \quad (2.18)$$

Если принять при этом  $q=25.7$ , то отличие экспериментальных значений  $\Phi_p$  от рассчитываемых по (2.18) будет находиться в пределах 2%.

Таким образом, кинематическую характеристику модели скольжений  $\Phi$  нами предлагается представить в виде следующей функцией от двух аргументов:

$$\Phi = q(1 - \mu_\varepsilon) \left( 1 + k_\phi \frac{1}{\sigma_\phi \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(1-p)^2}{2\sigma_\phi^2}} \right) \quad (2.19)$$

Для установленных значений  $k_\phi = 2,7$ ;  $\sigma_\phi = 0.16$ ;  $q = 25,7$  эта формула дает для  $\Phi$  значения отличающиеся от экспериментальных значений не более, чем на 10 % при  $p \in [0.8; 1]$  и 5-6 % при  $p \in [0; 0.8]$ .

Кривая  $\Phi \sim p$  построенная по этой формуле (2.19) приведена на рис 2.18.

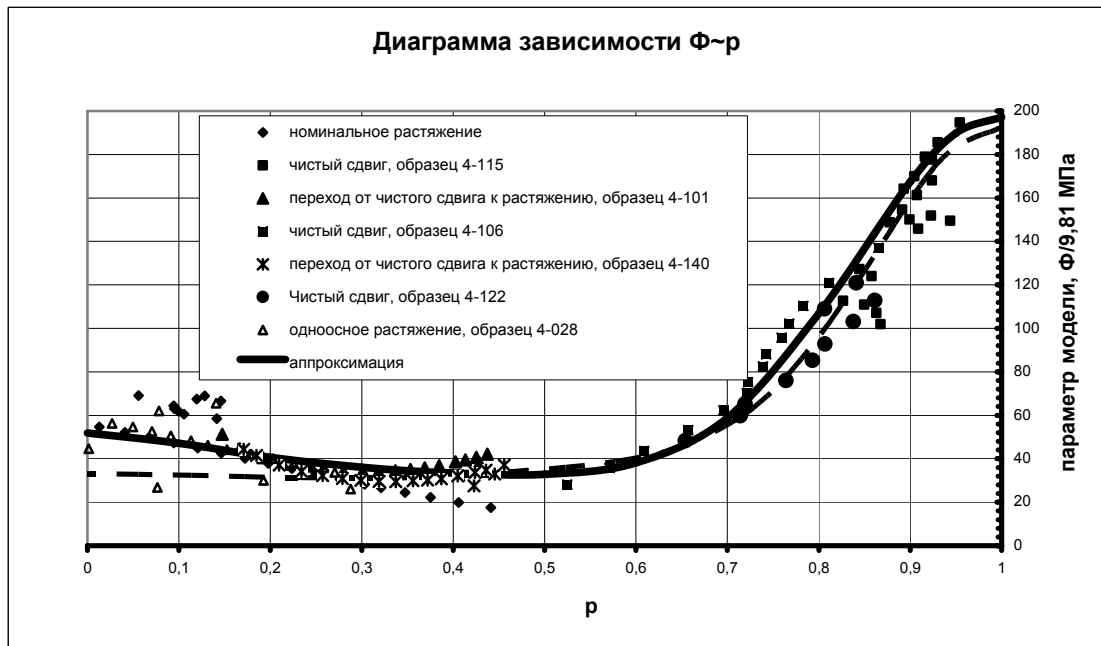


Рис. 2.18. Зависимость функции  $\Phi$  от параметра  $p$ .

**2.2.2. О связи внутренних и внешних деформационных характеристик.** Параметр  $p$  является “внутренним” параметром,

характеризующим кинематику скольжений и возникает вопрос об его количественном определении.

Характер развития вееров скольжений влияет на вид деформированного состояния. Поэтому целесообразно связать эти характеристики функциональной зависимостью, чтобы данный вопрос был решен приемлемым образом.

В результате упомянутых выше расчетов значений  $p$  и значений  $\mu_\varepsilon$  в соответствующих экспериментальных точках (при разных уровнях и видах нагружения) выявлено наличие единой (для всех рассматриваемых образцов и нагружений) зависимости между параметром модели  $p$  и параметром Лоде-Надаи  $\mu_\varepsilon$ :

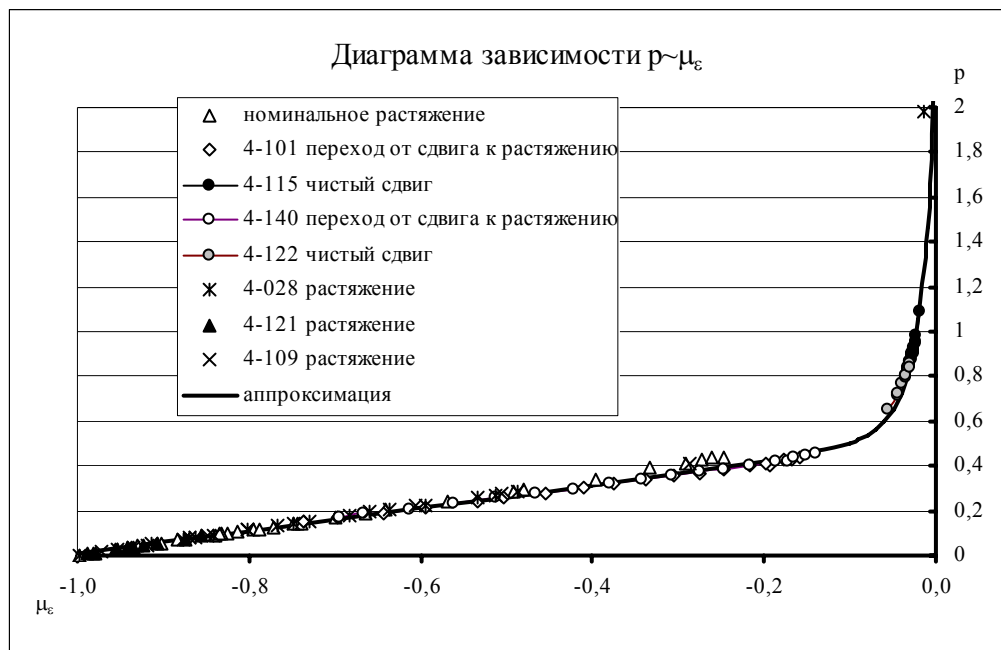


Рис. 2.19. Зависимость  $p \sim \mu_\varepsilon$

С погрешностью в пределах 4% эту диаграмму можно описать уравнением

$$p = a \cdot \mu_\varepsilon + b - \frac{c}{(\mu_\varepsilon - d)^\eta} \quad (2.20)$$

если значения входящих сюда констант считать равными  $a=0.5$ ,  $b=0.51$ ,  $c=0.00012$ ,  $d=0.04$ ,  $\eta=3$ .

Учитывая наличие такой единой диаграммы  $p \sim \mu_\epsilon$  можно считать что определяющим для  $\Phi$  является только параметр  $p$ , вместо которого на практике удобно взять соответствующую величину  $\Gamma_{23}/\Gamma_{13}$  либо  $\mu_\epsilon$ . В таком случае диаграмма  $\Phi \sim \Gamma_{23}/\Gamma_{13}$  для рассмотренных экспериментальных данных имеет следующий вид:

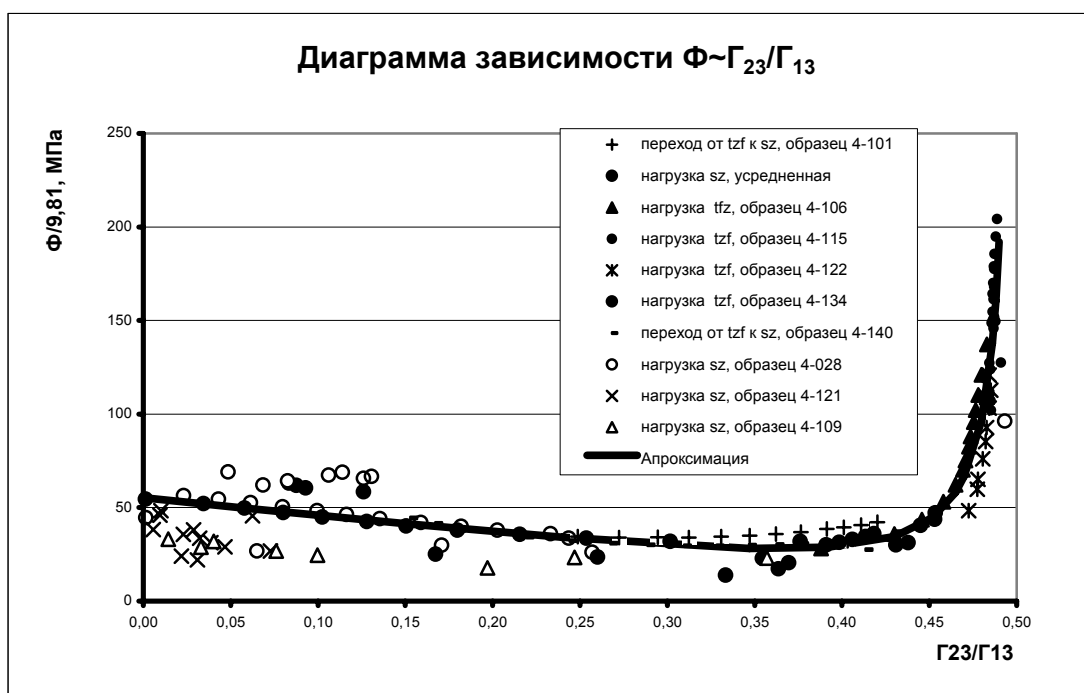


Рис. 2.20. Зависимость функции  $\Phi$  от вида деформирования.

Соответствующую аппроксимацию функцию  $\Phi$  от только одного аргумента ( $\Gamma_{23}/\Gamma_{13}$ ) можно описать с помощью выражения:

$$\Phi = \frac{k_1}{\left(0,5 - \frac{\Gamma_{23}}{\Gamma_{13}}\right)} - \frac{\Gamma_{23}}{\Gamma_{13}} \cdot k_2 + B \quad (2.21)$$

Если принять  $k_1 = 1,91$ ;  $k_2 = 102,9$ ;  $B = 51,45$ , то погрешность значений (2.21), по сравнению с их “экспериментальными” значениями будет также находиться в пределах 10 %. Полученная по этим данным кривая, приведена на рис 2.20. сплошной линией.





## Выводы по главе 2.

1. Зависимость  $\Psi$  от уровня и вида деформированного состояния удалось представить в виде двух функций, одна из которых зависит только от  $\Gamma_m$ , а другая только от вида деформированного состояния ( $\mu_\varepsilon$ ).

2. Установлено, что функциональная зависимость от одного (из двух) аргумента  $\Gamma_m$  является единой для различных видов нагружений. Влияние вида деформирования ( $\mu_\varepsilon$ ) отражается на коэффициенте этой зависимости.

3. Зависимость  $\Psi$  от параметра  $\mu_\varepsilon$  носит случайный характер, который мы описываем нормальным законом распределения. Для рассмотренного материала Ст40Х установлены числовые характеристики распределения и тем самым характеристика его упрочнения  $\Psi \sim \Psi(\Gamma_m, \mu_\varepsilon)$ .

4. Построенная аппроксимация функции упрочнения  $\Psi$  оказалось более точной, чем в случае, когда аргументами этой функции считались компоненты пластических деформаций, а не напряжений.

5. Кинематическая характеристика  $\Phi$  может быть представлена функцией двух аргументов связанных с кинематикой веера плоскостей. Она записана нами в виде произведения (2.19) двух функций: одна из которых зависит от параметра  $p$  и характеризует  $\Phi$  при состояниях близких к сдвигу, а другая от  $\mu_\varepsilon$  и характеризует  $\Phi$  при состояниях близких к одноосному растяжению. При этом для построения функции  $\Phi(\mu_\varepsilon, p)$  достаточно трех констант.

6. Главным аргументом определяющим характер изменения веера плоскостей скольжения и характеристики  $\Phi$  оказался параметр  $p$ . Установлено, что этот “внутренний” параметр непосредственно связан с макропараметром деформирования  $\mu_\varepsilon$ . При этом появляется возможность удовлетворительного описания кинематической характеристики модели скольжений  $\Phi$  только одним параметром  $\mu_\varepsilon$  (либо отношением  $\Gamma_{23}/\Gamma_{13}$ ) функцией вида (2.21).

