**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ**

**КЫРГЫЗСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. И. РАЗЗАКОВА**

КАФЕДРА «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА»

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Методическое указание по организации самостоятельной

работы для студентов ФТ и М

Бишкек 2012

РЕКОМЕНДОВАНО
на заседании кафедры
«Высшая математика»

им. Р. Усубакунова

Протокол № 7 от 03.03.2012г.

ОДОБРЕНО
Методическим Советом
энергетического факультета

Протокол № от

УДК: 512.

Составители: ПАХЫРОВ З.П., ТОКТОГУЛОВА А.Ш., БОНДАРЕНКО Л.К.

«Элементы теории функции комплексного переменного».

Методическое указание по организации самостоятельной работы для студентов ФТиМ

Сост.: Пахыров З.П., Токтогулова А.Ш., Бондаренко Л.К. - Б.: ИЦ «Текник», 2012,- 48с.

Методическое указание написано в соответствии с программой. Содержит краткие теоретическое сведения и большое количество подробно решенных типовых примеров, список учебной литературы, задания для контрольных работ. Предназначено для студентов 1 курса факультета транспорта и машиностроении. Данное пособие будет полезно также начинающим преподавателям.

Табл.: Библиогр.: 8 наименов.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент Сулайманов Б.Э.

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

§1. Комплексные числа.

Определение. Комплексным числом z называется выражение $z = x + iy$, где x и y – действительные числа, i – мнимая единица, определяемая условием $i^2 = -1$. Число x называется действительной частью комплексного числа z и обозначается $x = Rez$, число y называется мнимой частью комплексного числа $y = Imz$.

Число $\overline{z} = x - iy$ называется с о п р я ж е н н ы м к числу $z = x + iy$. У сопряженных чисел равны действительные части, а мнимые отличаются только знаком.

Комплексное число $z = x + iy$ можно изобразить точкой на плоскости xOy, имеющий координаты (x, y), при этом на оси Ox откладываются действительные числа $z = x$, а на оси Oy чисто мнимые - $z = iy$ (рис. 1).

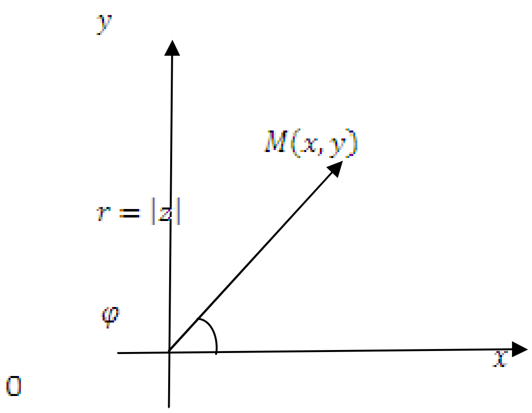


Рис. 1

Отрезок от начало координат до точки, изображающей данное комплексное число $z = x + iy$, есть радиус – вектор. Длина его равная $\sqrt{x^2 + y^2}$, называется м о д у л е м комплексного числа, обозначается $|z|$ или

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}. \qquad (1)$$

Угол φ, образованный радиусом – вектором r с положительным направлением действительной оси Ox, называется а р г у м е н т о м числа z и обозначается

$$\varphi = Argz. \qquad (2)$$

Он определяется неоднозначно. Все его значения отличаются друг от друга на слагаемые, кратные 2π, т.е.

$$Argz = argz + 2k\pi, \quad (k = 0, \pm1, \pm2, \ldots),$$

где $argz$ есть наименьшее по абсолютной величине значение $Argz$ и является его г л а в н ы м з н а ч е н и е м, определяется условием

$-\pi < argz \leq \pi.$

Все значения аргумента φ удовлетворяют соотношениям

$$tg\varphi = \frac{y}{x}, \qquad sin\varphi = \frac{y}{r}, \; cos\varphi = \frac{x}{r}.$$

Откуда

$$argz = \begin{cases} arctg\frac{y}{x} \text{ для точек } z \text{ из I и IV четвертей} \\ arctg\frac{y}{x} + \pi \text{ для точек } z \text{ из II четверти} \\ arctg\frac{y}{x} - \pi \text{ для точек } z \text{ из III четверти} \end{cases}.$$

Так как $x = r\,cos\varphi$ и $y = rsin\varphi$, то тригонометрическая форма комплексного числа записывается

$$z = r(cos\varphi + isin\varphi), \qquad (3)$$

а показательная, используя формулы Эйлера

$$cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i},$$

запишется

$$z = re^{i\varphi}. \qquad (4)$$

Умножение и деление комплексных чисел выполняется по следующим формулам

а)

$$z_1 \cdot z_2 = [r_1(cos\varphi_1 + isin\varphi_1)] \cdot [r_2(cos\varphi_2 + isin\varphi_2)] =$$

$$= r_1 \cdot r_2[cos(\varphi_1 + \varphi_2) + isin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

или $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$;

б)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(cos\varphi_1 + isin\varphi_1)}{r_2(cos\varphi_2 + isin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}[cos(\varphi_1 + \varphi_2) + isin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

или $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$.

При возведении в n степень комплексного числа $z = r(cos\varphi + isin\varphi)$ надо возвести в эту степень модуль, а аргументы умножить на показатель данной степени, т.е.

$$z^n = r^n(cos\varphi + isin\varphi). \qquad (5)$$

Отсюда получается формула Муавра

$(cos\varphi + isin\varphi)^n = (cosn\varphi + isinn\varphi)$.

Пример 1. Вычислить $z_1 = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^3$ и изобразить на чертеже,. Найдем модуль и аргумент комплексного числа $z = 1 + i\sqrt{3}$.

$x = 1$, $y = \sqrt{3}$, $r = \sqrt{1+3} = 2$, т.к. $x > 0$, $y > 0$, комплексное число z находится в первой четверти, аргумент будет равен

$\varphi = argz = argtg\frac{y}{x} = arctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$.

Комплексное число $z = 1 + i\sqrt{3}$ в тригонометрической формезапишется

$z = 2\left(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}\right)$.

