Толубаев Ж.О., Ахмедова С.З.

СЫЗЫКТУУ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕНИН $C^2_{[0,1]}$ МЕЙКИНДИКТЕГИ КОШИ МАСЕЛЕСИН ЧЫГАРЫЛЫШЫНЫН АСИМПТОТИКАСЫ

Толубаев Ж.О., Ахмедова С.З.

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ $C^2_{[0,1]}$

Tolubaev Zh., Akhmedova S.

ASYMPTOTICS OF SOLVING THE CAUCHY PROBLEM FOR LINEAR THE INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION IN SPACE $C^2_{[0,1]}$

УДК: 370/247-91

Бул илимий макалада төмөнкү скалярдык интегро-дифференциалдык теңдемелер $\varepsilon\frac{dy}{dt}+Ay=\lambda\int_0^1 K(t,s)y(s)(1-s)^{-2}ds+f(t)$ $y(0)=b$ баштапкы шарты менен каралат. Макалада бул маселенин эң кичине $\varepsilon>0$ оң саны үчүн чыгарылышы жөнүндө коюлган жана эгерде $(\varepsilon>0)$ болгондо чыгарылышы болсо, анда анын чыгарылышы менен кубулган теңдеменин $(\varepsilon>0)$ чыгарылышынын ортосунда кандай байланыш бар. $C^2_{[0,1]}$ функциялар классында интегралдык теңдеме жетишерлик кичине $|\lambda|$ үчүн уникалдуу үзгүлтүксүз чечимге $v=v(t)$ ээ экени далилденген. Бул маселенин чыгарылышы $y_\varepsilon(t)=v(t)+\Pi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)+\eta(t)$ түрүндө жазылган, мында $v(t)$-теңдеменин чыгарылышы, чекиттеги чектик катмардын түрүнүн функциясы $\Pi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$, $t=0$, $\eta(t)$– калган мүчөсүнүн түрүнүн функциясы. Ордуна коюу ыкмасы маселенин чечүү жолун табуу үчүн колдонулган. Ошондой эле P_ε оператор $C^2_{[0,1]}$ мейкиндикти өзүнө чагылдырары далилденген, б.а. ал оператор. $C^2_{[0,1]}$ мейкиндикте оператордун нормалары да аныкталган. Оператордун нормаларынын $C^2_{[0,1]}$ мейкиндиктеги чектелүүлүгү катары $\|P_\varepsilon(\eta)\|_{2,\varepsilon}\le\gamma_2\|\eta\|_{2,\varepsilon}$ далилденип, оператордун нормаларынын $\|\eta\|_{\tau,\varepsilon}\le|\lambda|\gamma_1\|\eta\|_{2,\varepsilon}\varepsilon\|F_\varepsilon\|$ $\|\eta\|_{2,\varepsilon}\varepsilon\|F_\varepsilon\|_{2,\varepsilon}|\lambda|/(1-\gamma_2)\sim O(\varepsilon),\varepsilon\to 0$ баасы алынган.

Негизги сөздөр: скалярдык интегро-дифференциалдык теңдеме, кубулбаган теңдеме, параметр, жүк теңдемелери, үзгүлтүксүз чечим, континуум механикасы, чек ара катмар тибиндеги функция, калган мүчө тибиндеги функция, норма.

В данной научной работе рассматриваются скалярные интегро-дифференциальные уравнения $\varepsilon\frac{dy}{dt}+Ay=\lambda\int_0^1 K(t,s)y(s)(1-s)^{-2}ds+f(t)$ с начальным условием $y(0)=b$. Ставится задача о разрешимости данной задачи при сколь угодно малом $\varepsilon>0$ и если разрешима, то в какой связи находится ее решение с решением вырожденного $(\varepsilon>0)$ уравнения. Доказано, что в классе функций $C^2_{[0,1]}$ интегральное уравнение при достаточно малом $|\lambda|$ имеет единственное непрерывное решение $v=v(t)$. Решение задачи данной задачи пишется в виде $y_\varepsilon(t)=v(t)+\Pi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)+\eta(t)$ где $v(t)$ – решение уравненения, $\Pi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$ – функция типа пограниченного слоя в точке $t=0$, $\eta(t)$ – функция типа остаточного члена. Для нахождении решении задачи применена метод подстановки. А также доказанно что оператор P_ε отражает пространство $C^2_{[0,1]}$ в себя, т.е. он является оператором. Определены также