### ГЛАВА 3

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ОДНОРОДНОЙ МОНОТОННОЙ ДЕФОРМАЦИИ

**3.1. Алгоритм вычисления напряжений.** Определение напряжений, непосредственно по выражениям (1.28) и (1.29), является трудоемкой задачей даже с применением современных вычислительных средств. Для упрощения процедуры вычислений представляется целесообразным установить взаимосвязь параметра кинематики скольжений  $p$  от величин пластических деформаций. Выше установлена нами [13], что связь деформированного состояния  $\mu_\varepsilon$  с “внутренним” параметром модели  $p$  можно описать зависимостью:

$$p = a \cdot \mu_\varepsilon + b - \frac{c}{(\mu_\varepsilon - d)^\eta} \quad (3.1)$$

Если принять здесь  $a=0.5$ ,  $b=0.51$ ,  $c=0.00012$ ,  $d=0.04$ ,  $\eta=3$ , то отличие экспериментальных значений  $p$  от рассчитываемых по (3.1) будет находиться в пределах 4% (п. 2.2.2).

Значения  $Q$  определяется из отношения  $\Gamma_2/\Gamma_1$  в котором при использовании уравнений (1.28) и (1.29) присутствуют величины  $Q$ ,  $\beta_0$  и  $p$ . В общем случае уравнение для  $Q$  полученное таким образом является довольно громоздким. Его можно упростить, рассматривая частные случаи напряженных состояний.

**3.1.1. Напряженные состояния близкие к чистому сдвигу.** Этим состояниям соответствуют [13] значения ( $p > 0,5$ ). Согласно табличным данным экспериментов, проведенных В.И.Жигалкиным, при таком напряженном состоянии наблюдается отклонение от деформированного состояния от состояния чистого сдвига (т.е.  $\mu_\varepsilon \neq 0$ ). Этот факт означает что  $\Gamma_2 \neq 0$  уже на начальной стадии нагружения, что согласуется также с

расчетами деформаций [13] по формулам (1.28) и (1.29). Вследствие такого присутствия в (1.28) и (1.29) пластической деформации  $\Gamma_2$  данные уравнения следует рассматривать совместно. В этом случае параметр  $p$  может быть определен из выражения (3.1).

Значения угла  $\beta_0$  определяются из уравнения (1.30) при найденных по (3.1) значениях  $p$ .

Выражение для максимального касательного напряжения находим из уравнения (1.28):

$$\tau_m = \tau_n + \Gamma_1 4\psi \left[ \frac{2\beta_0 - p(2\beta_0 - \sin 2\beta_0)}{2\beta_0 - 4p \left( \beta_0 - \frac{\sin 2\beta_0}{2} \right) + 4p^2 \left( \frac{3}{4}\beta_0 - \frac{\sin 2\beta_0}{2} + \frac{\sin 4\beta_0}{16} \right)} \right]. \quad (3.2)$$

Вычисленные по этой формуле значения  $\tau_m$  для образца 4-115 приведены на рис. 3.1.

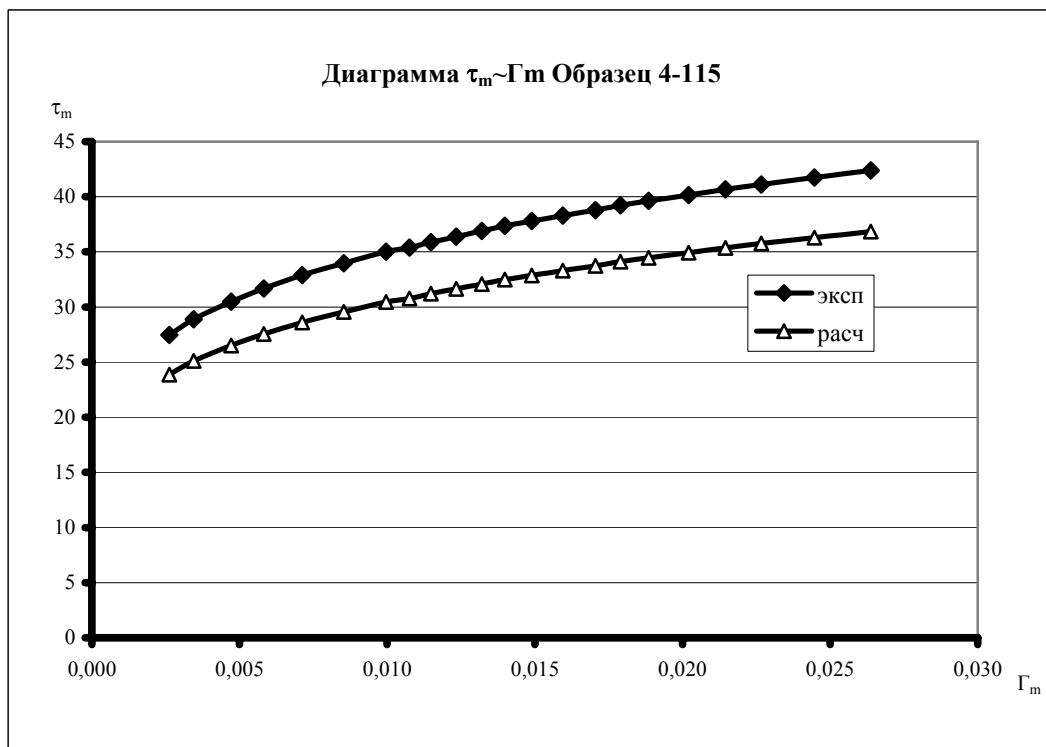


Рис. 3.1. Расчетные напряжения  $\tau_m$  в случае чистого сдвига.

Как видно из диаграммы, расчетный уровень напряжений оказался заниженным. Этот факт мы связываем с тем, что для образца 4-115 предел упругости примерно на 15% выше, чем его значение, определяемое по номинальной диаграмме чистого сдвига. Чтобы исключить влияние этого несоответствия, нами произведен расчет относительных значений  $\tau_m/\tau_n$  (табл.3.1). Получаемая при этом диаграмма  $\tau_m/\tau_n \sim \Gamma_m$  приведена на рис. 3.2.

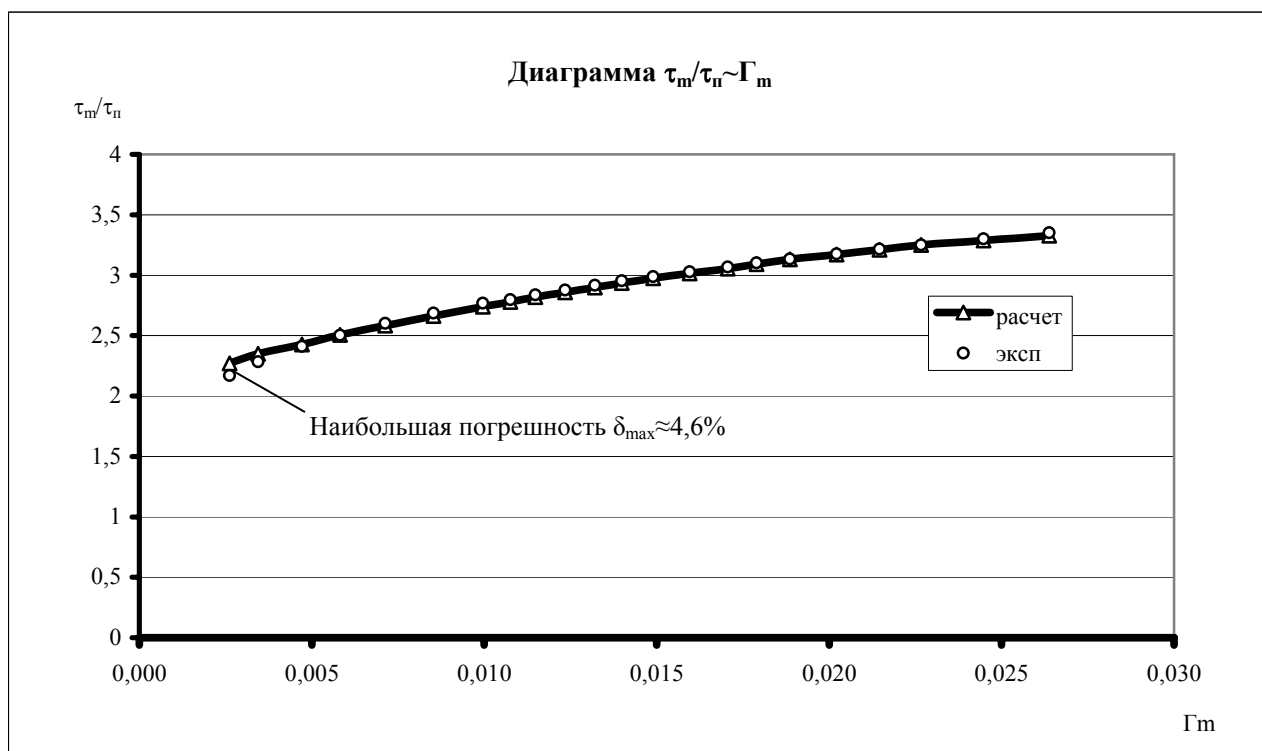


Рис. 3.2. Расчетная и экспериментальная диаграмма напряжений при чистом сдвиге

Максимальные касательные напряжения  $\tau_m$  в рассматриваемых случаях нагружений определяются двумя компонентами тензора напряжений  $\sigma$  и  $\tau$  (п.1.2.1.). Чтобы по заданным пластическим деформациям найти эти напряжения необходимо определить численные значения величины  $Q$ , эти значения определяются из выражения для  $\Gamma_2/\Gamma_1$  и значениям параметров  $\beta_0$ ,  $r$  вычисляемых по заданным деформациям. Уравнение для  $Q$  получается довольно громоздким и сложным; для его решения составлена компьютерная программа в среде MathCAD.

Таким образом, при заданных из экспериментов значений  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  и вычисленным по (1.30), (3.1), (2.14), (2.21) значениям  $p$ ,  $Q$ ,  $\beta_0$ ,  $\Psi$  и  $\Phi$  для определения компонент напряжений  $\tau$  и  $\sigma$  будем иметь следующие расчетные формулы, определяемые из соотношений (1.13) и (1.30):

$$\begin{cases} \tau = Q(\tau_m + \Phi) - \Phi \frac{\Gamma_{23}}{\Gamma_{13}} \\ \sigma = 2 \cdot \tau_m - \tau \end{cases} \quad (3.3)$$

Результаты вычислений для образцов 4-115 и 4-106 указаны на диаграммах рис. 3.3- 3.6., а также в табл. 3.1-3.2

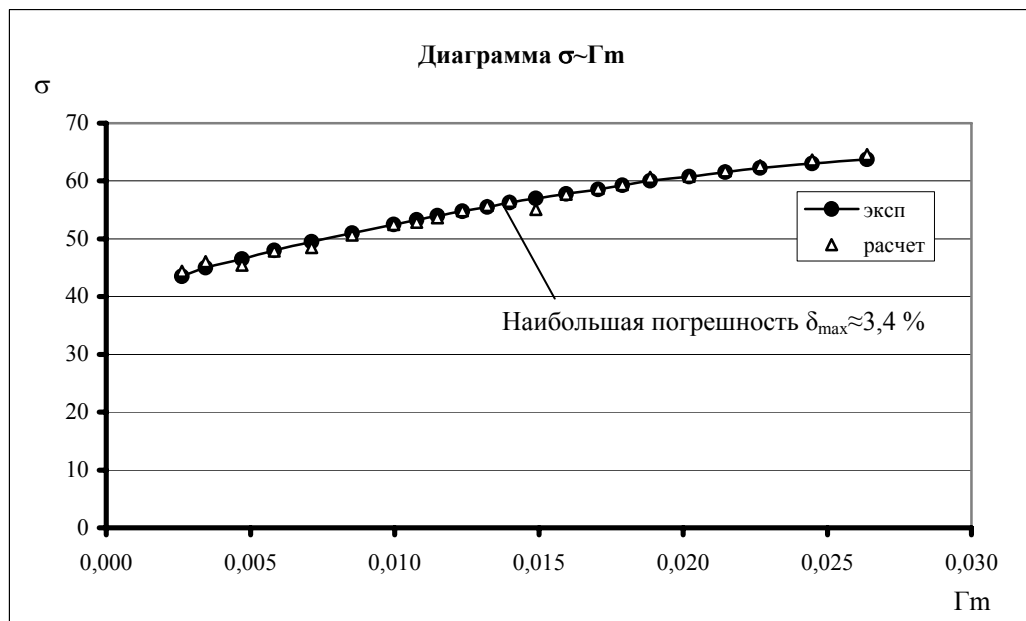


Рис. 3.3. Расчетные напряжения  $\sigma$  в случае чистого сдвига (образец 4-115).