Возведем данное число в 3-ю степень

$z_1 = z^3 = 2^3\left(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}\right)^3 = 8\left[\left(cos3\cdot\frac{\pi}{3}\right) + i\left(sin3\cdot\frac{\pi}{3}\right)\right] =$

$= 8(cos\pi + isin\pi) = -8$

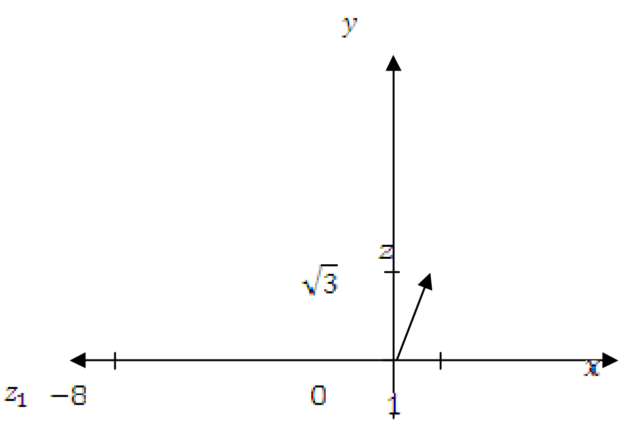


Рис. 2

Пример 2. Вычислить $z_1 = (\sqrt{3} - i)^5$. Модуль данного числа $r = 2$, т.к. $x > 0$, $y < 0$, то число z в четвертой четверти, аргумент

$$\varphi = arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}.$$

Возведем данное число в пятую степень

$$z^5 = 2^5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)^5 = 32\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + isin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= 32\left(\cos\left(-\pi + \frac{\pi}{6}\right) + isin\left(-\pi + \frac{\pi}{6}\right)\right) = 32\left(-\cos\frac{\pi}{6} - isin\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= 32\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = -16(\sqrt{3} + i).$$

Для извлечения корня n –й степени из комплексного числа надо число записать в тригонометрической форме и воспользоваться формулой

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \qquad (6)$$

где r –модуль комплексного числа, φ– аргумент, n –различных значений корня. n –степени из некоторого комплексного числа z, изображаются на плоскости комплексногопеременноготочками, лежащими на одной и то же окружности с радиусом $\sqrt[n]{r}$ и центром в начале координат.

Пример 3. Найти все значения корня $\sqrt[4]{1 - \sqrt{3}i}$ и построить их на комплексной плоскости.

Найдем модуль и аргумент комплексного : $r = \sqrt{1+3} = 2$, т.к. $x < 0, y < 0$, то $\varphi = arctg\left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right) + (-\pi) = -\frac{2\pi}{3}$

$$\sqrt[4]{-1 - \sqrt{3}i} = \sqrt[4]{2}\left(cos\frac{-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k}{4} + isin\frac{-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k}{4}\right).$$

Полагая $k = 0, 1, 2, 3$ найдем

$$z_0 = \sqrt[4]{-1 - i\sqrt{3}} = \sqrt[4]{2}\left(cos\frac{-\frac{2\pi}{3}}{4} + isin\frac{-\frac{2\pi}{3}}{4}\right) =$$

$$= \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} - isin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right),$$

(при $k = 0$);

$$z_1 = \sqrt[4]{-1 - \sqrt{3}i} = \sqrt[4]{2}\left(cos\frac{-\frac{2\pi}{3} + 2\pi}{4} + isin\frac{-\frac{2\pi}{3} + 2\pi}{4}\right) =$$

$$= \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt[4]{2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$ (при $k = 1$);

$$z_2 = \sqrt[4]{-1 - \sqrt{3}i} = \sqrt[4]{2}\left(cos\frac{-\frac{2\pi}{3} + 4\pi}{4} + isin\frac{-\frac{2\pi}{3} + 4\pi}{4}\right) =$$

$$= \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + isin\frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt[4]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right),$$ (при $k = 2$);

$$z_3 = \sqrt[4]{-1 - \sqrt{3}i} = \sqrt[4]{2}\left(cos\frac{-\frac{2\pi}{3} + 6\pi}{4} + isin\frac{-\frac{2\pi}{3} + 6\pi}{4}\right) =$$

$$= \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + isin\frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt[4]{2}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$ (при $k = 3$).

Построим полученные точки на чертеже (рис. 3)

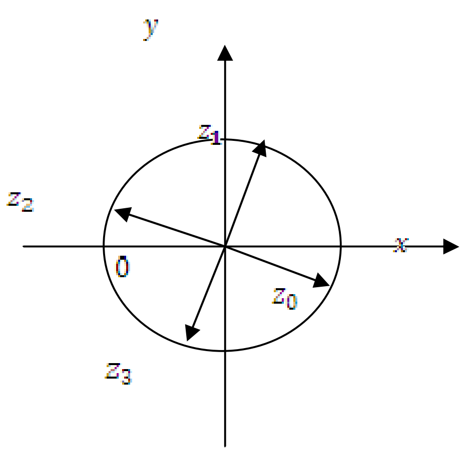


Рис.3

Примеры для упражнений.

Найти все значения корней указанной степени из следующих комплексных чисел:

1. $\sqrt[9]{-i}$, 2. $\sqrt[6]{-64}$, 3. $\sqrt[3]{-\sqrt{3}-i}$, 4. $\sqrt[10]{i}$, 5. $\sqrt{2-2\sqrt{3}i}$, 6. $\sqrt[4]{16i}$.

Возвести в указанную степень следующие комплексные числа:

7. $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{20}$, 8. $(2-2i)^7$, 9. $\left(-\sqrt{3}+i\right)^4$, 10. $(-i)^6$.

Ответы: 1. $-i$; $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\pm i\frac{1}{2}$; $\pm cos10^0 - isin10°$; $\pm cos50° - isin50°$;

$\pm cos70° - isin70°$;

2. $\pm\sqrt{3}+i$; $\pm 2i$; $\pm\sqrt{3}-i$;
3. $\sqrt[3]{2}(cos70° + isin70°)$; $-\sqrt[3]{2}(cos10° + isin10°)$; $\sqrt[3]{2}(cos50° - isin50°)$;
4. $\pm(cos9° + isin9°)$; $\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$; $\pm(cos81° + isin81°)$;

$\pm(cos63° - isin63°)$; $\pm(cos27° - isin27°)$;

5. $\pm\left(\sqrt{3}-i\right)$; 6. $2(\pm cos22{,}5° \pm isin22{,}5°)$; $2(\pm cos22{,}5° \pm isin22{,}5°)$;

7. $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$; 8. $2^{10}(1+i)$; 9. $-8-8\sqrt{3}i$; 10. -1.

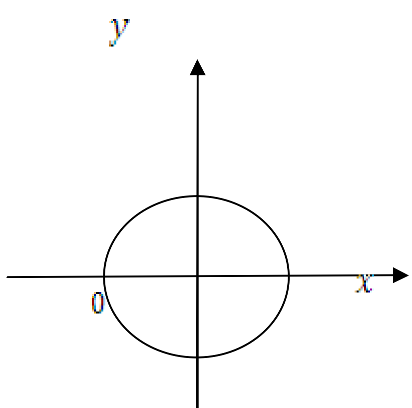
§2. Геометрическое изображение линии и областей на комплексной плоскости

С помощью комплексных чисел можно задавать различные множества точек на плоскости z.

