Турсунов Д.А., Мамасидиков Э., Турсунбаева Р.Б., Койчубаева Г.З.

БӨЛЧӨК ТАРТИПТЕГИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТEҢДЕМЕЛЕР

Турсунов Д.А., Мамасидиков Э., Турсунбаева Р.Б., Койчубаева Г.З.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Tursunov D., Mamasidikov E., Tursunbaeva R., Koichubaeva G.

FRACTIONAL ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

УДК: 517.923

Макала бөлчөк тартиптеги кадимки дифференциалдык теңдемелерди изилдөөгө арналган. Илимде жана техникада дифференциалдык теңдемелердин чоң мааниге ээ экендиги бизге белгилүү. Адатта дифференциалдык теңдеме дегенде изделүүчү белгисиз функция теңдемеге бүтүн тартиптеги туундулар менен гана катышкан учурун элестетебиз. Бирок, акыркы жылдары бөлчөк тартиптеги дифференциалдык теңдемелерге болгон кызыгуу аябай күчөдү. Бөлчөк туунду (же бөлчөк тартиптеги туунду) –математикалык туунду түшүнүгүнүн жалпыланышы. Бул түшүнүктү жалпылаштыруунун бир нече ар кандай жолдору бар, бирок алардын бардыгы табигый тартипте болгондо кадимки туунду түшүнүгү менен дал келет. Туундунун бөлчөк гана эмес, терс тартибин да карап чыкканда, мындай туундуга адатта дифферинтеграл термини колдонулат. Мындай дифференциалдык теңдемелерде изделүүчү белгисиз функциялардын туундуларынын тартиби бүтүн эмес, бөлчөк болот.

Негизги сөздөр: бөлчөк туунду, бөлчөк интеграл, Риман-Лиувилдин бөлчөк туундусу, Риман-Лиувилдин бөлчөк интегралы, Капутонун бөлчөк туундусу, Адамардын бөлчөк туундусу, Адамардын бөлчөк интегралы, туунду, бөлчөк туундулуу дифференциалдык теңдеме, оператор.

Статья посвящена исследованию обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка. Мы знаем, что дифференциальные уравнения имеют большое значение в науке и технике. Обычно, когда мы говорим «дифференциальное уравнение», мы представляем себе случай, когда искомая неизвестная функция входит в уравнение только с производными целого порядка. Однако в последние годы интерес к дробным дифференциальным уравнениям чрезвычайно возрос. Дробная производная (или производная дробного порядка) является обобщением математического понятия производной. Существует несколько разных способов обобщить это понятие, но все они совпадают с понятием обычной производной в случае натурального порядка. Когда рассматриваются не только дробные, но и отрицательные порядки производной, к такой производной обычно применяется термин дифферинтеграл. В таких дифференциальных уравнениях порядок производных искомых неизвестных функций является дробным, а не целым.

Ключевые слова: дробная производная, дробный интеграл, дробная производная Римана-Лиувиля, дробный интеграл Римана-Лиувиля, дробная производная Капуто, дробная производная Адамара, дробный интеграл Адамара, производная, дифференциальное уравнение дробного порядка, оператор.

The article is devoted to the study of ordinary differential equations of fractional order. We know that differential equations are of great importance in science and technology. Usually, when we say “differential equation,” we imagine the case when the unknown unknown function appears in the equation only with derivatives of integer order. However, in recent years, interest in fractional differential equations has increased enormously. Fractional derivative (or fractional derivative) is a generalization of the mathematical concept of derivative. There are several different ways to generalize this concept, but they all coincide with the concept of an ordinary derivative in the case of natural order. When not only fractional, but also negative orders of a derivative are considered, the term differential integral is usually applied to such a derivative. In such differential equations, the order of the derivatives of the unknown unknown functions is fractional, not integer.

Key words: fractional derivative, fractional integral, Riemann-Liouville fractional derivative, Riemann-Liouville fractional integral, Caputo fractional derivative, Hadamard fractional derivative, Hadamard fractional integral, derivative, fractional order differential equation, operator.

Илимде жана техникада дифференциалдык теңдемелердин чоң мааниге ээ экендиги бизге белгилүү. Адатта дифференциалдык теңдеме дегенде изделүүчү белгисиз функция теңдемеге бүтүн тартиптеги туундулар менен гана катышкан учурун элестетебиз. Бирок, акыркы жылдары бөлчөк тартиптеги дифференциалдык теңдемелерге болгон кызыгуу аябай күчөдү. Мындай дифференциалдык теңдемелерде изделүүчү белгисиз функциялардын туундуларынын тартиби бүтүн эмес, бөлчөк болот.

Мисалы,

$y'(x)+y(x)=x+1$ – биринчи тартиптеги кадимки дифференциалдык теңдеме;

$y^{(0,5)}(x)+y(x)=x+1$ – экиден биринчи (бүтүн эмес) тартиптеги кадимки дифференциалдык теңдеме.