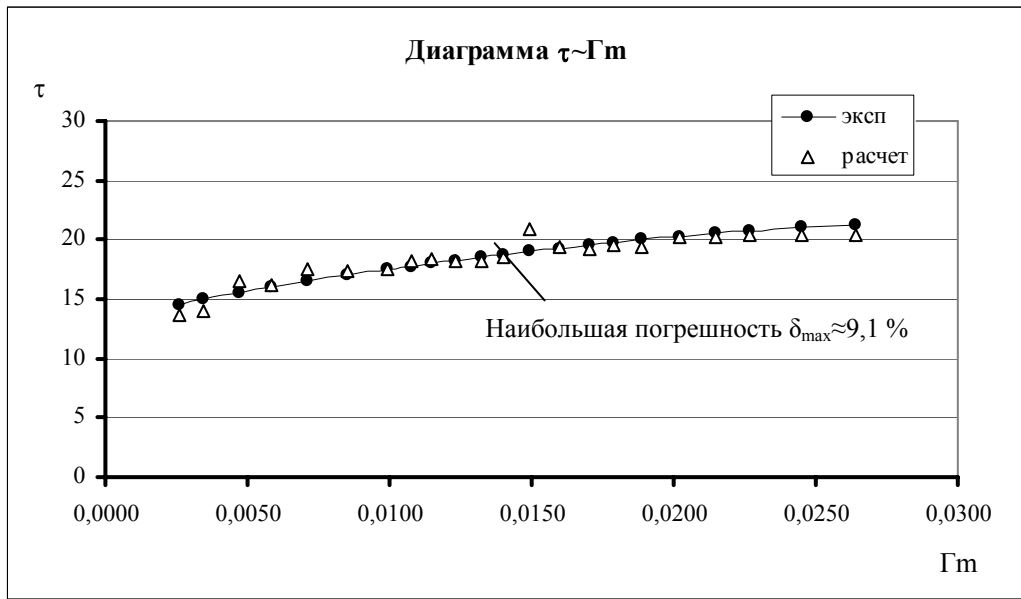


Рис. 3.4. Расчетные напряжения  $\tau$  в случае чистого сдвига (образец 4-115).

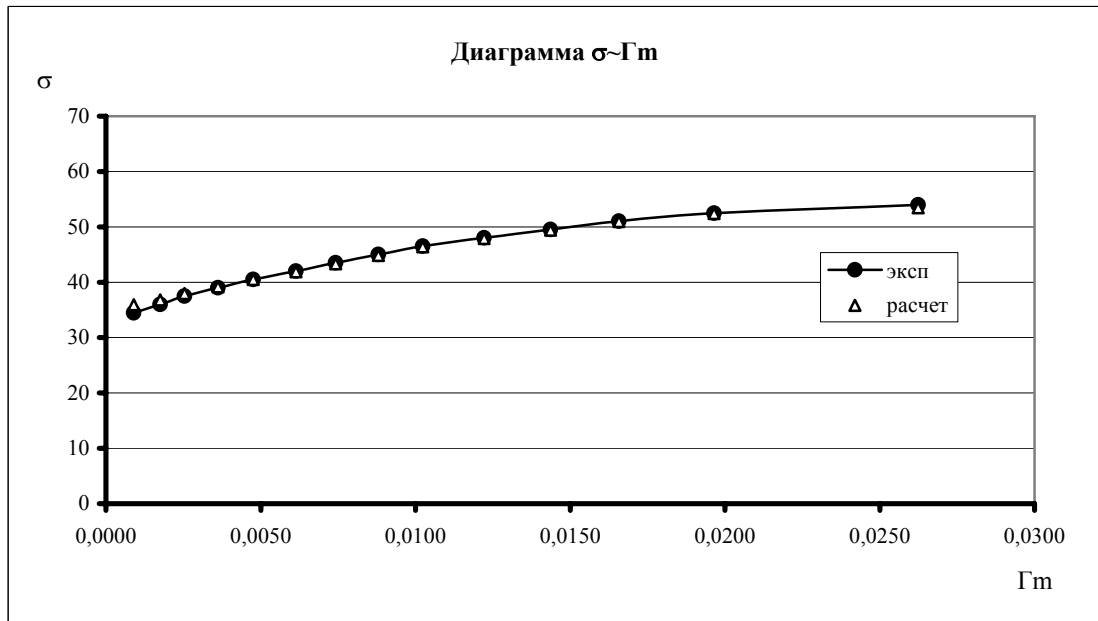
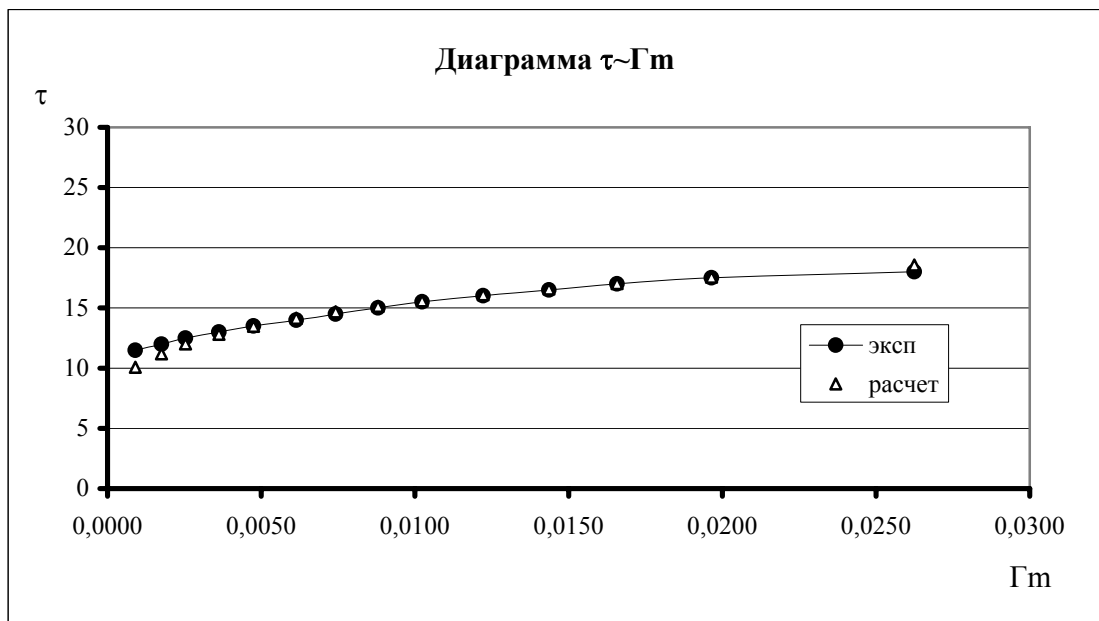


Рис. 3.3. Расчетные напряжения  $\sigma$  в случае чистого сдвига (образец 4-106).



*Рис. 3.4. Расчетные напряжения  $\tau$  в случае чистого сдвига (образец 4-106).*

Табл. 3.1.

## Результаты вычислений напряжений, образец 4-115, чистый сдвиг

№	$\Gamma_1$	$\Gamma_2$	$\Gamma_3$	$\Gamma_{23}/\Gamma_{13}$	$\mu_\epsilon$	$\Gamma_m$	P	$\beta_0$	$\Psi_{расч}$	$\tau_m^{расч}$	$\tau_m^{корр}$	$\tau_m^{расч}$	$\tau_m^{эксп}$	$\tau_m^{эксп}$	$\Delta\tau_m$	Q	$\Phi$	$\tau^{расч}$	$\sigma^{расч}$	$\tau^{эксп}$	$\sigma^{эксп}$	$\Delta\tau$	$\Delta\sigma$
									9.81	9.81	9.81	$\tau_n$	$\tau_n$	9.81			9.81	9.81	9.81	9.81	9.81		
	%	%	%						МПа	МПа	МПа			МПа	%		МПа	МПа	МПа	МПа	МПа	%	%
22	0,26	-0,003	-0,26	0,491	-0,018	0,003	1,12	0,73	961,7	23,8	27,4	2,17	2,27	29,0	-5,6	0,492	155,7	13,5	44,4	14,5	43,5	6,7	-2,0
23	0,35	-0,007	-0,34	0,485	-0,029	0,003	0,85	0,87	793,8	25,1	28,8	2,28	2,35	30,0	-3,8	0,485	141,3	13,9	46,0	15,0	45,0	7,6	-2,3
24	0,48	-0,009	-0,47	0,485	-0,030	0,005	0,85	0,87	637,2	26,5	30,4	2,41	2,43	31,0	-1,6	0,496	137,5	16,5	45,4	15,5	46,5	-6,3	2,3
25	0,59	-0,012	-0,58	0,485	-0,031	0,006	0,83	0,88	549,6	27,5	31,6	2,50	2,51	32,0	-1,0	0,490	127,2	16,1	47,8	16,0	48,0	-0,8	0,2
26	0,72	-0,015	-0,70	0,484	-0,033	0,007	0,80	0,91	477,0	28,6	32,9	2,60	2,58	33,0	-0,3	0,495	110,0	17,5	48,4	16,5	49,5	-5,8	2,1
27	0,86	-0,017	-0,84	0,485	-0,030	0,009	0,84	0,88	420,6	29,5	33,9	2,69	2,66	34,0	-0,0	0,490	133,2	17,3	50,6	17,0	51,0	-1,8	0,6
28	1,01	-0,021	-0,99	0,484	-0,031	0,010	0,82	0,89	377,3	30,4	35,0	2,77	2,74	35,0	0,0	0,488	122,8	17,5	52,4	17,5	52,5	-0,1	0,0
29	1,08	-0,017	-1,07	0,488	-0,024	0,011	0,94	0,81	357,6	30,7	35,4	2,80	2,78	35,5	-0,2	0,492	190,5	18,1	52,8	17,7	53,2	-2,1	0,7
30	1,16	-0,020	-1,14	0,487	-0,026	0,011	0,90	0,84	341,6	31,2	35,8	2,84	2,82	36,0	-0,3	0,491	171,1	18,3	53,6	18,0	54,0	-1,8	0,6
31	1,24	-0,021	-1,22	0,487	-0,026	0,012	0,92	0,83	324,8	31,6	36,3	2,88	2,86	36,5	-0,3	0,489	179,8	18,1	54,8	18,2	54,7	0,6	-0,2
32	1,33	-0,024	-1,31	0,486	-0,027	0,013	0,89	0,84	309,7	32,0	36,9	2,92	2,90	37,0	-0,2	0,488	164,4	18,2	55,7	18,5	55,5	1,3	-0,4
33	1,41	-0,027	-1,39	0,486	-0,029	0,014	0,86	0,86	297,5	32,4	37,3	2,95	2,94	37,5	-0,3	0,488	148,4	18,5	56,4	18,7	56,2	1,2	-0,4
34	1,50	-0,027	-1,48	0,486	-0,028	0,015	0,88	0,85	284,8	32,8	37,8	2,99	2,98	38,0	-0,5	0,499	158,5	20,8	55,1	19,0	57,0	-9,0	3,4
35	1,61	-0,028	-1,58	0,487	-0,027	0,016	0,90	0,84	271,4	33,3	38,3	3,03	3,01	38,5	-0,5	0,490	170,0	19,3	57,6	19,2	57,7	-0,3	0,1
36	1,72	-0,029	-1,69	0,487	-0,026	0,017	0,92	0,83	259,0	33,7	38,8	3,07	3,05	39,0	-0,5	0,489	180,3	19,2	58,7	19,5	58,5	1,0	-0,3
37	1,81	-0,033	-1,77	0,486	-0,028	0,018	0,88	0,85	250,4	34,1	39,2	3,10	3,09	39,5	-0,7	0,489	159,8	19,6	59,3	19,7	59,2	0,6	-0,2
38	1,90	-0,034	-1,87	0,487	-0,027	0,019	0,90	0,84	241,4	34,4	39,6	3,13	3,13	40,0	-0,9	0,487	168,0	19,3	60,6	20,0	60,0	3,3	-1,0
39	2,04	-0,034	-2,00	0,487	-0,026	0,020	0,92	0,83	230,0	34,9	40,1	3,18	3,17	40,5	-0,8	0,490	180,2	20,1	60,8	20,2	60,7	0,3	-0,1
40	2,16	-0,037	-2,13	0,487	-0,026	0,021	0,91	0,83	220,5	35,3	40,6	3,22	3,21	41,0	-0,8	0,489	175,6	20,2	61,7	20,5	61,5	1,2	-0,4
41	2,29	-0,038	-2,25	0,487	-0,025	0,023	0,93	0,82	212,2	35,7	41,1	3,25	3,25	41,5	-0,9	0,489	183,8	20,4	62,6	20,7	62,2	1,7	-0,5
42	2,47	-0,039	-2,43	0,488	-0,024	0,024	0,96	0,81	201,2	36,3	41,7	3,30	3,29	42,0	-0,6	0,488	194,2	20,3	63,6	21,0	63,0	3,2	-1,0
43	2,66	-0,040	-2,62	0,489	-0,023	0,026	0,99	0,79	190,9	36,8	42,3	3,35	3,33	42,5	-0,3	0,488	199,3	20,4	64,5	21,2	63,7	3,8	-1,2



Табл. 3.1.

