Турсунов Д.А., Абрасим кызы Н., Сагынбек кызы Б., Намазбекова У.А.

СИНГУЛЯРДЫК ЖАНА РЕГУЛЯРДЫК КОЗГОЛГОН МАСЕЛЕЛЕРДИН ӨЗГӨЧӨЛҮКТӨРҮ

Турсунов Д.А., Абрасим кызы Н., Сагынбек кызы Б., Намазбекова У.А.

ОСОБЕННОСТИ РЕГУЛЯРНО И СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЗАДАЧ

Tursunov D., Abrasim kyzy N., Sagynbek kyzy B., Namazbekova U.

FEATURES OF REGULARLY AND SINGULARLY PERTURBED PROBLEMS

УДК: 517.928.2

Макалада сингулярдык жана регулярдык козголгон маселелердин өзгөчөлүктөрү изилденет. Сингулярдык жана регулярдык козголгон маселелер илимдин жана техниканын көптөгөн маселелеринин математикалык моделдеринде кездешет. Кадимки жана жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелер үчүн регулярдык козголгон маселелердин теориясы дээрлик толук изилденген. Практикада сингулярдык козголгон маселелердин жаңы түрлөрү пайда болуу менен бирге ал өзүнчө бир багыт болуп өсүп өнүгүп келүүдө. Бүгүнкү күндө сингулярдык козголгон маселелерди изилдөө математиканын актуалдуу маселелердин бири болуп саналат. Биз макалада жаны «псевдо-сингулярдык козголуу» терминин сунуштайбыз. Акыркы мезгилде кээ бир макалаларда изилденген маселе регулярлык козголууга тиешелүү, бирок макаланын аталышы сингулярдык козголуу. Ошондуктан сунушталып жаткан макала изилдөөчүлөргө тендемеге карап козголууну классификациялаганда пайдасы тиет деген ойдобуз.

Негизги сөздөр: сингулярдык козголуу, теңдеме, маселе, регулярдык козголуу, кичи параметр, дифференциалдык теңдеме, асимптотика, асимптотикалык чыгарылыш, так чыгарылыш, псевдо-сингулярдык козголгон теңдеме.

В статье исследуются особенности регулярно и сингулярно возмущенных задач. Сингулярно и регулярно возмущенные задачи встречаются в математических моделях во многих задач науки и техники. Для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных теория регулярно возмущенных задач почти полностью исследован. С появлением на практике различных видов сингулярно возмущенных задач, оно стало самостоятельным направлением и сегодня бурно развивается. Исследование сингулярно возмущенных задач на сегодня является одним из актуальных проблем математики. В статье мы предлагаем новый термин «псевдо-сингулярное возмущение». Последнее время в некоторых статьях исследуемые задачи относятся к регулярно возмущенным задачам, но в названии написано сингулярное возмущение. Поэтому считаем, что этот термин понадобится исследователям при классификации возмущении уравнения.

Ключевые слова: сингулярное возмущение, уравнение, задача, регулярное возмущение, малый параметр, дифференциальное уравнение, асимптотика, асимптотическое решение, точное решение, псевдо-сингулярно возмущенное уравнение.

The article studies the features of regularly and singularly perturbed problems. Singularly and regularly perturbed problems are found in mathematical models in many problems in science and technology. For ordinary differential equations and partial differential equations, the theory of regularly perturbed problems has been almost completely studied. With the advent of various types of singularly perturbed problems in practice, it has become an independent direction and is rapidly developing today. The study of singularly perturbed problems is one of the most pressing problems in mathematics today. In this article we propose a new term “pseudo-singular perturbation”. Recently, in some articles, the problems under study refer to regularly perturbed problems, but the title says singular perturbation. Therefore, we believe that researchers will need this term when classifying perturbations of the equation.

Key words: singular perturbation, equation, problem, regular perturbation, small parameter, differential equation, asymptotics, asymptotic solution, exact solution, pseudo-singularly perturbed equation.

Введение. Как нам всем известно [1]-[7], математика с помощью математических моделей изучает процессы (явления) происходящие в реальном мире. Все математические модели не полностью описывают соответствующий процесс или явление реального мира. При составлении математической модели исследователи стремятся к тому, чтобы она отражала все наиболее существенные стороны процесса (явления). Но математическая модель должна быть доступной. Связи с этим приходится не учитывать малые факторы. Естественно ставится вопрос о роли этих малых факторов, которых не учитывали. Будет ли их влияние на ход процесса несущественным или существенным. Обычно малые факторы называют малыми параметрами [1].

Приведем интересный факт [2]: В 1846 г. французский астроном Леверье с помощью изучения «неправильностей» в движении планеты Уран предсказал наличие еще одной планеты и указал место и время ее наблюдения. Немецкий астроном Галле по этим расчетам обнаружил новую планету в указанном месте. Позже открытую планету назвали Нептуном. Сам по себе этот факт был триумфом науки XIX века. Что позволило Леверье сделать такое открытие? Изучив неправильности в движении Урана, Леверье понял, что они вызваны возмущением этого движения имеющейся по соседству неизвестной планетой. Если бы во Вселенной было только два тела, скажем, Солнце и Земля, то они двигались бы друг относительно друга так, как это диктует закон всемирного тяготения. Это было бы так называемое невозмущенное движение. Не во Вселенной имеются и другие тела, которые также подчиняются закону всемирного тяготения и возмущают движение Земли вокруг Солнца. Однако эти возмущения малы в силу удаленности планет друг от друга, поэтому они принципиального изменения движения не производят. Но учитывать их приходится, чтобы производить точные предсказания, связанные с движением небесных тел (например, для предсказания затмений, восхода и захода Солнца и т. п.). Реальное движение Земли называют возмущенным движением [2].