Определить, какие линии заданы следующими уравнениями, и начертить их.

Пример 1. $|z| = 2$.

Зная, что, $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$, получим уравнение $\sqrt{x^2+y^2} = 2$ или $x^2+y^2 = 4$, что представляет окружность радиуса 2, с центром в начале



координат (рис.4).

Пример 2. $Imz = 3$.

По определению комплексного числа $Imz = y$, т.е. $y = 3$. Это прямая, параллельна оси $0x$ (рис.5)

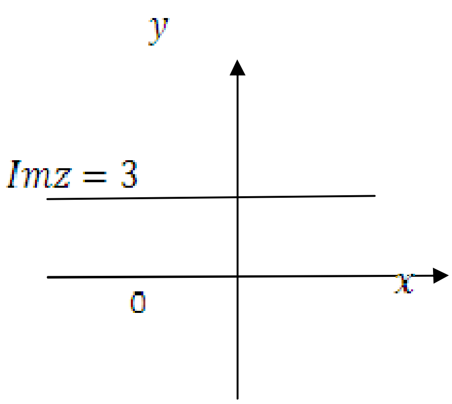


Рис.5

Пример 3. $Rez = -2$.

Так как $Rez = x$, то из условия следует $x = -2$, это прямая, параллельна оси Oy (рис.6).

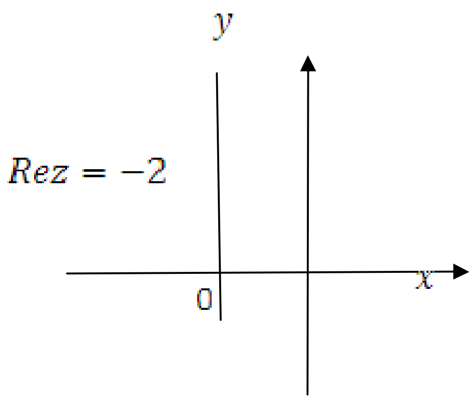


Рис. 6

Пример 4. $Imz^2 = 2$. Так как $z = x + iy$, то имеем

$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$; $Imx^2 = 2xy$.

Поэтому $2xy = 2$; $y = \frac{1}{x}$ – гипербола (рис.7).

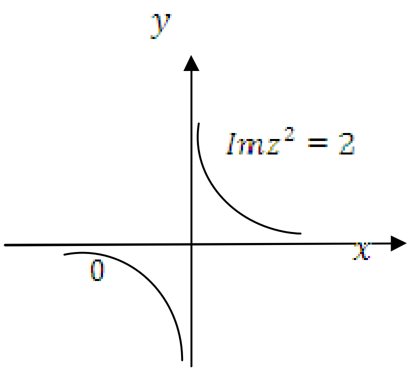


Рис. 7

Пример 5. $arg z = \frac{2\pi}{3}$.

По условию $\varphi = arg z = \frac{2\pi}{3}$,

следовательно, все его точки множества

лежат на одном луче $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ (рис.8).

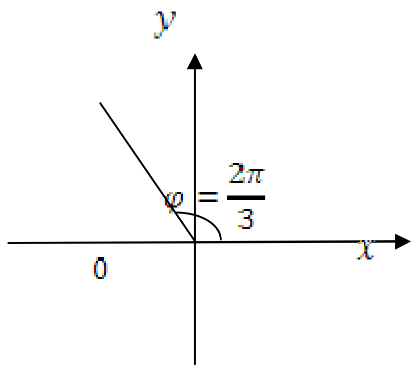


Рис. 8

Определить множество точек, удовлетворяющих данным неравенствам, и построить их на плоскости.

Пример 6. $|z| < 5$.

Неравенство $|z| < 5$ означает, что

расстояние от точки до начала координат

должно быть меньше 5. Этому условию

удовлетворяют точки круга с центром

в начале координат радиуса 5, за исклю-

чением точек границы (рис.9).

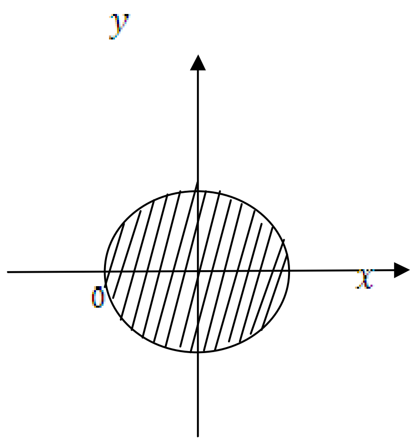


Рис.9

Пример 7. $|z - 2i| > 2$.

Неравенство $|z - 2i| > 2$ означает, что

расстояние от точек z до точки $z_0 = 2i$,

больше 2, следовательно, это множество

точек расположено вне круга радиуса 2 с

центром в точке $z_0 = 2i$ (рис.10).

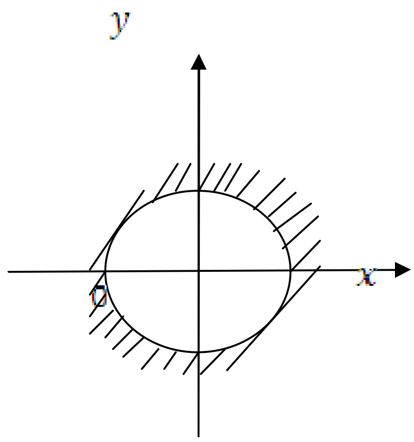
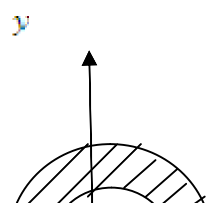


Рис.10

Пример 8. $2 \leq |z - 1 + i| < 3$.



Данное множество точек должно удовлетворять одновременно двум условиям: $|z-1+i| \geq 2$ и $|z-1+i| < 3$; первое условие определяет внешность круга, включая окружность радиуса 2, с центром в точке $z_0 = 1 - i$, а второе – внутреннюю часть круга радиуса 3, с тем же центром, исключая окружность. Искомое множество есть кольцо (рис.11).

Пример 9. $\frac{\pi}{6} < argz < \frac{3\pi}{4}$.

Множество искомых точек должно совпадать с точками угла вершиной в начале координат, заключенного между лучами $\varphi = \frac{\pi}{6}$ и $\frac{3\pi}{4}$ (рис.12).