**Результаты вычислений напряжений, образец 4-106, чистый сдвиг**

№	$\Gamma_1$	$\Gamma_2$	$\Gamma_3$	$\Gamma_{23}/\Gamma_1$ 3	$\mu_\varepsilon$	$\Gamma_m$	P	$\beta_0$	$\Psi_{расч}$	$\tau_m^{расч}$	$\tau_m^{эксп}$	$\Delta\tau_m$	Q	$\Phi$	$\tau^{расч}$	$\sigma^{расч}$	$\tau^{эксп}$	$\sigma^{эксп}$	$\Delta\tau$	$\Delta\sigma$
									9.81	9.81	9.81			9.81	9.81	9.81	9.81	9.81		
	%	%	%						МПа	МПа	МПа	%		МПа	МПа	МПа	МПа	МПа	%	%
6	0,10	-0,013	-0,08	0,388	-0,224	0,0009	1,249	0,68	1947,0	20,57	23	-11,8	0,409	80,1	10,07	35,93	11,5	34,5	14,19	-3,98
7	0,18	-0,016	-0,17	0,430	-0,140	0,0018	1,229	0,69	1251,2	22,66	24	-5,90	0,443	90,0	11,21	36,79	12	36	7,08	-2,16
8	0,26	-0,018	-0,24	0,446	-0,108	0,0025	1,195	0,70	974,1	23,98	25	-4,24	0,456	108,8	12,03	37,97	12,5	37,5	3,95	-1,25
9	0,37	-0,020	-0,35	0,458	-0,084	0,0036	1,163	0,71	761,6	25,40	26	-2,35	0,466	128,3	12,83	39,17	13	39	1,32	-0,43
10	0,49	-0,022	-0,46	0,465	-0,070	0,0048	1,134	0,73	631,1	26,59	27	-1,54	0,471	147,0	13,49	40,51	13,5	40,5	0,06	-0,02
11	0,63	-0,025	-0,60	0,469	-0,061	0,0061	1,108	0,74	528,3	27,81	28	-0,68	0,475	163,3	14,14	41,86	14	42	-0,99	0,33
12	0,76	-0,029	-0,73	0,471	-0,059	0,0074	1,084	0,75	462,8	28,79	29	-0,73	0,476	176,6	14,67	43,33	14,5	43,5	-1,15	0,39
13	0,90	-0,032	-0,86	0,473	-0,055	0,0088	1,063	0,76	410,8	29,72	30	-0,95	0,478	186,3	15,14	44,86	15	45	-0,93	0,31
14	1,04	-0,036	-1,01	0,474	-0,053	0,0102	1,043	0,76	369,5	30,59	31	-1,35	0,479	193,1	15,58	46,42	15,5	46,5	-0,52	0,17
15	1,24	-0,040	-1,20	0,476	-0,049	0,0122	1,026	0,77	326,6	31,64	32	-1,13	0,480	197,3	16,09	47,91	16	48	-0,53	0,18
16	1,46	-0,045	-1,41	0,477	-0,047	0,0144	1,010	0,78	291,7	32,67	33	-1,02	0,481	199,3	16,57	49,43	16,5	49,5	-0,45	0,15
17	1,68	-0,049	-1,63	0,478	-0,044	0,0166	0,995	0,79	264,0	33,61	34	-1,16	0,482	199,5	17,02	50,98	17	51	-0,10	0,03
18	1,99	-0,053	-1,94	0,480	-0,040	0,0197	0,982	0,79	234,4	34,78	35	-0,63	0,484	198,5	17,56	52,44	17,5	52,5	-0,34	0,11
19	2,65	-0,060	-2,59	0,483	-0,034	0,0262	0,970	0,80	191,5	36,90	36	2,45	0,486	196,5	18,56	53,44	18	54	-3,02	1,05

**3.1.2. Напряженные состояния “близкие” к осевому растяжению.** В работе [5] было отмечено, что на некотором этапе одноосного растяжения характер деформированного состояния меняется от чистого сдвига до осесимметричного одноосного растяжения. При этом характеристика скольжений  $\beta_0$  уже на начальном этапе нагружения достигает значения  $\beta_0 = \pi/2$   $p \in [0.5; 0]$ , и уравнения (1.28) и (1.29) значительно упрощаются:

$$\Gamma_1 = \frac{\tau_m - \tau_n}{4\Psi} \left( \frac{1 - 2p + 1,5p^2}{1 - p} \right), \quad (3.4)$$

$$\Gamma_2 = -\frac{\tau_m - \tau_n}{4\Psi} \left( \frac{0,5 - 1,5p + 1,25p^2}{1 - p} - Q \frac{0,25 - 0,5p + 5p^2/16}{1 - p} \right) \quad (3.5)$$

Из уравнений (3.2) и (3.3) находим выражение для максимального касательного напряжения -

$$\tau_m = \tau_n + \frac{4 \cdot \Gamma_1 \cdot \Psi \cdot (1 - p)}{1 - 2 \cdot p + 1,5 \cdot p^2} \quad (3.6)$$

и для Q -

$$Q = \frac{\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} (4 - 8p + 6p^2) + 2 - 6p + 5p^2}{1 - 2p + 1,25p^2} \quad (3.7)$$

При заданных по экспериментам  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  и вычисленным по (3.1), (3.6), (3.7), (2.14) и (2.21) значениям  $p$ ,  $\tau_m$ ,  $Q$ ,  $\Psi$  и  $\Phi$  компоненты напряжений  $\tau$  и  $\sigma$ , также будут определяться по формуле (3.3).

Результаты выполненных подобным образом расчетов напряжений указаны на рис. 3.5 и рис. 3.6 и приведены в табл. 3.2.

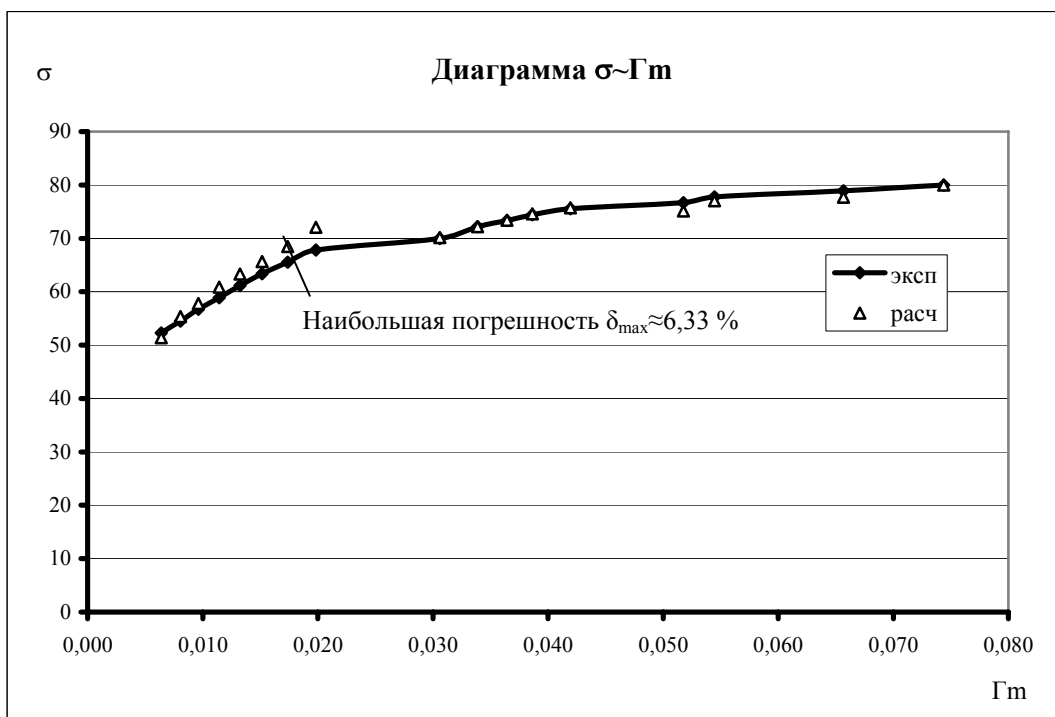


Рис. 3.5. Расчетные напряжения  $\sigma$  в случае одноосного растяжения

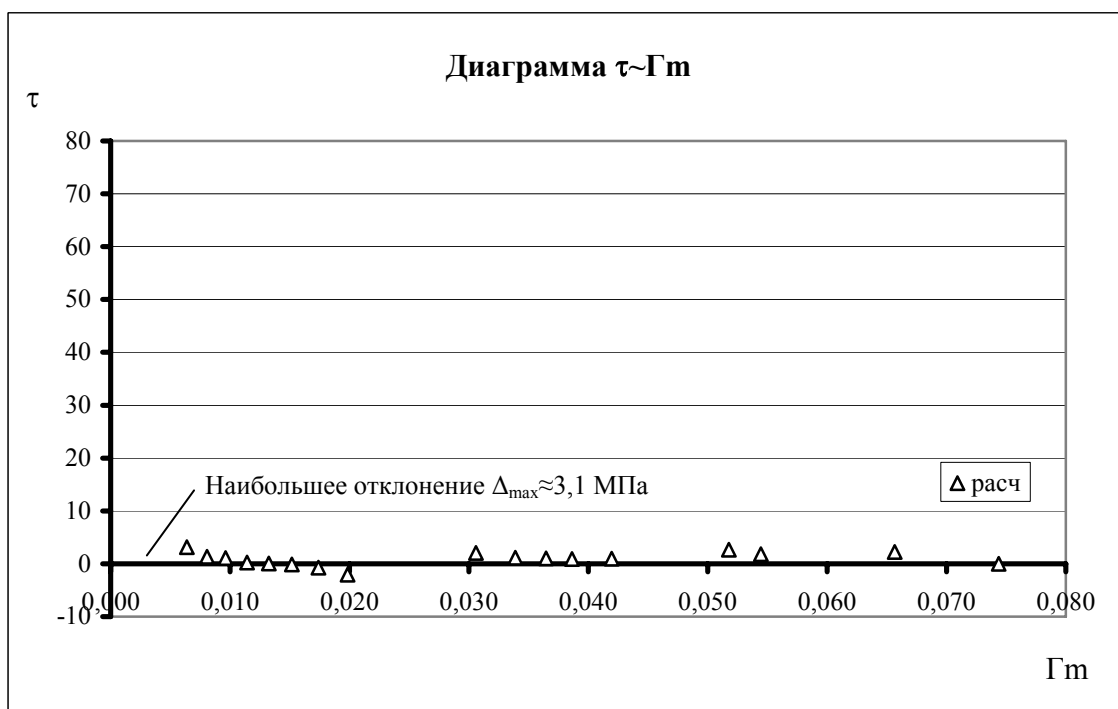


Рис. 3.6. Диаграмма напряжения  $\tau$  в случае одноосного растяжения

Погрешность расчетных значений напряжений определяемые по соотношениям (3.3) и (3.6) по сравнению с экспериментальными значениями составляет 5-7%.

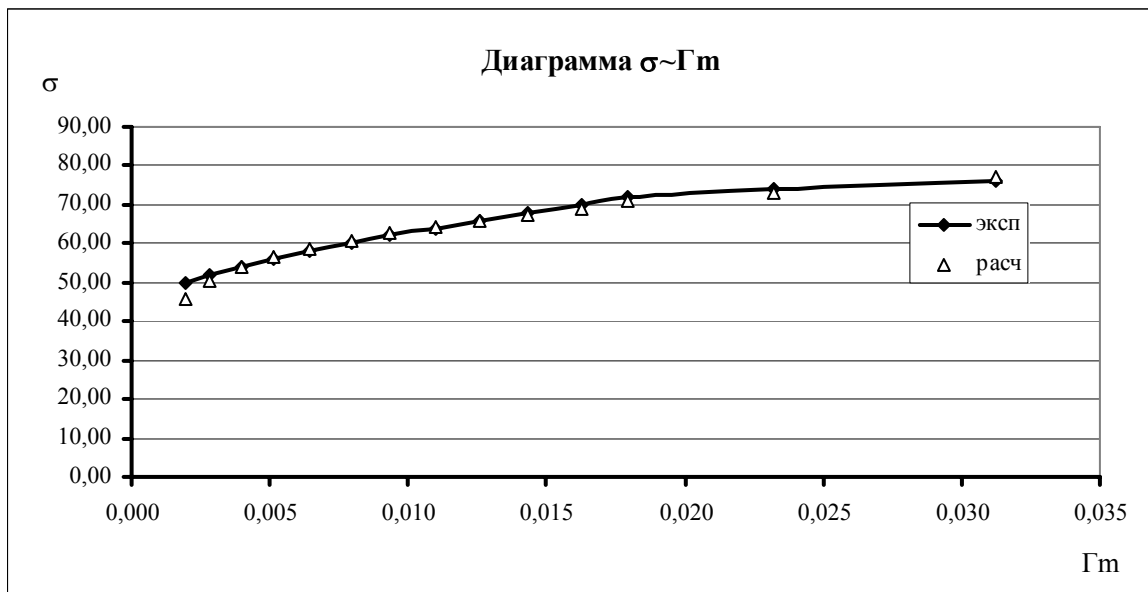


Рис.