Бөлчөк тартиптеги дифференцирлөө жана интегралдоо теориясынын өнүгүүсү жана алардын илимдин ар түрдүү тармактарында колдонулушу бөлчөк тартиптеги дифференциалдык теңдемелердин да теориясынын өнүгүүсүнө өз салымын кошту [1]-[4].

[1]-[4] монографиялар менен макалалардан физика, механика, химия, инженерия жана илимдин жана табият таануунун башка тармактарындагы бөлчөк тартиптеги дифференциалдык теңдемелердин ар кандай колдонулушун, бул тармактардагы эмгектердин библиографиясын табууга болот. Бөлчөк тартиптеги кадимки дифференциалдык теңдемелердин жалпы көрүнүшүн төмөнкүдөй жазууга болот:

$$F[x,y(x),D^{\alpha_1}y(x),D^{\alpha_2}y(x),...,D^{\alpha m}y(x)]=f(x), \qquad (1)$$

мында $x=(x_1,...,x_l)$ – l чөнемдүү Rl (l∈N={1,2,…}) Евклиддик мейкиндиктеги чекит, F[x,y1,y2,…,yl] жана f(x) – берилген функциялар, ал эми D^{α_k} – α_k тартиптеги бөлчөк тартиптеги дифференцирлөө оператору (мында 0<α_k – чыныгы, же 0<Re(α_k) – комплекстик сан), k=1,2,…,m.

Тиешелүү сызыктуу теңдемелер төмөнкү көрүнүштө берилет

$$A_0y(x)+\sum_{k=1}^{m}A_k(x)(D^{\alpha_k}y)(x)=f(x), \qquad (2)$$

мында Ak(x) (k=0,1,2…,m) жана f(x) берилген белгилүү функциялар.

Бөлчөк тартиптеги кадимки дифференциалдык теңдемелердин арасынан эң көп изилденгени бул Риман-Лиувилдин $D^{\alpha}y=D^{\alpha}_{a+}y$ бөлчөк туундуларын кармаган теңдемелер, мында a∈R. Мындай оң тартиптеги бөлчөк туундулар төмөнкү формуланын жардамында аныкталат:

$$(D^{\alpha}_{a+}y)(x)=\left(\frac{d}{dx}\right)^n(I^{n-\alpha}_{a+}y)(x), \quad (a<x;\ n=[\alpha]+1), \qquad (3)$$

мында $I^{\alpha}_{a+}y$ – Риман-Лиувилдин 0<α тартиптеги бөлчөк интегралы:

$$(I^{\alpha}_{a+}y)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\frac{y(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad (a<x) \qquad (4)$$

мында Г(α) – Эйлердин гамма-функциясы.

XX кылымдын 80-жылдарынан баштап төмөнкү барабардык менен аныкталган туундуларды кармаган кадимки дифференциалдык теңдемелер изилдене башталган:

$$({}^CD^{\alpha}_{a+}y)(x)=\left(D^{\alpha}_{a+}\left[y(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{y^{(k)}(0)}{k!}(t-a)^k\right]\right)(x), \qquad (5)$$

мында n=[α]+1, $\alpha\notin N$ жана $\alpha\in N$ болгондо n = α.

Эгерде $\alpha\notin N_0$ болсо, анда дифференцирленүүчү y функциялар үчүн төмөнкү формула орун алат:

$$({}^CD^{\alpha}_{0+}y)(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x\frac{y^{(n)}(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \qquad n=[\alpha]+1 \qquad (6)$$

Жекече учурда 0<α<1 жана a=0 болгон учурда ${}^CD^{\alpha}_{0+}y$ оператору төмөнкү көрүнүшкө келет:

$$({}^{C}D_{0+}^{\alpha}y)(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{0}^{x}\frac{y'(t)dt}{(x-t)^{\alpha}},\qquad (0<x,\ 0<\alpha<1)\tag{7}$$

Бул конструкция 1967-жылы италиялык механик М. Капуто тарабынан кийирилген. Ошондуктан (6) жана (7) туундулар Капутонун бөлчөк туундулары деп аталат.