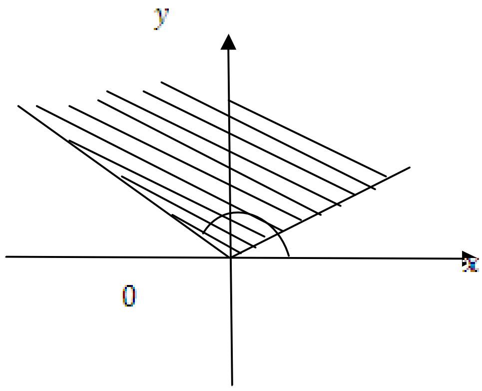


Рис. 12

Пример 10. $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| \leq 1$.

Освободимся от знаменателя $|z-1| \leq |z+1|$, т.к. $z = x + iy$, то

$|z-1| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$;

$|z+1| = |x+iy+1| = |(x+1)+iy| =$

$= \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$;

$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} \leq \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$.

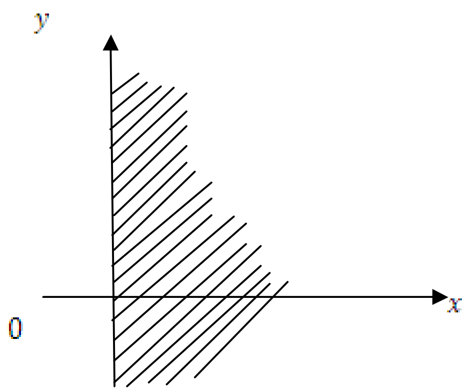


Рис. 13

Возведя в квадрат обе части неравенства, получим $(x-1)^2+y^2 \le (x+1)^2++y^2$ или $-2x \le 0, x \ge 0$ –это множество точек, расположенных в правой полуплоскости вместе с осью $0y$ (рис.12).

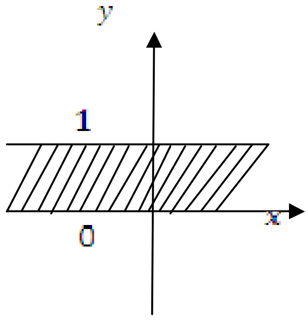
<u>Примеры для упражнений.</u>

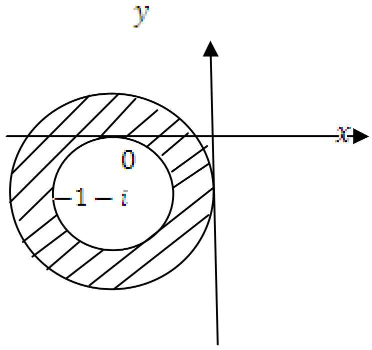
Построить множество точек на комплексной плоскости.

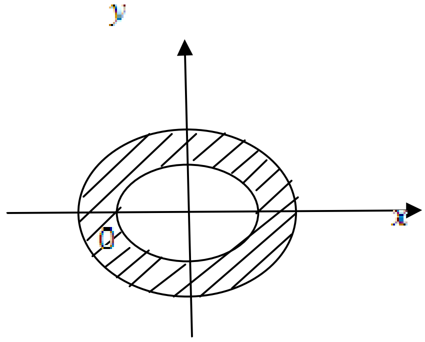
1. $0 \le Imz \le 1$; 2. $1 \le |z+2+i| < 2$; 3. $4 \le |z-1|+|z+1| \le 8$;

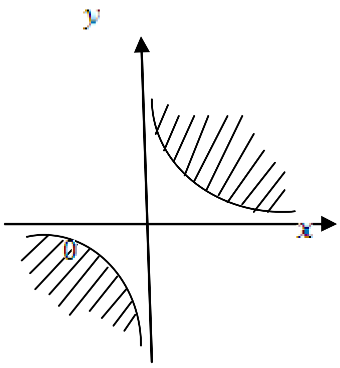
4. $Imz^2 \ge 2$; 5. $Im\frac{1}{z} < -\frac{1}{2}$; 6. $-\frac{\pi}{4} \le arg\,z \le \frac{\pi}{4}$;

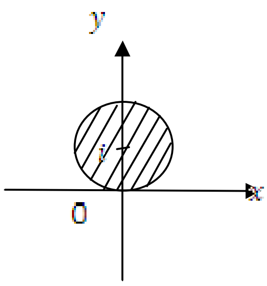
7. $\begin{cases} z\cdot\bar{z} < 3 \\ Rez > 1 \end{cases}$; 8. $\begin{cases} |z| < 2 \\ |z-2i| \le 2 \end{cases}$; 9. $\begin{cases} -1 \le Imz \le 0 \\ 0 \le Rez \le 2 \end{cases}$.

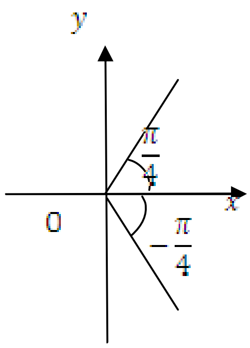


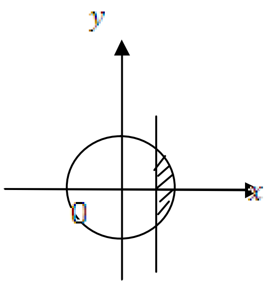


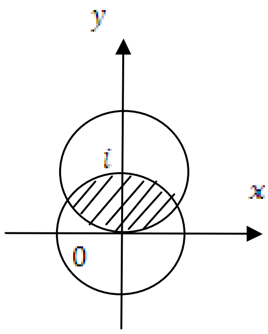


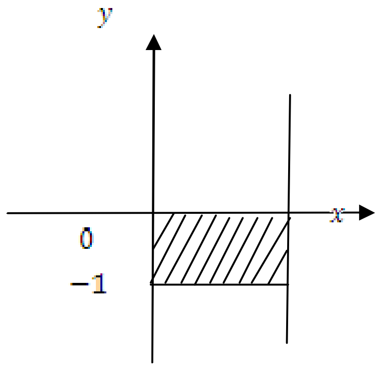












§3. Функции комплексного переменного

Определение. Если каждому z из области D соответствует одно или несколько значений $w = f(z)$, то в области D определена ф у н к ц и я к о м п л е к с н о г о п е р е м е н н о г о

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

где $u(x, y)$ и $v(x, y)$ – действительная и мнимая части функции $f(z)$. Если каждому z соответствует одно значение w, то функция называется о д н о з н а ч н о й, в противном – м н о г о з н а ч н о й.