3.5. Расчетные напряжения  $\sigma$  в случае одноосного растяжения(образец 4-028)

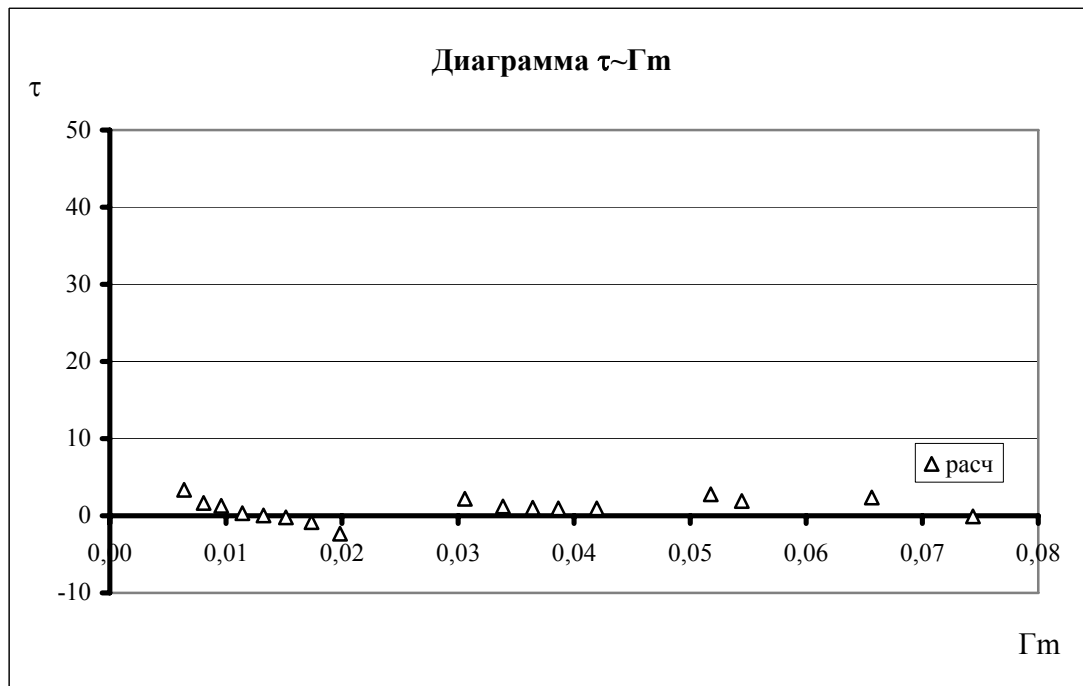


Рис. 3.6. Диаграмма напряжения  $\tau$  в случае одноосного растяжения (образец 4-028)

Табл. 3.2.

**Результаты вычислений напряжений, номинальное осевое растяжение**

№	$\Gamma_1$	$\Gamma_2$	$\Gamma_3$	$\Gamma_{23}/\Gamma_{13}$	$\mu_\epsilon$	$\Gamma_m$	p	$\Psi_{расч}$	$\tau_m^{расч}$	$\tau_m^{эксп}$	$\Delta\tau_m$	Q	$\Phi$	$\tau^{расч}$	$\sigma^{расч}$	$\tau^{эксп}$	$\sigma^{эксп}$	$\Delta\sigma$
								9.81	9.81	9.81			9.81	9.81	9.81	9.81		
	%	%	%					МПа	МПа	МПа	%		МПа	МПа	МПа	МПа	МПа	%
19	0,776	-0,273	-0,503	-0,219	-0,646	0,006	0,187	428,66	26,94	26,13	-3,09	0,15	33,88	3,36	50,52	0	52,26	-3,33
20	0,995	-0,376	-0,619	-0,178	-0,694	0,008	0,163	360,58	27,84	27,24	-2,18	0,11	36,36	1,65	54,02	0	54,48	-0,84
21	1,200	-0,477	-0,723	-0,147	-0,741	0,010	0,140	316,64	28,43	28,35	-0,29	0,09	38,85	1,29	55,57	0	56,70	-1,99
22	1,444	-0,605	-0,839	-0,114	-0,789	0,011	0,116	279,02	29,08	29,46	1,27	0,07	41,32	0,35	57,81	0	58,91	-1,87
23	1,694	-0,741	-0,953	-0,087	-0,836	0,013	0,092	250,49	29,60	30,57	3,15	0,05	43,81	0,04	59,16	0	61,13	-3,22
24	1,964	-0,894	-1,070	-0,061	-0,883	0,015	0,068	226,94	30,08	31,68	5,02	0,03	46,29	-0,19	60,36	0	63,35	-4,72
25	2,278	-1,079	-1,199	-0,036	-0,930	0,017	0,045	205,72	30,61	32,77	6,56	0,01	48,73	-0,82	62,05	0	65,53	-5,31
26	2,643	-1,324	-1,319	0,001	-0,997	0,020	0,011	187,18	31,02	33,90	8,50	-0,03	52,27	-2,32	64,35	0	67,79	-5,07
27	3,823	-2,297	-1,525	0,126	-0,748	0,031	0,136	140,67	35,60	35,00	-1,71	0,10	39,19	2,22	68,97	0	70,00	-1,46
28	4,307	-2,468	-1,839	0,093	-0,814	0,034	0,103	129,99	35,81	36,11	0,84	0,07	42,67	1,18	70,43	0	72,22	-2,48
29	4,647	-2,643	-2,004	0,088	-0,825	0,036	0,098	123,38	36,27	36,67	1,08	0,06	43,23	1,05	71,50	0	73,33	-2,50
30	4,937	-2,791	-2,146	0,084	-0,833	0,039	0,094	118,36	36,65	37,22	1,53	0,06	43,65	0,94	72,36	0	74,44	-2,79
31	5,362	-3,028	-2,334	0,083	-0,835	0,042	0,093	111,73	37,28	37,77	1,30	0,06	43,74	0,95	73,61	0	75,54	-2,56
32	6,451	-3,902	-2,549	0,131	-0,739	0,052	0,141	97,48	39,89	38,33	-4,08	0,10	38,71	2,80	76,99	0	76,66	0,43
33	6,876	-4,016	-2,861	0,106	-0,788	0,054	0,116	93,49	39,85	38,89	-2,47	0,08	41,29	1,91	77,78	0	77,77	0,01
34	8,256	-4,877	-3,379	0,114	-0,772	0,066	0,124	82,17	41,68	39,44	-5,67	0,08	40,45	2,35	81,00	0	78,88	2,69
35	9,68	-5,199	-4,48	0,049	-0,903	0,074	0,059	74,48	41,56	39,99	-3,94	0,03	47,32	-0,07	83,19	0	79,98	4,02

### Результаты вычислений напряжений, осевое растяжение, образец 4-028

№	$\Gamma_1$	$\Gamma_2$	$\Gamma_3$	$\Gamma_{23}/\Gamma_{13}$	$\mu_\epsilon$	$\Gamma_m$	p	$\frac{\Psi_{расч}}{9.81}$	$\frac{\tau_m^{расч}}{9.81}$	$\frac{\tau_m^{эксп}}{9.81}$	$\Delta\tau_m$	Q	$\frac{\Phi}{9.81}$	$\frac{\tau^{расч}}{9.81}$	$\frac{\sigma^{расч}}{9.81}$	$\frac{\tau^{эксп}}{9.81}$	$\frac{\sigma^{эксп}}{9.81}$	$\Delta\sigma$
								МПа	МПа	МПа			МПа	МПа	МПа	МПа	МПа	
	%	%	%								%		МПа	МПа	МПа	МПа	МПа	%
16	0,207	-0,028	-0,178	0,389	-0,222	0,002	0,406	1153,1	28,0	25,00	-12,1	0,368	11,62	10,07	45,98	0	50	-8,05
17	0,321	-0,072	-0,249	0,310	-0,379	0,003	0,322	823,7	29,0	26,00	-11,7	0,279	19,86	7,50	50,57	0	52	-2,75
18	0,459	-0,126	-0,333	0,262	-0,476	0,004	0,273	630,4	29,9	27,00	-10,6	0,227	24,95	5,88	53,85	0	54	-0,29
19	0,611	-0,191	-0,420	0,222	-0,557	0,005	0,232	510,0	30,5	28,00	-9,05	0,186	29,17	4,62	56,45	0	56	0,80
20	0,779	-0,269	-0,510	0,187	-0,626	0,006	0,197	428,2	31,1	29,00	-7,36	0,152	32,81	3,59	58,68	0	58	1,16
21	0,976	-0,362	-0,615	0,159	-0,682	0,008	0,169	365,1	31,8	30,00	-6,06	0,126	35,73	2,83	60,80	0	60	1,34
22	1,160	-0,452	-0,708	0,137	-0,726	0,009	0,147	323,9	32,4	31,00	-4,38	0,105	38,07	2,22	62,49	0	62	0,79
23	1,379	-0,567	-0,812	0,112	-0,776	0,011	0,122	287,6	32,9	32,00	-2,83	0,083	40,66	1,55	64,26	0	64	0,40
24	1,604	-0,688	-0,915	0,090	-0,820	0,013	0,100	259,7	33,4	33,00	-1,22	0,063	42,97	0,94	65,86	0	66	-0,21
25	1,841	-0,822	-1,019	0,069	-0,862	0,014	0,079	236,8	33,9	34,00	0,39	0,044	45,18	0,35	67,39	0	68	-0,90
26	2,116	-0,983	-1,133	0,046	-0,907	0,016	0,056	216,0	34,3	35,00	1,89	0,023	47,55	-0,31	68,99	0	70	-1,44
27	2,42	-1,17	-1,24	0,019	-0,961	0,018	0,029	200,8	35,0	36,00	2,75	0,000	50,39	-0,97	70,99	0	72	-1,40
28	3,02	-1,38	-1,63	0,054	-0,893	0,023	0,064	168,2	36,6	37	1,01	0,030	46,79	-0,02	73,28	0	74	-0,97
29	3,92	-1,60	-2,32	0,116	-0,768	0,031	0,126	138,3	39,6	38	-4,14	0,086	40,27	2,23	76,91	0	76	1,20

**3.1.3. Напряженные состояния при переходе от чистого сдвига к одноосному напряжению.** В этом случае расчет напряжений ( $\tau, \sigma$ ) производится по тем же формулам (3.3), за исключением параметра  $Q$  и напряжения  $\tau_m$ : значения параметра  $p$  определяются по формуле (3.1). При этом в этом случае  $p > 0.5$  для определения максимального касательного напряжения следует использовать выражение (3.2), а в случае  $p \in [0.5; 0]$  - выражение (3.3). Значения  $Q$  вычисляются также как и в рассмотренных выше случаях в соответствии со случаями  $p > 0,5$  и  $0 < p < 0,5$ . Результаты выполненных таким образом расчетов напряжений в случае трехзвенного нагружения (образец 4-101, образец 4-140) указаны на рис. 3.7. и рис. 3.8, а также приведены в табл.3.3.