Бүгүнкү күндө бир ченемдүү (2)-дифференциалдык теңдемелер Адамардын $D^{\alpha_k}y={}^{H}D_{0+}^{\alpha_k}y$ бөлчөк туудулары менен изилдөөлөр жүрүп жатат, мында 0<α – туундунун тартиби. Мындай конструкциялар R+=(0,∞) жарым окто төмөнкү формула менен аныкталат:

$$({}^{H}D_{0+}^{\alpha}y)(x)=\delta^{n}(\partial_{0+}^{n-\alpha}y)(x),\qquad (a<x,\ n=[\alpha]+1)\tag{8}$$

мында $\delta=xD,\ D=d/dx$ – дельта туунду, $\partial_{0+}^{n-\alpha}y$ – 0<α тартиптеги Адамардын бөлчөк интегралы:

$$(\partial_{0+}^{n-\alpha}y)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{x}(\log\frac{x}{t})^{\alpha-1}\frac{y(t)}{t}dt\qquad (0<x)\tag{9}$$

Риман-Лиувиллдин бөлчөк туундусун кармаган жөнөкөй теңдемени карайбыз:

$$(D_{0}^{\alpha}y)(x)=h(x),\quad (0<x),\tag{10}$$

мында α – каалагандай оң сан, h(x) – белгилүү функция, y(x) – изделүүчү функция.

Чыгаруу. (10) - теңдемени чыгаруу үчүн (10) - барабардыктын эки жагына тең Риман-Лиувилдин 0<α тартиптеги (4)- бөлчөк интегралы операторун колдонобуз:

$$y(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{x}\frac{h(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}\quad (0<x).\tag{11}$$

(11) - функция (10) теңдемени канааттандырат, бирок ал теңдеменин жалпы чыгарылышы боло албайт. Теңдеменин жалпы чыгарылышын жазуу үчүн биз төмөнкү касиетти пайдаланабыз:

10) Эгерде f(x) жана g(x) функцияларынын α тартиптеги (n–1<α<n, n∈N) туундулары бирдей болсо, анда төмөнкү катыш орун алат:

$$f(x)=g(x)+\sum_{j=1}^{n}c_{j}x^{\alpha-j}$$

, мында cj – эрктүү турактуулар.

Ошондуктан (10)- теңдеменин жалпы чыгарылышы

$$y(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{x}\frac{h(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}+\sum_{j=1}^{n}c_{j}x^{\alpha-j}\tag{12}$$

болот, жалпы чыгарылыш [α]+1=n турактууну кармашы керек. Ал cj эрктүү турактуулар баштапкы же чек аралык шарттардан аныкталышы мүмкүн.

Мисалы, эгерде $(D_{0}^{3/2}y)(x)=x^{5}$ болсо, анда (12)-нын негизинде

$$y(x)=\frac{1}{\Gamma(3/2)}\int_{0}^{x}\frac{t^{5}dt}{(x-t)^{1-3/2}}+\sum_{j=1}^{2}c_{j}x^{3/2-j}$$

алабыз.

Мындан

$$y(x)=\frac{1}{\Gamma(3/2)}\int_{0}^{x}t^{5}\sqrt{x-t}dt+c_{1}x^{1/2}+c_{2}x^{-1/2}=\frac{\Gamma(6)}{\Gamma(15/2)}x^{13/2}+c_{1}x^{1/2}+c_{2}x^{-1/2}$$

келип чыгат.

Бул жердеги c1 жана c2 турактууларды аныктоо үчүн $(D_{0}^{1/2}y)(0+)$ жана $(D_{0}^{-1/2}y)(0+)$ туундулардын маанилери керек болот.

Белгилеп кетүү керек, Капутонун бөлчөк теңдемеси болгон учурда:

$$({}^{C}D_{0}^{\alpha}y)(x)=\left(D_{0}^{\alpha}\left[y(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^{k}}{k!}y^{(k)}(0+)\right]\right)(x)=h(x),\ 0<x,\ n-1<\alpha\le n$$

чек аралык шарттар $y^{(k)}(0+)$ бүтүн туундуларды колдонуу менен берилет

Эгерде (10)-теңдемеде h(t)≡0 болсо, анда ал теңдеменин чыгарылышы

$$y(x)=\sum_{j=1}^{n}c_jx^{\alpha-j}$$

болот.

Мисалы,

1) $$(D_0^{4/3}y)(x)=0\Rightarrow y(x)=\sum_{j=1}^{2}c_jx^{4/3-j}=c_1x^{1/3}+c_2x^{-2/3}.$$

2) $$(D_0^{7/2}y)(x)=0\Rightarrow y(x)=\sum_{j=1}^{4}c_jx^{7/2-j}=c_1x^{5/2}+c_2x^{3/2}+c_3x^{1/2}+c_4x^{-1/2}.$$

Интегралдык теңдемеге алып келүү:

$\alpha\in(0,1)$ бөлчөк тартиптеги теңдеме үчүн Кошинин маселесин карайбыз:

$$(D_0^{\alpha}y)(x)-ay(x)=h(x),\quad (D_0^{\alpha-1}y)(0+)=b. \tag{13}$$

(13)- теңдемеде $H(x)=ay(x)+h(x)$ белгилөө киийрип, төмөнкү көрүнүштө жазып алабыз:

$$(D_0^{\alpha}y)(x)=H(x), \tag{14}$$

мында $H(x)=ay(x)+h(x)$ функцияны азырынча белгилүү деп эсептейбиз.