нормы оператора в пространстве $C^2_{[0,1]}$. Доказана ограниченность норм оператора в пространстве $C^2_{[0,1]}$ так, как $\|P_\varepsilon(\eta)\|_{2,\varepsilon} \le \gamma_2\|\eta\|_{2,\varepsilon}$, и получена оценка норм оператора $\|\eta\|_{\tau,\varepsilon} \le |\lambda|\gamma_1\|\eta\|_{2,\varepsilon} + \varepsilon\|F_\varepsilon\|$ $\|\eta\|_{2,\varepsilon} \le \varepsilon\|F_\varepsilon\|_{2,\varepsilon}|\lambda|/(1-\gamma_2) \sim O(\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$

Ключевые слова: скалярные интегро-дифференциальные уравнения, вырожденное уравнение, параметр, конечная часть, нагрузки уравнения, непрерывное решение, механике сплошных сред, функция типа пограниченного слоя, функция типа остаточного члена, норма.

In this scientific work, scalar integro-differential equations are considered $\varepsilon\dfrac{dy}{dt} + Ay = \lambda\int_0^1 K(t,s)y(s)(1-s)^{-2}ds + f(t)$ with initial condition $y(0)=b$. The problem is posed of the solvability of this problem for an arbitrarily small $\varepsilon > 0$ and if solvable, then what is the connection $(\varepsilon > 0)$ between its solution and the solution of the $C^2_{[0,1]}$ degenerate equation. It is proved that in the class of functions the integral equation has a $|\lambda|$ unique continuous solution for sufficiently small $v = v(t)$. He solution to the problem of this problem is written in the form $y_\varepsilon(t) = v(t) + \Pi\left(\dfrac{t}{\varepsilon}\right) + \eta(t)$ where is the solution of the equation, is the $\Pi\left(\dfrac{t}{\varepsilon}\right)$ function of the type of the boundary layer at the point $v(t)$, is the function of the type of the remainder term. The substitution method was used to find the solution to the problem. And also it is proved $C^2_{[0,1]}$ that the operator reflects the space into itself, i.e. he is the operator. The norms of the operator in the space are also defined $C^2_{[0,1]}$. The $C^2_{[0,1]}$ roundedness' of the norms of the operator in the space $\|P_\varepsilon(\eta)\|_{2,\varepsilon} \le \gamma_2\|\eta\|_{2,\varepsilon}$ is proved as $\|\eta\|_{\tau,\varepsilon} \le |\lambda|\gamma_1\|\eta\|_{2,\varepsilon} + \varepsilon\|F_\varepsilon\|$, and an estimate for the norms of the operator is obtained $\|\eta\|_{2,\varepsilon} \le \varepsilon\|F_\varepsilon\|_{2,\varepsilon}|\lambda|/(1-\gamma_2) \sim O(\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$.

Key words: scalar integro-differential equations, degenerate equation, parameter, finite part, equation loads, continuous solution, continuum mechanics, boundary layer type function, remainder term type function, norm.

В работе рассматриваются скалярные интегро-дифференциальные уравнения:

$$\varepsilon\frac{dy}{dt} + Ay = \lambda\int_0^1 K(t,s)y(s)(1-s)^{-2}ds + f(t) \qquad (1)$$

с начальным условием

$$y(0) = b, \qquad (2),$$

где $A > 0$ – постоянная, λ – некоторый параметр.

Ставится задача о разрешимости (1), (2) при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ и если разрешима, то в какой связи находится ее решение с решением вырожденного $(\varepsilon > 0)$ уравнения

$$Ay = \lambda \Big) \!\! \int_0^1 K(t,s)v(s)(1-s)^{-2}ds + f(t)$$

Знак $\Big)$ означает конечную часть написанного расходящегося интеграла

$$q = \lambda \Big) \!\! \int_0^{1-\varepsilon} \frac{h(s)}{(1-s)^{-2}}ds = h(0) - h'(0) - \int_0^1 h''(s)\ln(1-s)ds$$

где слагаемые

$$\frac{h(1)}{\varepsilon} - h'(1)\ln\varepsilon$$

стремящиеся к бесконечности при $\varepsilon \to 0$ отбрасываются [1, 2].