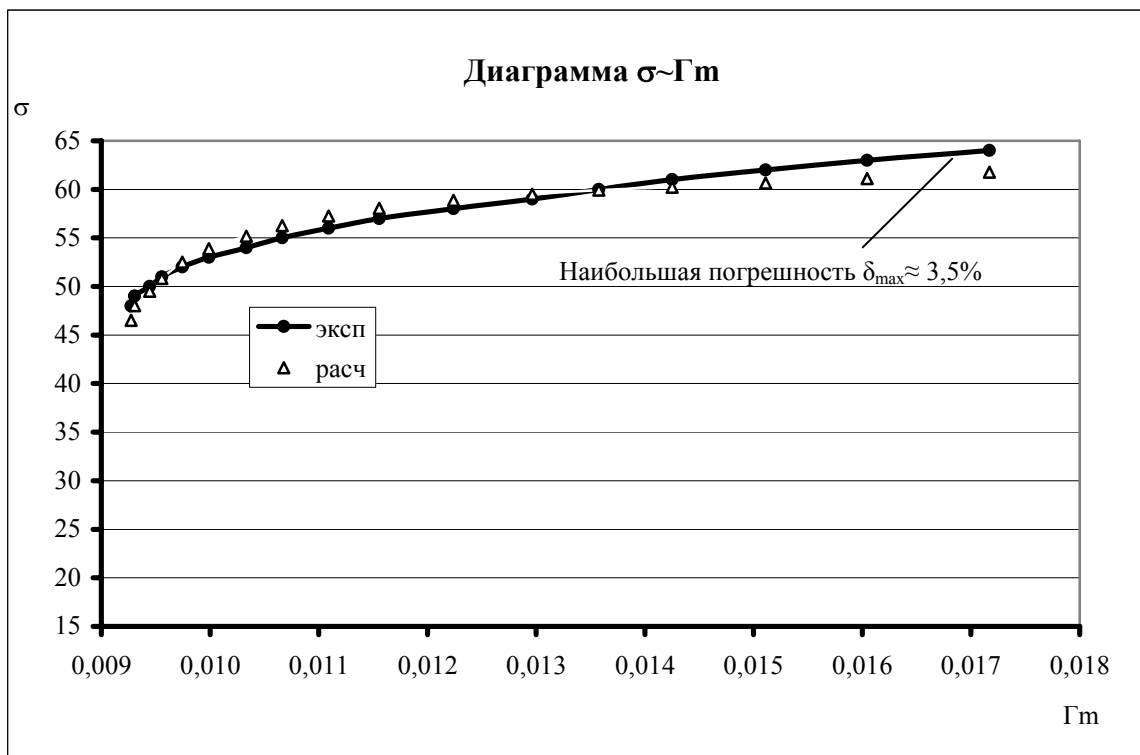


Рис. 3.7. Расчетные напряжения  $\sigma$  в случае сложного трехзвенного нагружения (образец 4-101)

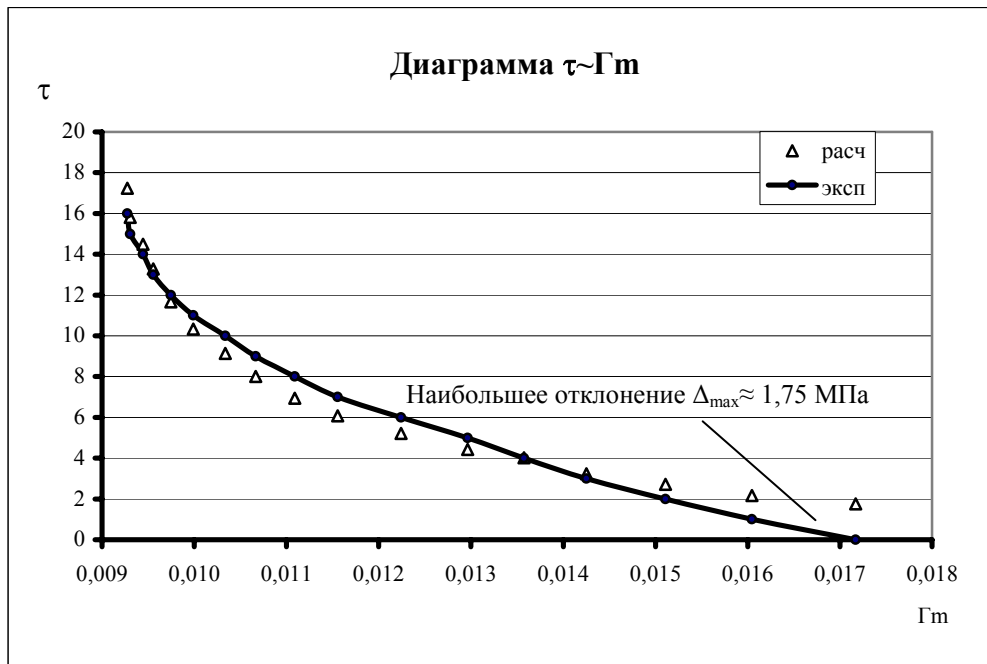


Рис. 3.8. Расчетные напряжения  $\tau$  в случае сложного трехзвенного нагружения (образец 4-101)

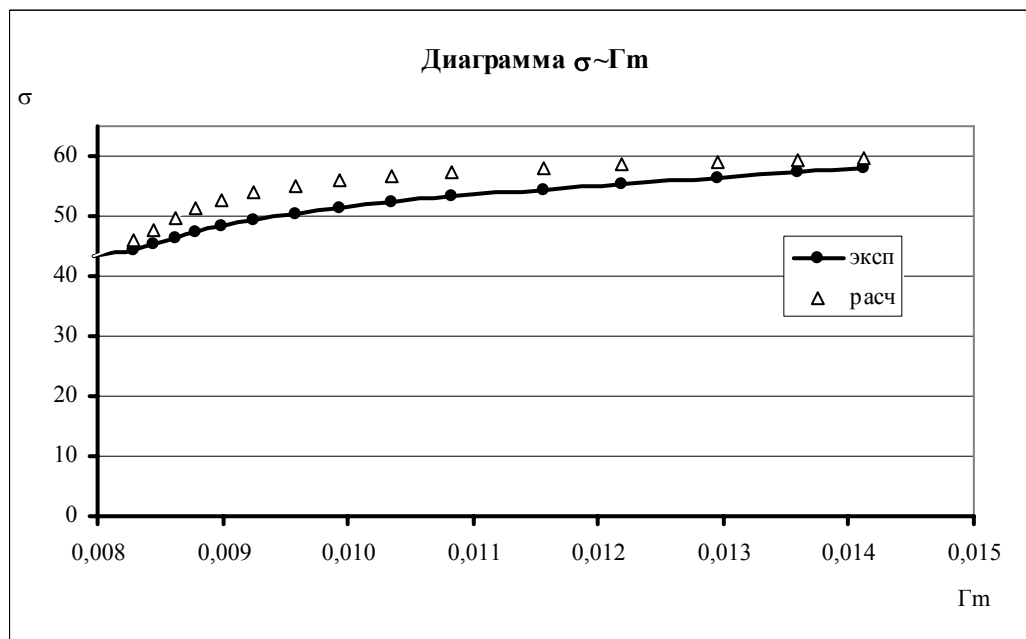
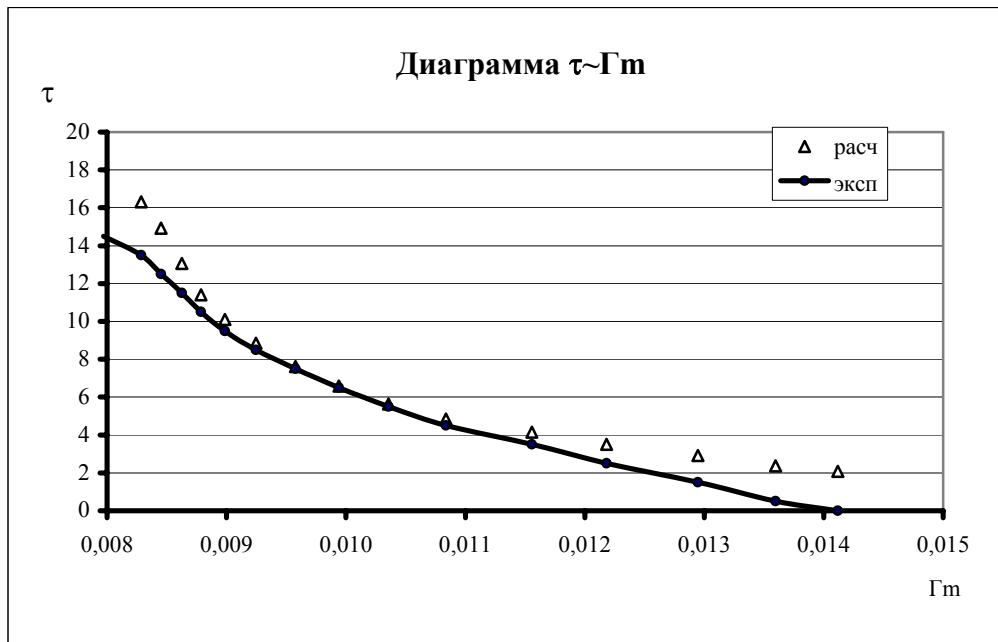


Рис. 3.7. Расчетные напряжения  $\sigma$  в случае сложного трехзвенного нагружения (образец 4-140)





*Рис. 3.8. Расчетные напряжения  $\tau$  в случае сложного трехзвенного нагружения (образец 4-140)*

Табл. 3.3.

**Результаты вычислений напряжений, образец 4-101**

№	$\Gamma_1$	$\Gamma_2$	$\Gamma_3$	$\Gamma_{23}/\Gamma_{13}$	$\mu_\epsilon$	$\Gamma_m$	$\rho$	$\Psi_{расч}$	$\tau_m^{расч}$	$\tau_m^{эксп}$	$\Delta\tau_m$	Q	$\Phi$	$\tau^{расч}$	$\sigma^{расч}$	$\tau^{эксп}$	$\sigma^{эксп}$	$\Delta\sigma$
								9.81	9.81	9.81			9.81	9.81	9.81	9.81		
	%	%	%					МПа	МПа	МПа	%		МПа	МПа	МПа	МПа	МПа	%
17	0,98	-0,10	-0,88	0,420	-0,159	0,0093	0,430	391,2	31,8	32,0	0,38	0,47	32,2	17,24	46,52	16,00	48,00	3,09
18	0,99	-0,11	-0,88	0,411	-0,178	0,0093	0,421	388,3	31,9	32,0	0,27	0,45	30,6	15,81	48,02	15,00	49,00	2,01
19	1,01	-0,12	-0,88	0,401	-0,198	0,0094	0,411	381,9	32,0	32,0	-0,01	0,42	29,5	14,49	49,51	14,00	50,00	0,98
20	1,02	-0,14	-0,89	0,391	-0,217	0,0096	0,401	376,4	32,0	32,0	-0,14	0,40	28,8	13,28	50,81	13,00	51,00	0,37
21	1,05	-0,16	-0,89	0,376	-0,247	0,0097	0,386	367,4	32,0	32,0	-0,26	0,37	28,2	11,66	52,50	12,00	52,00	-0,97
22	1,09	-0,18	-0,91	0,362	-0,276	0,0100	0,372	357,2	32,1	32,0	-0,36	0,34	28,0	10,33	53,90	11,00	53,00	-1,70
23	1,14	-0,21	-0,93	0,347	-0,306	0,0103	0,357	344,7	32,1	32,0	-0,51	0,32	28,2	9,13	55,19	10,00	54,00	-2,21
24	1,19	-0,24	-0,95	0,331	-0,338	0,0107	0,341	332,8	32,1	32,0	-0,44	0,29	28,7	8,00	56,28	9,00	55,00	-2,32
25	1,25	-0,28	-0,97	0,312	-0,375	0,0111	0,322	318,9	32,1	32,0	-0,32	0,27	29,5	6,94	57,27	8,00	56,00	-2,27
26	1,31	-0,32	-1,00	0,295	-0,411	0,0116	0,305	305,5	32,0	32,0	-0,20	0,25	30,4	6,08	58,04	7,00	57,00	-1,83
27	1,41	-0,37	-1,04	0,272	-0,455	0,0122	0,282	288,4	32,0	32,0	-0,10	0,22	31,8	5,21	58,85	6,00	58,00	-1,47
28	1,51	-0,43	-1,08	0,249	-0,503	0,0130	0,259	272,2	31,9	32,0	0,13	0,20	33,5	4,43	59,48	5,00	59,00	-0,82
29	1,60	-0,48	-1,12	0,233	-0,533	0,0136	0,243	260,9	31,9	32,0	0,09	0,19	34,6	4,02	59,92	4,00	60,00	0,13
30	1,71	-0,57	-1,14	0,202	-0,595	0,0143	0,212	247,6	31,7	32,0	0,87	0,16	37,0	3,23	60,22	3,00	61,00	1,28
31	1,83	-0,65	-1,19	0,179	-0,643	0,0151	0,189	234,9	31,6	32,0	0,97	0,14	39,0	2,71	60,66	2,00	62,00	2,16
32	1,98	-0,74	-1,23	0,152	-0,696	0,0160	0,162	222,8	31,6	32,0	1,12	0,12	41,3	2,16	61,12	1,00	63,00	2,98
33	2,14	-0,84	-1,30	0,132	-0,737	0,0172	0,142	211,1	31,7	32,0	0,76	0,10	43,1	1,75	61,76	0,00	64,00	3,50

Табл. 3.4.