Основные элементарные функции комплексного переменного определяется следующими формулами:

1. Показательная функция $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$.
2. Тригонометрические функции $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$; $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$;
$$tg z = \frac{\sin z}{\cos z}; \quad ctg z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$
3. Гиперболические функции $chz = \frac{e^z+e^{-z}}{2}$; $shz = \frac{e^z-e^{-z}}{2}$
$$thz = \frac{shz}{chz}; \quad cthz = \frac{chz}{shz}.$$
4. Логарифмическая функция $Lnz = ln|z| + i(argz + 2\pi k)$,
$lnz = ln|z| + iargz$ –(главное значение логарифма).
5. Общая показательная функция $a^z = e^{zlna}$, a –любое постоянное комплексное число.
6. Степенная функция $z^a = e^{alnz}$, a –любое постоянное комплексное число.

Некоторые соотношения между тригонометрическими и гиперболическими функциями:

1) $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \sin z_2 \cos z_1$;
2) $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$;
3) $\mathrm{sh}(z_1 \pm z_2) = shz_1 \,\mathrm{ch}\, z_2 \pm shz_2 chz_1$;
4) $\mathrm{ch}(z_1 \pm z_2) = chz_1 chz_2 \pm shz_1 shz_2$;
5) $\sin iz = i\, shz$;
6) $\cos iz = chz$;
7) $sh\, iz = i\,\sin z$;
8) $ch\, iz = \cos z$.

Пример 1. Вычислить e^z при $z = 3+\frac{\pi}{2}i$.

$$e^{3+\frac{\pi}{2}i} = e^3\left(cos\frac{\pi}{2}+isin\frac{\pi}{2}\right) = e^3(0+i) = ie^3.$$

Пример 2. Вычислить Lnz при $z = -1$.

$$Ln(-1) = \ln(-1) + i[\arg(-1) + 2\pi k] = i(\pi + 2\pi k) = i\pi(1+2k)$$

Пример 3. Вычислить $sinz$ при $z = -5-i$.

$$\sin(-5-i) = \frac{e^{i(-5-i)} - e^{-i(-5-i)}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(e^{1-5i} - e^{-1+5i}\right) =$$

$$= -\frac{i}{2}\left[e(cos5 - isin5) - e^{-1}(cos5 + isin5)\right] =$$

$$= -sin5\frac{e+e^{-1}}{2} - icos5\frac{e-e^{-1}}{2} = -sin5ch1 - icos5sh1.$$

Пример 4. Вычислить tgz при $z = 1+i$.

$$tg(1+i) = \frac{\sin(1+i)}{\cos(1+i)} = \frac{e^{i(1+i)} - e^{-i(1+i)}}{[e^{i(1+i)} + e^{-i(1+i)}]i} = i\frac{e^{-1+i} - e^{1-i}}{e^{-1+i} + e^{1-i}} =$$

$$= -i\frac{e^{-1}(cos1 + isin1) - e(cos1 - isoin1)}{e^{-1}(cos1 + isin1) + e(cos1 - isoin1)} =$$

$$= \frac{icos1sh1 + sin1ch1}{cos1ch1 - isin1sh1} \approx 0{,}272 + i1{,}085.$$

Пример 5. Вычислить chz при $z = -1+i$.

Т.к. $chz = \frac{e^z+e^{-z}}{2}$, то $ch(-1+i) = \frac{1}{2}\left[e^{-1+i} + e^{-(-1+i)}\right] =$

$$= \frac{1}{2}e^{-1}(cos1 + i\,sin1) + \frac{1}{2}2(cos1 - i\,sin1) =$$

$$= cos1\frac{e+e^{-1}}{2} - isin1\frac{e-e^{-1}}{2} = cos1ch1 - isin1sh1.$$

<u>Примеры для упражнений.</u>

Вычислить значения следующих функций при заданных значениях аргумента

1. $w = e^z$ при $z = -\frac{\pi i}{6}$;　　2. $w = cosz$ при $z = 2-i$;

3. $w = 3^z$ при $z2+i$;　　4. $w = \ln(1+shz)$ при $z = \frac{\pi i}{2}$;

5. $w = shz$ при $z = i-3$;　　6. $w = e^z$ при $z = 1+\frac{\pi}{2}i$;

7. $w = Lnz$ при $z = 1 - i$; 8. $w = ch\frac{1}{z}$ при $z = \frac{2i}{\pi}$.

Ответы:

1 . $\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$; 2. $\cos 2\, ch1 + isin2\, sh1$; 3. $e^{2ln3-2\pi k}(cosln3 + isinln3)$;

4. $\frac{1}{2}ln2 + \frac{\pi i}{4}$; 5. $-sh3cos1 + ich3sin1$; 6. $cose + isine$;

7. $\frac{1}{2}ln2 + \left(2\pi k - \frac{\pi}{4}\right)i$; 8. 0.

§4. Дифференцирование функций комплексного переменного. Условия Коши – Римана.

Пусть функция $w = f(z)$ определена на некоторой области D комплексного переменного z. Точки z и $z + \Delta z$ принадлежат области D. Обозначим $\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z)$, $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$.

Определение 1. Функция $w = f(z)$ называется дифференцируемой в точке $z \in D$, если $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ имеет конечный предел при Δz, стремящемся к нулю произвольным образом. Этот предел называется п р о и з в о д н о й функции $f(z)$ и обозначается $f'(z)$ или w' или $\frac{dw}{dz}$, т.е.

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to .} \frac{\Delta w}{\Delta z} \qquad (1)$$

Если $z = x + iy$, $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, то в каждой точке дифференцируемости функции $f(z)$ выполняются соотношения

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad (2)$$

называемые у с л о в и я м и Коши – Римана. Обратно, если в некоторой точке (x,y) функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы, как функции действительных переменных x, y и кроме того удовлетворяют соотношениям (2), то функция $w = u(x,y) + iv(x,y)$ является дифференцируемой в точке $z = x + iy$ как функция комплексного переменного z.

Определение 2. Функция $w = f(z)$ называется а н а л и т и ч е с к о й (регулярной) в данной точке $z \in D$, если она дифференцируема как в самой точке z, так и в некоторой ее окрестности.

Функция $w = f(z)$ называется а н а л и т и ч е с к о й или р е г у л я р н о й в области D, если она однозначна в этой области, дифференцируема как в самой точке z, так и в некоторой ее окрестности.

Для любой аналитической функции $w = f(z)$ имеем

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}i = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Если функция $f_1(z), f_2(z), \ldots$ аналитичны в области D, то алгебраическая сумма этих функции и их произведение также аналитичны в области D.