Тогда уравнение (1) перепишем в виде

$$\varepsilon\frac{dy}{dt} + Ay = \lambda K(t,0)y(0) - \lambda\left[K(t,s)y(s)\right]_s^1 =$$
$$= 1 + \lambda\int_0^1 \left[K(t,s)y(s)\right]_s'' \ln(1-s)ds + f(t) \qquad (3)$$

где $y(1),\ y''(1)$ – называются нагрузками уравнения.

Доказано, что в классе функций $C_{[0,1]}^2$ интегральное уравнение при достаточно малом $|\lambda|$ имеет единственное непрерывное решение $v = v(t)$ [3].

Интегральное уравнение вида (3) встречается в механике сплошных сред [4].

Решение задачи (1), (2) пишется в виде

$$y_\varepsilon(t) = v(t) + \Pi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) + \eta(t) \qquad (4)$$

где $v(t)$ - решение уравнения (3), $\Pi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$ – функция типа пограниченного слоя в точке $t = 0$, $\eta(t)$ – функция типа остаточного члена.

Подстановкой (4) задача (1), (2) приводиться к виду

$$\varepsilon\eta' + A\eta = \lambda\int_0^1 K(t,s)\eta(s)(1-s)^{-2}ds + F(t) \qquad (5)$$

С начальным условием $\eta(0) = 0$, где

$$F(t) = -\varepsilon v(\varepsilon) + \lambda\int_0^1 K(t,s)\Pi\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)(1-s)^{-2}ds \qquad (6)$$

Кроме того

$$\ddot{\Pi}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) + A\Pi\left(\frac{t}{s}\right) = 0 \qquad (7)$$

$$\Pi(0) = b - v(0) \qquad (8)$$

Рассмотрим задачу (7), (8) из которой определим функцию [5].

$$\Pi\left(\frac{t}{s}\right) = \left[b - v(0)\right]e^{-A t/s}$$

Тогда имеем

$$\lambda\int_0^1 K(t,s)\Pi\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)(1-s)^{-2}ds = \lambda\left[b - v(0)\right]\int_0^1 K(t,s)e^{\frac{-As}{\varepsilon}}(1-s)^{-2}ds =$$
$$= \lambda\left[b - v(0)\right]\left[K(t,0) + K(t,1)e^{\frac{-A}{\varepsilon}}\right]_0^1 - \lambda\frac{A^2}{\varepsilon^2}\int_0^1\left[K_{ss}''(t,s)e^{\frac{-As}{\varepsilon}}\ln(1-s)\right]ds +$$
$$+ 2\lambda\frac{A}{\varepsilon}\int_0^1 K_s'{}'(t,s)e^{\frac{-As}{\varepsilon}}\ln(1-s)ds + \lambda\int_0^1 K(t,s)e^{\frac{-As}{\varepsilon}}\ln(1-s)ds$$

Пусть $0 < \delta < 1, |h(t)| \le N$ при $0 < t < \delta$

$$\left|\int_0^{1-\varepsilon} h(s) e^{\frac{-As}{\varepsilon}} \ln(1-s) ds\right| = \left|\int_0^{\delta} h(s) e^{\frac{-As}{\varepsilon}} \ln(1-s) ds + \int_0^{1} h(s) e^{\frac{-As}{\varepsilon}} \ln(1-s) ds\right| \le$$

$$\le N \int_0^{\delta} \ln(1-s) ds$$

Тогда величины интегралов

$$\frac{\lambda}{\varepsilon} \int_0^1 K'_s(t,s) e^{\frac{-As}{\varepsilon}} \ln(1-s) ds$$

и

$$\lambda \frac{A^2}{\varepsilon^2} \int_0^1 K(t,s) e^{\frac{-As}{\varepsilon}} \ln(1-s) ds$$

будут ограниченными функциями по аргументу t при $\varepsilon \to 0$.

Следовательно, имеем, что $|F(t)| \le \delta N^*$ где $N^* - cons$.