**Результаты вычислений напряжений, образец 4-140**

№	$\Gamma_1$	$\Gamma_2$	$\Gamma_3$	$\Gamma_{23}/\Gamma_{13}$	$\mu_\epsilon$	$\Gamma_m$	$\rho$	$\Psi_{расч}$	$\tau_m^{расч}$	$\tau_m^{эксп}$	$\Delta\tau_m$	Q	$\Phi$	$\tau^{расч}$	$\sigma^{расч}$	$\tau^{эксп}$	$\sigma^{эксп}$	$\Delta\sigma$
								9.81	9.81	9.81			9.81	9.81	9.81	9.81		
	%	%	%					МПа	МПа	МПа	%		МПа	МПа	МПа	МПа	МПа	%
14	0,82	-0,07	-0,75	0,82	-0,141	0,0079	0,440	440,9	30,8	29	-6,0	0,500	34,36	18,27	43,40	14,5	43,5	0,23
15	0,86	-0,09	-0,77	0,86	-0,167	0,0082	0,427	426,1	31,1	29	-6,8	0,464	31,50	16,31	45,92	13,5	44,5	-3,20
16	0,89	-0,10	-0,78	0,89	-0,187	0,0084	0,417	417,8	31,2	29	-7,2	0,438	30,07	14,92	47,58	12,5	45,5	-4,57
17	0,91	-0,12	-0,79	0,91	-0,216	0,0085	0,402	407,8	31,3	29	-7,5	0,403	28,79	13,07	49,61	11,5	46,5	-6,70
18	0,94	-0,14	-0,80	0,94	-0,247	0,0087	0,387	398,2	31,4	29	-7,6	0,371	28,18	11,41	51,33	10,5	47,5	-8,06
19	0,97	-0,16	-0,81	0,97	-0,275	0,0089	0,372	387,8	31,4	29	-7,6	0,345	28,04	10,10	52,68	9,5	48,5	-8,61
20	1,01	-0,19	-0,82	1,01	-0,307	0,0091	0,357	375,4	31,4	29	-7,6	0,318	28,23	8,85	53,94	8,5	49,5	-8,97
21	1,06	-0,22	-0,84	1,06	-0,343	0,0095	0,338	360,7	31,4	29	-7,6	0,291	28,79	7,62	55,12	7,5	50,5	-9,14
22	1,11	-0,25	-0,86	1,11	-0,381	0,0098	0,320	346,0	31,3	29	-7,4	0,266	29,63	6,58	56,05	6,5	51,5	-8,83
23	1,17	-0,29	-0,88	1,17	-0,423	0,0103	0,299	330,5	31,2	29	-7,1	0,241	30,78	5,63	56,81	5,5	52,5	-8,22
24	1,24	-0,33	-0,91	1,24	-0,465	0,0107	0,277	314,9	31,1	29	-6,9	0,218	32,14	4,84	57,43	4,5	53,5	-7,34
25	1,34	-0,39	-0,95	1,34	-0,512	0,0115	0,254	295,9	31,1	29	-6,8	0,195	33,80	4,14	58,09	3,5	54,5	-6,59
26	1,43	-0,45	-0,98	1,43	-0,561	0,0121	0,229	280,7	31,0	29	-6,5	0,173	35,68	3,50	58,52	2,5	55,5	-5,43
27	1,55	-0,52	-1,02	1,55	-0,613	0,0128	0,204	265,0	30,9	29	-6,3	0,150	37,77	2,92	58,97	1,5	56,5	-4,37
28	1,65	-0,60	-1,05	1,65	-0,666	0,0135	0,177	253,0	30,8	29	-5,9	0,128	39,99	2,37	59,28	0,5	57,5	-3,09
29	1,73	-0,65	-1,08	1,73	-0,694	0,0140	0,163	245,0	30,8	29	-5,9	0,116	41,23	2,08	59,58	0	58	-2,73

### 3.2. Построение поверхности текучести.

При известных зависимостях для материальных функций можно построить и поверхность текучести для повторного нагружения из рассматриваемого класса. Для этой цели необходимо определить значения нагрузок ( $\sigma$  и  $\tau$ ), при которых начнутся новые сдвиги (в прежних или новых площадках и направлениях). Но, прежде всего надо определить вторичные пределы текучести (т.е. значения  $S_{nl}$  в разных плоскостях и направлениях).

Сопротивление сдвигу определено только в тех площадках и направлениях, где скольжения уже произошли и они вызывают соответствующие (раз)упрочнение материала. Согласно [14] для определения сдвигов в направлении обратном к направлению уже прошедших предлагается иной способ построения функции  $\Psi$ . Поэтому первое, что возможно определить – вторичные пределы текучести для таких типов нагружения, когда скольжения будут продолжены в тех же плоскостях и направлениях.

В качестве примера вычислим значения сопротивления сдвигу в различных направлениях скольжений на главной площадке для случая, когда первоначальные сдвиги вызваны нагружением одноосного растяжения/сжатия. Напомним, сопротивление сдвигу в направлениях и площадках происшедших сдвигов задается формулой:

$$S_{nl} = \psi + V\Psi\varphi_{nl} + \Phi\left(1 - \frac{\Gamma_{nl}}{\Gamma_m}\right) \quad (3.8)$$

где  $\psi = \tau_n$  - предел текучести, для рассматриваемого материала Ст40Х  $\tau_n / 9.81 = 11 \text{ МПа}$ ,

$V$  - объем скольжений, определяемый по (1.27),

$\Psi$  - материальная функция, определяемая по (2.14),

$\varphi_{nl}$  - область скольжений при сложном нагружении, вычисляется по (1.19),

$\Phi$  – кинематическая характеристика скольжений, находится по (2.21),

$\Gamma_{nl}$  - компоненты тензора пластической деформации при сложном нагружении (1.11),

$\Gamma_m$  - максимальная сдвиговая компонента тензора пластических деформаций при сложном нагружении  $\Gamma_m = (\Gamma_1 - \Gamma_3)/2$ .

В начале, на примере номинальной диаграммы осевого растяжения, рассмотрим характер развития сопротивления сдвигу главной площадке по различным направлениям сдвига  $\omega$  на различных этапах первоначального (одноосного) нагружения (рис.3.9). В данном случае для выражений  $\varphi_{nl}$  и  $\Gamma_{nl}$  в (3.8) будем иметь:

$$\varphi_{nl} = 0.5\lambda_1[\Omega^2 - (\omega - \Omega_c)^2] \quad (3.9)$$

$$\Gamma_{nl} = (2\Gamma_1 + \Gamma_2)n_1l_1 + (2\Gamma_2 + \Gamma_1)n_2l_2. \quad (3.10)$$

Для направляющих косинусов в этих выражениях величины углов будут равны:

$$\alpha_1 = 0; \beta_1 = 0; |\omega - \Omega_c| < \Omega$$

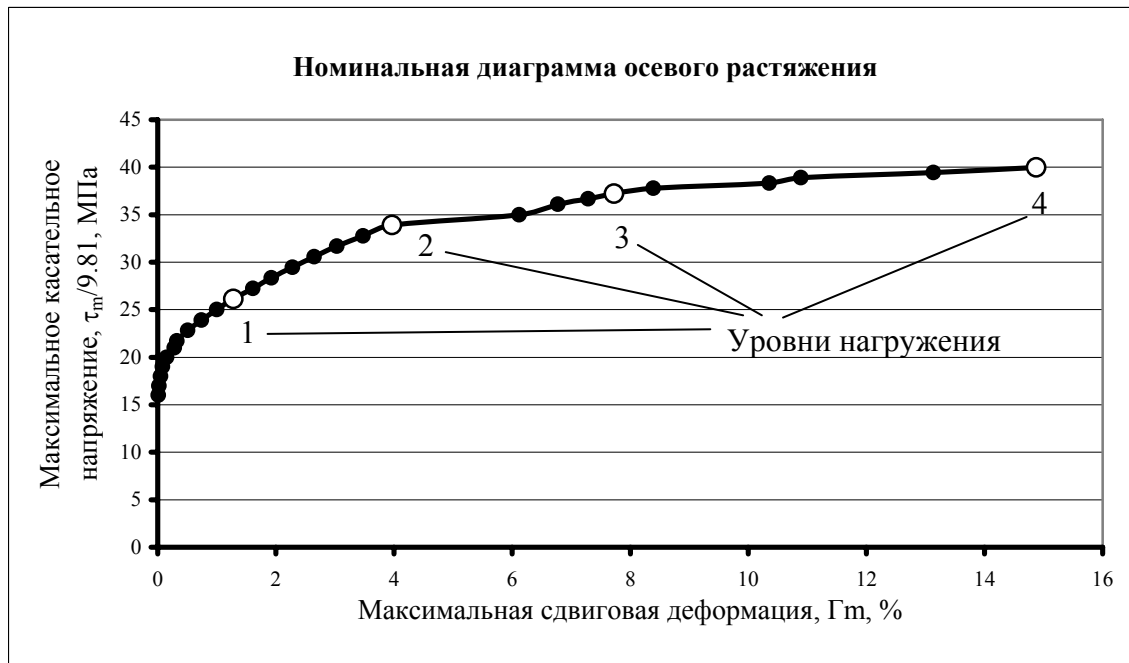


Рис. 3.9 Номинальная диаграмма осевого растяжения

При этом будем иметь:

$$S_{nl} = \tau_n + V\Psi \frac{1}{2}\lambda_1[\Omega^2 - (\omega - \Omega_c)^2] + \Phi(1 - \cos \omega). \quad (3.11)$$

Вычисление  $S_{nl}$  при различных значениях  $\omega$  и различных уровнях деформирования принципиальных затруднений не вызывает.

Картина развития сопротивления сдвигу в области скольжений при уровне максимального касательного напряжения  $\tau_m/9,81=26.13$  МПа изображена на рис. 3.9. Первый участок соответствует первому слагаемому в уравнении (3.11) т.е. упругой стадии деформирования; второй участок на диаграмме соответствует второму слагаемому в уравнении (3.11) и третий участок соответствует третьему слагаемому выражения  $S_{nl}$ ; совокупность всех участков дает полное значение  $S_{nl}$  при рассматриваемом уровне нагружения.

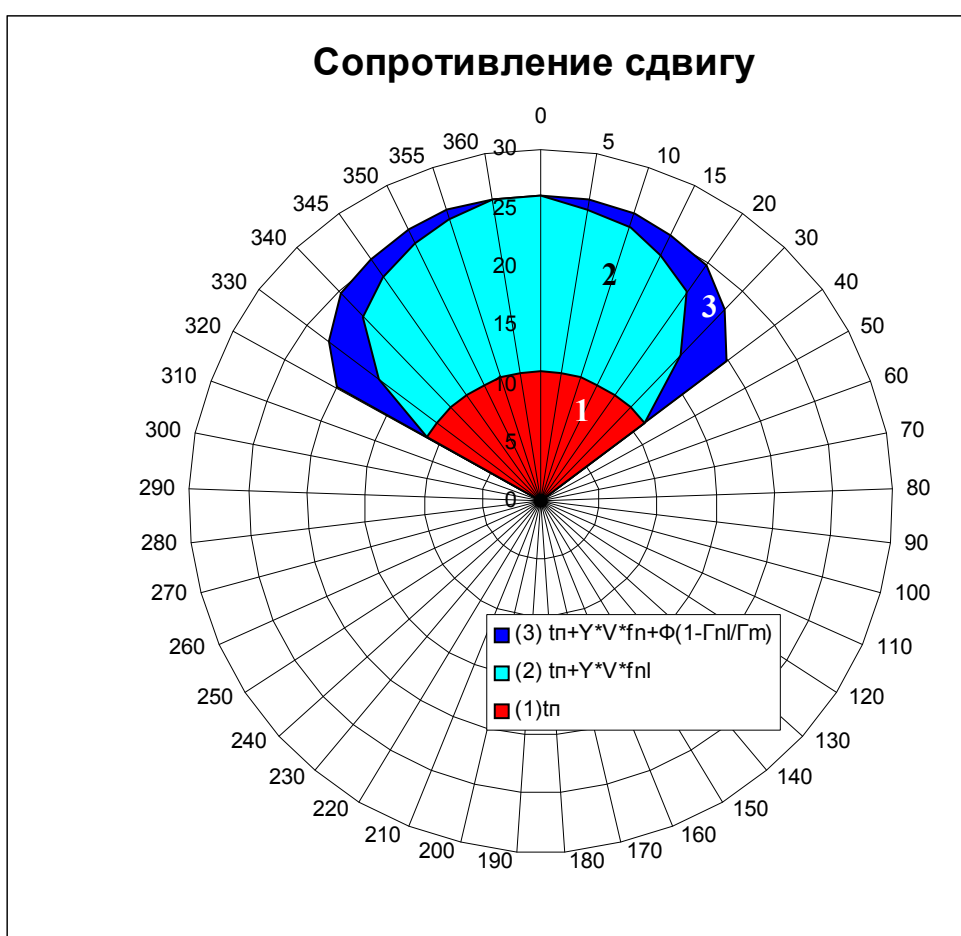


Рис. 3.10. Картина развития сопротивления сдвигу в области скольжений.

Результаты произведенных расчетов полных значений  $S_{nl}$  для четырех разных уравнений нагружения приведены на рис. 3.11.



Рис. 3.11 Характер изменения  $S_{nl}$  по различным направлениям на главной площадке (площадке действия  $\tau_{max}$ ) после пластического растяжения.