Если $f_1(z), f_2(z)$ аналитичны в области D, то $\frac{f_1(z)}{f_2(z)}$ аналитично в области D за исключением точек, в которых $f_2(z) = 0$.

Пример 1. Проверить выполняемость условий Коши – Римана для функции $w = e^{3z}$.

$$e^{3z} = e^{3(x+iy)} = e^{3x}(cos3y + isin3y),$$

$$u = e^{3z}cos3y, \quad v = e^{3z}sin3y,$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 3e^{3x}cos3y, \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = 3e^{3x}cos3y, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y} = -3e^{3x}sin3y, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = 3e^{3x}sin3y. \end{cases}$$

Условия Коши – Римана выполняются. Функция e^{3x} аналитична на всей комплексной плоскости.

Пример 2. Проверить выполняемость условий Коши – Римана для функции $w = z - \frac{1}{z}$. Полагая $z = x + iy$, выделим вещественную и мнимые части

$$w = x + iy - \frac{1}{x+iy} = x + iy - \frac{x-iy}{x+iy} = \left(x - \frac{x}{x^2+y^2}\right) +$$

$$+i\left(y+\frac{y}{x^2+y^2}\right),$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=1+\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},\\ \dfrac{\partial v}{\partial y}=1+\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.\end{cases}$$

Условия Коши – Римана выполняются. Функция регулярна во всей плоскости и за исключением точки $z=0$.

Пример 3. Проверить выполняемость условий Коши – Римана для функции $w=\cos i\bar{z}$.

Так как $\bar{z}=x-iy$, то $i\bar{z}=i(x-iy)=y+ix$.

$$\cos i\bar{z}=\cos(y+ix)=\cos y\cos ix-\sin y\sin ix=\cos y\, chx-i\,\sin y\, shx,$$

$$u(x,y)=\cos y\ chx,\quad v(x,y)=-\sin y\, shx,$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\cos y\, shx,\\ \dfrac{\partial v}{\partial y}=-\cos y\, shx,\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\sin y\, chx,\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\sin y\, chx.\end{cases}$$

Условия Коши – Римана не выполняются, функция $w=\cos i\bar{z}$ не аналитична на всей комплексной плоскости, исключая начало координат.

Пример 4. Восстановить аналитическую функцию $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, если известна ее действительная часть

$$u(x,y)=x^2-y^2+x.$$

Функция $f(z)$ аналитическая, т.е. удовлетворяет условиям Коши – Римана, т.е.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=2x+1,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=-2y.$$

Интегрируя первое уравнение по y, считая x постоянным, получим

$v(x,y)=(2x+1)y+C(x)$. Найдем $C(x)$. Так как $\frac{\partial v}{\partial x}=2y$, то $C'(x)+2y=2y$,

$C'(x)=0$. Отсюда $C(x)=C_1$ $(const)$.

Искомая функция $f(z) = x^2 - y^2 + x + i[(2x+1)y + C_1]$.

Примеры для упражнений. Выделить вещественную и мнимую части и проверить, будут ли аналитичны следующие функции.

1. $w = \sin 2z$.
2. $w = \cos(iz - 1)$.
3. $w = e^{-5iz+1}$.
4. $w = z^2 + 5z$.
5. $w = z\,Re z$.
6. $w = \frac{1}{z}$.
7. $w = e^{z+\bar{z}}$.

Восстановить аналитическую функцию $f(z)$, если известны действительная или мнимая части;

8. $v(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$; $x \neq 0, y \neq 0$.

9. $u(x,y) = 2^x \cos(y\ln 2)$.

Ответы: 1. $u = \sin 2x\, ch 2y$, $v = \cos 2x\, sh 2y$ —аналитична.

2. $u = \cos(y+1)\, chx$, $v = \sin(y+1)\, shx$ —аналитична.
3. $u = e^{5y+1}\cos 5x$, $v = -e^{5y+1}\sin 5x$ —аналитична.
4. $u = x^2 - y^2 + 5x$, $v = 2xy + 5y$ —аналитична.
5. $u = x^2$, $v = xy$ —не аналитична.
6. $u = \frac{x}{x^2+y^2}$, $v = -\frac{y}{x^2+y^2}$ — аналитична при всех z, кроме $z = 0$.
7. $u = e^{2x}$, $v = 0$ —не аналитична
8. $f(z) = \frac{y}{x^2+y^2} + C_1 + i\frac{x}{x^2+y^2}$; $x \neq 0, y \neq 0$.
9. $f(z) = 2^z + C$.

§5. Интегрирование функции комплексного переменного

Пусть функция $w = f(z)$определена на кусочно – гладкой кривой, на которой задана направление обхода. Точки $z_0, z_1, \dots, z_n$ произвольно разбивают эту кривую на n частей, в каждой из которых выбрана точка ξ_k.

Определение 1. Интегралом от функции $w = f(z)$ комплексного переменного z по кривой L называется предел интегральной суммы

$$\lim_{max\Delta z_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k, \quad (\Delta z_k = z_k - z_{k-1}).$$

Если он существует, w не зависит от способа разбиения кривой L и выбора точек ξ_k обозначается

$$\int_L f(z)\,dz.$$

Если $f(z)$ непрерывна на кусочно – гладкой кривой L, то $\int_L f(z)\,dz$ существует и обладает свойствами криволинейного интеграла.

Если $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, то интеграл вычисляют по формуле:

$$\int_L f(z)\,dz = \int_L [u(x,y) + iv(x,y)]\,(dx + idy) =$$

$$= \int_L u(x,y)\,dx - iv(x,y)dy + iv(x,y)dx + u(x,y)dy.$$

Интеграл от функции комплексного переменного зависит от пути интегрирования. Если же $f(z)$ – аналитическая функция в односвязной области D, то интеграл не зависит от пути интегрирования и имеет место формула Ньютона – Лейбница

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz = \Phi(z)|_{z_0}^{z_1} = \Phi(z_1) - \Phi(z_0). \qquad (1)$$

Если же контур L замкнут, то

$$\oint_L f(z)\,dz = 0. \qquad (2)$$

Интегрирование по частям и замена переменных в интегралах от функций комплексного переменного производится так же, как и функциях действительного переменного.