Анда (14)-теңдеменин жалпы чыгарылышы $\alpha\in(0,1)$ болгон учурда

$$y(x)=\frac{b}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}+(D_0^{-\alpha}H)(x)$$

болот.

Демек, (13) - Кошинин маселеси

$$y(x)=\frac{a}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x\frac{y(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt+\frac{b}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x\frac{h(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt$$

Вольтерранын экинчи түрдөгү интегралдык теңдемесине тең күчтүү экен.

Удаалаш жакындатуу методу

$\alpha\in(0,1)$ бөлчөк тартиптеги теңдеме үчүн Кошинин маселесин карайбыз:

$$(D_0^{\alpha}y)(x)-ay(x)=h(x),\quad (D_0^{\alpha-1}y)(0+)=b. \tag{15}$$

Кошинин (15)-маселесин Вольтерранын интегралдык теңдемеси менен алмаштырып алабыз:

$$y(x)=\frac{a}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x\frac{y(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt+y_0(x) \tag{16}$$

мында $$y_0(x)=\frac{b}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x\frac{h(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt.$$

Удаалаш жакындатуу методунун идеясына таянып (16)- теңдемени төмөнкү көрүнүштө жазып алабыз:

$$y_m(x)=\frac{a}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x\frac{y_{m-1}(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt+y_0(x),\ m=1,2,3,...$$

Удаалаш ордуна коюуларды аткарабыз:

m = 1 болгон учурда:

$$y_1(x)=\frac{a}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x\frac{y_0(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt+y_0(x)=b\sum_{k=1}^{2}\frac{a^{k-1}x^{\alpha k-1}}{\Gamma(\alpha k)}+\int_0^x\left(\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)h(t)dt,$$

m=2 болгон учурда:

$$y_2(x)=\frac{a}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x\frac{y_1(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt+y_0(x)=b\sum_{k=1}^{3}\frac{a^{k-1}x^{\alpha k-1}}{\Gamma(\alpha k)}+\int_0^x\left(\sum_{k=1}^{2}\frac{a^{k-1}(x-t)^{\alpha k-1}}{\Gamma(\alpha k)}\right)h(t)dt,$$

ушул процессти аналогиялуу түрдө улантып жана закон ченемдүүлүктү байкап, төмөнкүнү жазабыз:

$$y_m(x)=b\sum_{k=1}^{m+1}\frac{a^{k-1}x^{\alpha k-1}}{\Gamma(\alpha k)}+\int_0^x\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{a^{k-1}(x-t)^{\alpha k-1}}{\Gamma(\alpha k)}\right)h(t)dt$$

жана m→∞ де fm(x) → f(x) экендигин эске алып:

$$y(x)=b\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a^{k-1}x^{\alpha k-1}}{\Gamma(\alpha k)}+\int_0^x\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a^{k-1}(x-t)^{\alpha k-1}}{\Gamma(\alpha k)}\right)h(t)dt$$

алабыз. Натыйжада коюлган маселенин чыгарылышы Миттаг-Леффлердин формуласы аркылуу жазылат деген тыянакка келебиз:

$$y(x)=bx^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(ax^{\alpha})+\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(a(x-t)^{\alpha})h(t)dt.$$

Жекече учурда $\alpha=1/2$ болгон учурда, б.а.

$$(D_0^{1/2}y)(x)-ay(x)=h(x),\quad (D_0^{-1/2}y)(0+)=b \tag{17}$$

(4)- маселенин чыгарылышы

$$y(x)=\frac{b}{\sqrt{x}}E_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(a\sqrt{x})+\int_0^x\frac{h(t)}{\sqrt{x-t}}E_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(a\sqrt{x-t})dt$$

болот.

Эгерде теңдеменин тартиби $1<\alpha<2$ болсо, б.а.

$$(D_0^{\alpha}y)(x)-ay(x)=h(x),\quad (D_0^{\alpha-1}y)(0+)=b,\ (D_0^{\alpha-2}y)(0+)=c \tag{18}$$

(18)- маселенин чыгарылышы

$$y(x)=bx^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(ax^{\alpha})+cx^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}(ax^{\alpha})+\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(a(x-t)^{\alpha})h(t)dt$$

болот.

Адабияттар:

1. Oldham K.B., Spanier, J. The Fractional Calculus. - New York-London: Academic Press. 1974.
2. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и поизводные дробного порядка и некоторые их приложения. - Минск: Наука и техника. 1987. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications. - New York: Gordon and Breach. 1993 (Расширенное и дополненное русское издание).
3. Miller K.S., Ross B. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. New York: John Wiley and Sons. 1993.
4. Carpintery A., Mainardi F. (Eds.) Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics. CIAM Cources and Lectures. Vol. 376. Wien: Springer. 1997.