Если математической моделью является дифференциальное уравнение, то ставиться вопрос о зависимости решения этого дифференциального уравнения от малого параметра. Уравнение содержащие малый параметр называют возмущенной, а уравнение в которой значение малого параметра приравняли к нулю соответственно невозмущенной [3]-[7]. Например, $y'(x)+\mu y(x)=1$ – возмущенное дифференциальное уравнение, где μ – малый параметр. А соответствующее уравнение $(\mu=0){:}y'(x)=1$ – невозмущенной.

В теории возмущении возмущения условно делят на два класса: регулярные возмущения и сингулярные возмущения. Приведем определение регулярно возмущенной и сингулярной возмущенной задач.

Определение [1, 7 стр]. Задача $A\varepsilon$ называется регулярно возмущенной, если

$$\sup_D \left\| u_\varepsilon(x) - u_0(x) \right\| \to 0, \text{ при } \varepsilon \to 0,$$

в противном случае задача $A\varepsilon$ называется сингулярно возмущенной, где $u_\varepsilon(x), u_0(x)$ – соответственно решения возмущенной и невозмущенной задач, рассматриваемые в области D.

Несмотря на такое определение, в некоторых работах считают, что если малый параметр присутствует перед старшей производной дифференциального уравнения, то эта задача сингулярно возмущенная. Мы хотим сказать и показать, что присутствие малого параметра перед старшей производной дифференциального уравнение не является достаточным и необходимым условиям. Приведем несколько примеров.

Пример 1. Рассмотрим задачу

$$\varepsilon y'_\varepsilon(x) + y_\varepsilon(x) = 1,\ x \in [0, \infty),\ y_\varepsilon(0) = 1.$$

На первый взгляд начальная задача – сингулярно возмущенная, так как малый параметр присутствует перед производной. А если построит решения возмущенной задачи: $y_\varepsilon(x) = 1$ и невозмущенного уравнения: $y_0(x) = 1$ и оценить разность, тогда получим, что данная задача не сингулярно возмущенная, а регулярно возмущенная задача в рассматриваемой области.

Пример 2. Рассмотрим задачу

$$\varepsilon y'_\varepsilon(x) + (t+i) y_\varepsilon(x) = \varepsilon(t+i),\ t \in [-1,1],\ i = \sqrt{-1}, \quad y_\varepsilon(-1) = \varepsilon.$$

Решение возмущенной задачи: $y_\varepsilon(x) = \varepsilon$. А решение невозмущённой задачи: y0(x) = 0. На основании выше приведенного определения можно считать, что данная задача – регулярно возмущенная.

Предлагаем следующее определение:

Определение. Если малый параметр присутствует перед старшей производной дифференциального уравнения, но решение возмущенной задачи на всей области включая границы области введет себя как решение регулярно возмущенной задачи, то задачу будем называть псевдо-сингулярно возмущенной задачей.

Псевдо от греч. ψεῦδος – ложь, вымысел.

Выше приведенных задач можно называть псевдо-сингулярно возмущенными.

На практике встречаются и такие задачи в которых малый параметр присутствует «регулярно», т.е. не перед старшей производной дифференциального уравнения, но возмущение сингулярное.

Пример 3. Рассмотрим задачу

$$y'_{\varepsilon}(x)=\varepsilon,\ \ x\in[0,\infty),\qquad y_{\varepsilon}(0)=1.$$

Очевидно, что функция yε(x)=xε+1 является решением возмущенной задачи, а y0(x)=1 – решение не возмущенной задачи. По определению, при достаточно больших значениях x (например, x>1/ε) задача является сингулярно возмущенной.

Литература:

1. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений: Науч.-теор. пособие. – М.: Высшая школа, 1990. – 208 с.
2. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 400 с.
3. Кожобеков К.Г., Турсунов Д.А. Асимптотика решения сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений с точками поворота. – Ош.: Билим, 2019. – 80 с.
4. Alymkulov K., Tursunov D.A. “PerturbationTheory” (Perturbed differential equations with singularly points). – New York, 2017. 1–43.
5. Турсунов Д.А., Эркебаев У.З. Асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для бисингулярно возмущенных эллиптических уравнений второго порядка в кольце. – Ош: Билим, 2016. – 112 с.
6. Турсунов Д.А. Асимптотика решения бисингулярно возмущенных обыкновенных и эллиптических дифференциальных уравнений. – Ош: Билим, 2013. – 150 с.
7. Carsten Hartmann Singularly perturbed differential equations (Lecture notes on singularly perturbed differential equations (edited by Sebastian John)). https://page.mi.fu-berlin.de/chartman/spde.pdf