Пример 1. Найти $\int_L z^3\,dz$, где L —парабола $x = y^3$ с концами в точках

$z_0 = 0, z_1 = 1 + i.$

Действительная и мнимая части функции z^3 равны:

$u = x^3 - 3x^2,\ v = 3x^2y - y^3,$

так как $z^3 = (x + iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3),$

$$\int_L z^3\,dz = \int_L (x^3 - 3xy^2)\,dx - (3x^2y - y^3)dy +$$

$$+i\int_L (3x^2y - y^3)\,dx + (x^3 - 3xy^2)dy.$$

Заменим $x = y^3, dx = 3y^2dy;\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1;$

$$\int_0^1 (y^9 - 3y^5)\,3y^2dy - (3y^7 - y^3)dy + i\int_0^1 (3y^7 - y^3)\,3y^2dy + (y^9 - 3y^5)dy =$$

$$= \int_0^1 (3y^{11} - 12y^7 + y^3)\,dy + i\int_0^1 (10y^9 - 6y^5)\,dy =$$

$$= \left(\frac{y^{12}}{4} - \frac{3y^8}{2} + \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 - i(y^{10} + y^6)|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = -1.$$

Пример 2. Найти интеграл $\int_L (z + 2\overline{z})\,dz$ по следующим линиям:

1. L– отрезок прямой от $z_0 = 0,$ до $z_1 = 1 - i.$
2. L– дуга окружности $|z| = 2, -\frac{\pi}{2} \le arg z \le \frac{\pi}{2}.$

Действительная и мнимая части функции $z + 2\overline{z}$ равны: $u = 3x,\ v = -y$

$$\int_L (z+2\bar{z})\,dz = \int_L 3x\,dx + ydy + i\int_L -y\,dx + 3xdy.$$

1) Так как L соединяет точки 0 и $-i+1$, то ее уравнение $y=-x$.

Делая замену в интеграле $dy=-dx$, $(0\le x\le 1)$, имеем

$$\int_L (z+\bar{z})\,dz = \int_0^1 (x+iy+2x-2iy)\,(dx+idy) =$$

$$= \int_0^1 (x-ix+2x+2ix)\,(dx-idx) = \int_0^1 3x\,dx + (-x)(-dx) +$$

$$+i\int_0^1 x\,dx + 3x(-dx) = \int_0^1 4x\,dx + i\int_0^1 (-2x)\,dx = \left(\frac{4x^2}{2} - i\frac{2x^2}{2}\right) = (2-i).$$

2) Запишем уравнение окружности $|z|=2$ параметрически:

$$x=2cost, y=2sint;\ -\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2};\ dx=-2sintdt, dy=2costdt.$$

$$\int_L (z+2\bar{z})\,dz = \int_L (3x-iy)\,(dx-idy) =$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (6\cos t - 2isint)(-2sint+icost)\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-12\cos t\,sint + 4sintcost)\,dt +$$

$$+i\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (12cos^2t + 4sin^2t)\,dt = -8\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,sint\,dt + i(4+cos^2t)dt = 8\pi i.$$

Пример 3. Найти $\int_1^i ze^z\,dz$; $f(z)=ze^z$ – аналитична. Интегрируем по частям

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

$$\int_1^i ze^z\,dz = \begin{vmatrix} u = z & du = dz \\ e^z dz = dv & v = e^z \end{vmatrix} = (ze^z - e^z)|_1^i = e^i(i-1).$$

Область D называется о д н о с в я з н о й, если любую замкнутую кривую, лежащую в этой области, можно стянуть в точку, не выходя за пределы этой области.

Теорема Коши. Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D, ограниченной замкнутым контуром L, а также в точках этого контура, то

$$\int_L f(z)\,dz = 0.$$

Если $f(z)$ аналитична в области D, кривая L_1 лежит в области D вместе с областью D_1, которую она ограничивает, и точка z_0 лежит в области D_1, то

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{f(z)}{z-z_0}dz; \qquad (3)$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz. \qquad (4)$$

(Формула Коши)

Пример 1. Вычислить $\int_L \frac{sh\frac{\pi}{4}z}{z^2+1}dz$,

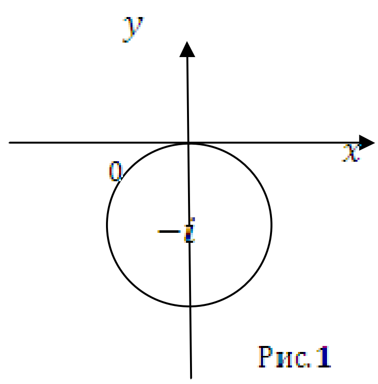


Рис.1

L —окружность $x^2 + y^2 + 2y = 0$.

Преобразуем уравнение $x^2 + (y+1)^2 = 1$.

Окружность с центром в точке $z = -i$ (рис1).

Подынтегральную функцию преобразуем

$\frac{sh\frac{\pi}{4}z}{z^2+1} = \frac{sh\frac{\pi}{4}z}{z-i} \cdot \frac{1}{z+i}$ —причем функция $f(z) = \frac{sh\frac{\pi}{4}z}{z-i}$ аналитична внутри контура L.

Применяя формулу (3) имеем

$$\left(\frac{sh\frac{\pi}{4}z}{z-i}\right)_{z=-i} = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{sh\frac{\pi}{4}z}{z-i} \cdot \frac{1}{z+i}dz;$$

$$\int_L \frac{sh\frac{\pi}{4}z}{z-i} \cdot \frac{dz}{z+i} = 2\pi i\left(\frac{sh\frac{\pi}{4}z}{z-i}\right)_{z=-i} = 2\pi i\frac{sh\left(-\frac{\pi}{4}i\right)}{-2i} = \frac{e^{\frac{\pi}{4}} - e^{-\frac{\pi}{4}}}{2}\pi =$$

$$= \pi i sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi i.$$

Пример 2. Вычислить $\int_L \frac{e^z}{z^2-9}dz$, если:

1) L —окружность $|z-3| = 2$;
2) L —окружность $|z+3| = 2$;
3) L —окружность $|z| = 1$.

Подынтегральную функцию запишем в таком виде: $\frac{e^z}{(z-3)(z+3)}$.