Для построения участка поверхности текучести, соответствующего рассматриваемому классу нагружения будем задавать траектории пропорционального нагружения определяемого коэффициентом  $k=\tau/\sigma$ . При этом необходимо вычислить значения компонент напряжений  $\tau_{nl}$  (п. 1.2.1) в различных направлениях ( $\omega$  или  $l$ ) в рассматриваемой главной площадке и определить направление ( $\omega^*$ ) и уровень нагружения ( $\tau^*$ ) при котором данное напряжение достигает соответствующего уровня  $S_{nl}$ . Поскольку условием возникновения повторных скольжений является то, что в каком то из направлений  $\tau_{nl}$  в рассматриваемой плоскости (уже произошедших скольжений) достигает соответствующего значения  $S_{nl}$ . При таких нагружениях максимальное касательное напряжение определяется через  $\tau$  и  $\sigma$  по формуле:

$$\tau_m = \frac{\sigma + \tau}{2} \tag{3.12}$$

или

$$\tau_m = \frac{\sigma}{2}(1+k) \quad (3.13)$$

Рассмотрим три пути нагружения  $k=0$  – случай осевого растяжения  $\left(\tau_m = \frac{\sigma}{2}\right)$ ,  $k=1/3$  – случай чистого сдвига  $\left(\tau_m = \frac{2}{3}\sigma\right)$ , и  $k=1/4$  – произвольное (промежуточное) нагружение  $\left(\tau_m = \frac{5}{8}\sigma\right)$ .

Из результатов расчетов выяснилось что, несмотря на разные траектории повторных нагружений (при различных комбинациях  $\tau$  и  $\sigma$ ) скольжения возникают при одном и том же максимальном касательном напряжении  $\tau_m = \tau_m^*$ , при котором  $\tau_{nl} = S_{nl}$  и для всех направлений первоначальных сдвигов. В пространстве напряжений  $\sigma$  и  $\tau$  полученная поверхность нагружения соответствует прямой линии, причем граница этой поверхности остается параллельной ее начальному положению (рис. 3.11).

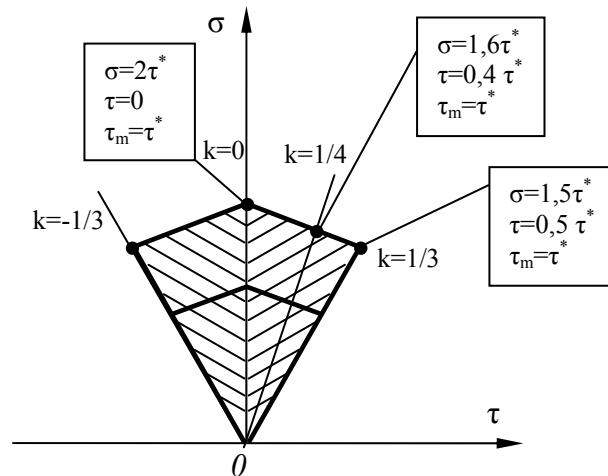
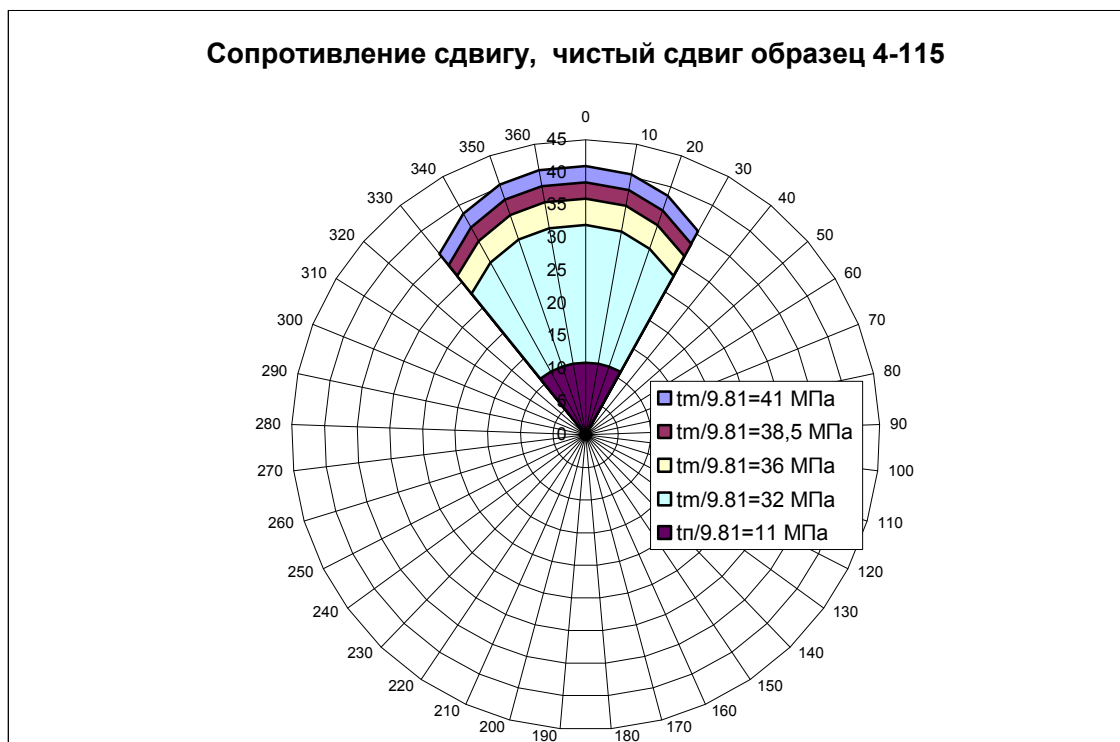


Рис. 3.12 Поверхность текучести

Расчеты значений  $S_{nl}$  при пластических деформациях траекторий нагружения чистого сдвига (образец 4-115) показали аналогичную картину развития сопротивления сдвигу, что и при осевом растяжении (рис. 3.13). Соответственно, получается и одна и та же поверхность текучести, изображенная на рис. 3.12. Разница только в растворе веерообразных направлений



скольжений: при растяжении этот веер больше чем при сдвиге примерно на 20-25 %.



*Рис. 3.13 Характер изменения  $S_{nl}$  по различным направлениям на главной площадке (площадке действия  $\tau_{max}$ ) после пластического деформирования чистого сдвига.*

Для построения поверхности текучести в тех направлениях, где нет сдвигов (при  $|\omega - \Omega_c| > \Omega$ ), требуется уточнение соответствующих значений сопротивления сдвига и формы записи самого сопротивления сдвигу. Вопрос подбора выражения для  $S_{nl}$ , а также материальных характеристик  $\Psi$  и  $\Phi$  для таких направлений остается открытым: до сих пор рассматривались лишь значения для  $S_{nl}$  в направлениях обратных к направлению произошедших скольжений и в частности – эффект Баушингера [15]. Этот вопрос требует проведения отдельных исследований.

### 3.2. Выводы по главе 3.

1) Установлена параметрическая форма зависимости напряжений от деформаций для трех типов нагрузжений (3.2), (3.3) и (3.6). Эти зависимости могут быть использованы при определении напряженного состояния при простых и сложных нагружениях.

2) Погрешность расчетов для стали Ст40Х находится в пределах 7-9%.

3) Указанная процедура расчетов характеристик модели и значений напряжений, соответствующих заданным деформациям, может быть использована и при деформировании других видов конструкционных пластичных материалов.

4) После установления характера изменения сопротивления сдвигу построение поверхности нагружения не вызывает принципиальных затруднений.

5) Согласно рассматриваемой модели поверхность нагружения действительно имеет излом (“заострение”) в направлении  $\tau_{max}$ .

6) В рассмотренном случае поверхность текучести (на главной площадке) изменяется в направлениях происшедших сдвигов параллельно и пропорционально ее начальному положению.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Функция упрочнения  $\Psi$  от уровня и вида деформированного состояния удалось представить в виде произведений двух функций, одна из которых зависит от  $\Gamma_m$ , а другая только от вида деформированного состояния ( $\mu_\varepsilon$ ).

Установлено, что функциональная зависимость от аргумента  $\Gamma_m$  является единой для различных видов нагрузжений. Влияние вида деформирования ( $\mu_\varepsilon$ ) отражается на коэффициенте этой зависимости.

Зависимость  $\Psi$  от параметра  $\mu_\varepsilon$  носит случайный характер, который мы описываем нормальным законом распределения. Для материала Ст40Х установлены числовые характеристики распределения функции упрочнения  $\Psi \sim \Psi(\Gamma_m, \mu_\varepsilon)$ .

Построенная аппроксимация функции упрочнения  $\Psi$  оказалось более точной, чем в случае, когда аргументами этой функции считались компоненты пластических деформаций, а не напряжений.

2. Кинематическая характеристика  $\Phi$  может быть представлена функцией двух аргументов связанных с кинематикой скольжений. Она записана также в виде произведения двух функций: одна из которых зависит от параметра  $p$  и характеризует  $\Phi$  при состояниях близких к сдвигу, а другая от  $\mu_\varepsilon$  и характеризует  $\Phi$  при состояниях близких к одноосному растяжению. При этом для построения функции  $\Phi(\mu_\varepsilon, p)$  достаточно трех констант.

Главным аргументом определяющим характер изменения веера плоскостей скольжения и характеристики  $\Phi$  оказался параметр  $p$ . Установлено, что этот “внутренний” параметр непосредственно связан с макропараметром деформирования  $\mu_\varepsilon$ . При этом появляется возможность удовлетворительного описания кинематической характеристики модели скольжений  $\Phi$  только одним параметром  $\mu_\varepsilon$  (либо отношением  $\Gamma_{23}/\Gamma_{13}$ ).

3) Для рассматриваемого класса нагрузений установлена параметрическая форма зависимости напряжений от деформаций.

Погрешность рассчитанных для стали Ст40Х напряжений в сравнении с экспериментальными данными находится в пределах 10%.

Процедура расчетов характеристик модели и значений напряжений, по заданным пластическим деформациям, может быть использована и при деформировании других видов конструкционных пластичных материалов.

4) После установления характера изменения сопротивления сдвигу построение поверхности нагружения не вызывает принципиальных затруднений.

Согласно рассматриваемой модели поверхность нагружения действительно имеет излом (“заострение”) в направлении  $\tau_{max}$ .

В рассмотренном случае поверхность текучести (на главной площадке) изменяется в направлениях происшедших сдвигов параллельно и пропорционально ее начальному положению.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Дель Г.Д. Определение напряжений в пластической области по распределению твердости. – М.: Машиностроение. – 1971.
2. Ленский В.С. Введение в теорию пластичности. – М. 1968.
3. Ильюшин А.А. Теория пластичности. – М.: Гостехиздат. – 1948.
4. Леонов М.Я. Механика деформаций и разрушения. – Фрунзе: Илим, - 1981.
5. Салиев А.Б. О деформационных соотношениях при малых веерах скольжений и простых нагружениях. /В сб.: Прочность и устойчивость реальных твердых тел и конструкций. Фрунзе: Илим, 1991. - С. 67-77.
6. Батдорф С.В., Будянский Б. Математическая теория пластичности основанная на концепции скольжения//Сб. перевод.: Механика. – 1955.-№5.- С.120-127.
7. Салиев А.Б. Малая пластическая деформация тонкостенной трубки. /В сб.: Прочность и устойчивость реальных твердых тел и конструкций. Фрунзе: Илим, 1991. – С .44-52 .
8. Салиев А.Б., Кыдыралиев Н.Н. Влияние кинематики монотонных скольжений на деформационные и прочностные свойства материалов //Наука и новые технологии. -1999. - №4. – С. 46-51.
9. Салиев А.Б., Чыныбаев М.К. О зависимости функции упрочнения от пластических деформаций. Материалы международного научно-технического симпозиума «Образование через науку» Т.1. – Бишкек, 2004, С. 156-161
10. Поршнева С.В., Беленкова И.В. Численные методы на базе MathCAD. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. 464с.
11. Салиев А.Б., Кыдыралиев Н.Н. Влияние сдвига на осевое растяжение /В сб.: Материалы международной конференции “Технологии и перспективы современного инженерного образования, науки и производства”. Бишкек,1999.-С. 207-216.

12. Чыныбаев М.К. К расчету параметра модели скольжений, Известия КГТУ, Бишкек, 2006 №10, С.226-230
13. Чыныбаев М.К., Салиев А.Б. О кинематической характеристике вееров скольжений.  
// Известия Кыргызского государственного технического университета им. И.Раззакова №12, Бишкек, 2007, с. 24-30.
14. Рычков. Б.А. К определению расчетных зависимостей теории скольжения  
// Сб.: Прочность и устойчивость реальных твердых тел. – Фрунзе: Илим.-1988.- С.18-25.
15. Рычков Б.А. Сложная деформация и эффект Баушингера стали 45. Тезисы докл. на VIII Всесоюз. Конф. по прочн. и пластичности. Пермь. 1983.
16. Биргер И.А., Мавлютов Р.Р. Сопротивление материалов: Учебное пособие. – М.: Наука, 1986. – С.126-130.