Таким образом, переходим к рассмотрению задачи (5), (6). Это задача эквивалентна интегральному уравнению

$$\eta(t) = \frac{\lambda}{\varepsilon} \int_0^t e^{-A(t-s)} \left[\Big) \int_0^1 K(t,\delta) \eta(v) (1-v)^{-2} dv \right] ds + \varepsilon F_\varepsilon(t) \qquad (9)$$

где

$$F_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{-A(t-s)} F(s) ds$$

Правую часть уравнения (9) обозначим через оператор

$$P_\varepsilon[\eta(t)] = \frac{\lambda}{\varepsilon} \int_0^t e^{-A(t-s)} \left[\int_0^1 K(t,v) \eta(v) (1-v)^{-2} dv \right] ds$$

Далее покажем, что оператор P_ε отражает пространство $C^2_{[0,1]}$ в себя, т.е. он является оператором. Введем в рассмотрение следующие нормы в пространстве $C^2_{[0,1]}$

$$\|\eta\|_2 = \max_{t\in[0,1]} \left\{ \sup_{[0,1]} |\eta(t)|, \sup_{[0,1]} |\eta'(t)|, \sup_{[0,1]} |\eta''(t)| \right\}$$

кроме того

$$\|\eta\|_{2,\varepsilon} = \max_{t\in[0,1]} \left\{ \sup_{[0,1]} |\eta(t)|, \sup_{[0,1]} |\eta'(t)| \Big/ \left(1 + 1/\varepsilon e^{\frac{-At}{\varepsilon}} \right) \right\}$$

Ясно, что при

$$0 < \delta < 1, \ \|\eta\|_2 \le \|\eta\|_{2,\varepsilon}$$

Имеем

$$P_\varepsilon[\eta(t)] = \lambda \int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-A(t-s)/\varepsilon} \left[\int_0^t K(t,v) \eta(v) (1-v)^{-2} dv \right] ds$$

$$M^*\|\eta\|_{2,\varepsilon} = \left|\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t e^{-A(t-s)/\varepsilon} ds\right| \le \gamma_1\|\eta\|_{r,\varepsilon}$$

где $\gamma_1 = M^* / A$.

$$M = \max_{t\in[0,1]}|K(t,s)|$$

$$M^* = |K(t,0)\eta(0)| + |K'_\eta(t,0)| + 4M\int_0^1 \ln(1-s)ds$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t e^{\frac{-A(t-s)}{\varepsilon}} ds = \frac{1}{\varepsilon} e^{\frac{-At}{\varepsilon}}\int_0^1 \left|e^{\frac{-As}{\varepsilon}}\right| ds \le \left|e^{\frac{-At}{\varepsilon}} \frac{\varepsilon}{A}\right|_0^1 \left[\frac{1}{\varepsilon} e^{\frac{-As}{\varepsilon}}\right]_0^1 = \frac{1}{A}\left(1 - e^{\frac{-At}{\varepsilon}}\right) \le \frac{1}{A}$$

$1/e^{\frac{A}{S}} \to 0,\ \varepsilon \to 0$

$$\left|\frac{dP_\varepsilon}{dt}\right| \le \gamma_1\|\eta\|_{\tau,\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} e^{\frac{-At}{\varepsilon}}\gamma_1\|\eta\|_{2,\varepsilon} = \gamma_1\|\eta\|_{2,\varepsilon}\left(1 + 1/\varepsilon e^{\frac{-At}{\varepsilon}}\right)$$

$$\left|\frac{d^2P_\varepsilon}{dt^2}\right| \le \gamma_1\|\eta\|_{\tau,\varepsilon}\left(1 + 1/\varepsilon e^{\frac{-At}{\varepsilon}} + 1/\varepsilon^2 e^{\frac{-At}{\varepsilon}}\right)$$

Следовательно, $\|P_\varepsilon(\eta)\|_{2,\varepsilon} \le \gamma_2\|\eta\|_{2,\varepsilon}$.
Этот факт означает, что из уравнения (9), оценивается

$$\|\eta\|_{\tau,\varepsilon} \le |\lambda|\gamma_1\|\eta\|_{2,\varepsilon} + \varepsilon\|F_\varepsilon\|$$

$$\|\eta\|_{2,\varepsilon} \le \varepsilon\|F_\varepsilon\|_{2,\varepsilon}|\lambda|/(1-\gamma_2) \sim O(\varepsilon),\quad \varepsilon \to 0$$

Литература:

1. Васильева А.Б.,Бутузов В.Ф.«Асимптотические методь в теории сингулярных возмущений».–Москва: Наука, 1990.
2. Иманалиев М. «Асимптотические методь в теории сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных систем». –Фрунзе,1972.
3. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. – М: Наука, 1965.
4. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977.
5. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики.–Новосибирск:СО АН СССР, 1962.