1) Функция $f(z) = \frac{e^z}{(z+3)}$ аналитична внутри контура $|z-3| = 2$, точка $z = 3$ лежит внутри этого контура (рис. 2); по формуле (3) имеем

$$\int_L \frac{e^z}{(z+3)} \cdot \frac{dz}{z-3} = 2\pi i\left(\frac{e^z}{(z+3)}\right)_{z=3} = \frac{e^z\pi}{3}i.$$

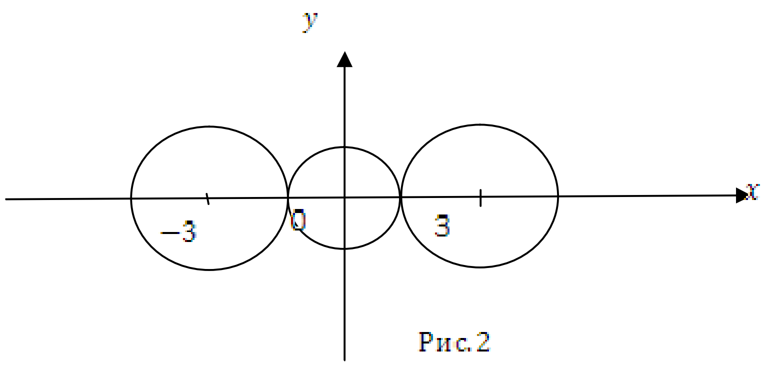


Рис.2

2) Функция $f(z) = \frac{e^z}{(z-3)}$ аналитична внутри контура $|z+3| = 2$, точка $z = -3$ лежит внутри этого контура (рис. 2); по формуле (3) имеем

$$\int_L \frac{e^z}{(z+3)} \cdot \frac{dz}{z+3} = 2\pi i \left(\frac{e^z}{(z-3)}\right)_{z_0=-3} = \frac{\pi i}{3e^z}.$$

3) Функция $f(z) = \frac{e^z}{z^2-9}$ аналитична внутри контура $|z| = 1$, следовательно, по теореме Коши

$$\int_L \frac{e^z}{z^2-9} dz = 0.$$

Пример 3. Вычислить $\int_L \frac{zcosz}{\left(z-\frac{\pi}{3}\right)^3} dz$, где $L - |z| = 2$.

Функция $f(z) = zcosz$ аналитична внутри круга $|z| = 2$, точка $z_0 = \frac{\pi}{3}$ лежит в этом круге; применим формулу (4) $n = 2$, получим

$$(zcosz)''_{z=\frac{\pi}{3}} = \frac{2!}{2\pi i} \int_L \frac{zcosz}{\left(z-\frac{\pi}{3}\right)^3} dz.$$

Откуда

$$\int_L \frac{zcosz}{\left(z-\frac{\pi}{3}\right)^3} dz = \pi i(-2sinz - zcosz)_{z=\frac{\pi}{3}} = -\pi i(2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6}\left(6\sqrt{3} + \pi\right)i.$$

<u>Примеры для упражнений.</u> Вычислить интегралы

1) $\int_L \overline{z \cdot z}\, dz$, где L –дуга окружности $|z| = 1,\ 0 \le argz \le \pi$.

2) $\int_L (2 - 3z + z^2)\, dz$, где L –дуга окружности $|z| = 2,\ \ -\frac{\pi}{3} \le argz \le \frac{\pi}{3}$.

Выразить через криволинейные интегралы и вычислить

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

3) $\int_L e^{\bar{z}}\,dz$, где L —ломаная с вершинами в точках $z = 0, z = 2, z = 2 - i$.

4) Вычислить $\int_L |z|\,dz$, где

а) L —отрезок прямой с концами в точках $z = 0, z = 2 + i$;

б) L —полуокружность $|z| = 3,\ 0 \leq argz \leq \pi$;

в) L —окружность $|z| = 2$.

5) $\int_L \frac{e^{-z}}{z+\pi i}$, где

а) L —окружность $|z| = 6$,

б) L —окружность $|z + 2i| = \frac{1}{2}$.

6) $\int_L \frac{chzdz}{\left(z+\frac{\pi i}{2}\right)^2 (z-\pi i)^2}$, где

а) L —окружность $\left|z + \frac{\pi}{2}i\right| = 1$,

б) L —окружность $|z - \pi i| = 1$,

в) L —окружность $|z| = 1$.

7) $\int_L \frac{z^2+1}{z^2+4}\,dz$, где

а) L —окружность $|z| = 1$,

б) L —окружность $|z + 2i| = 1$,

в) L —окружность $|z - 2i| = 1$.

8) $\int_L \frac{e^{2z}}{\left(z+\frac{1}{8}\right)^4}\,dz$,

L —граница прямоугольника с вершинами в точках: $z_1 = -1 - i;\ \ z_2 = 1 - i;$

$z_3 = 1 + 8i$; $z_4 = -1 + 2i$.

Ответы: 1) 2; 2) $-2i\sqrt{3}$; 3) $e^{-2}[-2 + cos1 - isin1] + 1$;

4) а) $\frac{2+i}{2}\sqrt{3}$; б) -18; в) 0; 5) а) $-2\pi i$; б) 0;

6) а) $-\frac{8}{9\pi}$; б) $-\frac{32}{27\pi^2}$; в) 0;

7) а) 0; б) $-\frac{\pi}{2} - 4\pi i$; в) $\frac{\pi}{2} - 4\pi i$; 8) $\frac{8\pi}{3e} i$.

§6. Комплексные ряды. Числовые ряды с комплексными числами.

Ряд

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots = \sum_{n+1}^{\infty} z_n \qquad (1)$$

называется числовым рядом с комплексными числами. Число $S_n = z_1 + z_2 + + \cdots + z_n$ называется $n -$ частичной суммой этого ряда. Ряд (1) называется сходящимся, если последовательность его частичных сумм S_n сходится, т.е. $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, где S конечное число, называемое суммой ряда

$$\sum_{n+1}^{\infty} z_n = \sum (x_n + 2y_n).$$

Для сходимости ряда (1) необходимо и достаточно, чтобы сходились ряды

$$\sum_{n+1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots,$$

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

$$\sum_{n+1}^{\infty} y_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n + \cdots.$$

Если сходится ряд

$$|z_1| + |z_2| + |z_3| + \cdots + |z_n| + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|, \qquad (2)$$

то ряд (1) сходится и называется а б с о л ю т н о с х о д я щ и м с я.

Для исследования сходимости ряда (1) применимы все признаки сходимости рядов в действительной области.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sinn + icosn}{n^3}.$$

Преобразуем его в сумму двух рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sinn}{n^3} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cosn}{n^3}.$$

Каждый этих рядов сходится абсолютно по признаку сравнения, следовательно, данный ряд сходится абсолютно.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+i}{2}\right)^n.$$

По признаку Коши имеем

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\left|\frac{1+i}{2}\right|^n} = \left|\frac{1+i}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1,$$

ряд сходимости абсолютно.

Степенные ряды с комплексными числами

Пусть дана последовательность функций $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)$ комплексного переменного z. Образуем функциональный ряд в комплексной области

$$f_1(z) + f_2(z) + f_3(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z). \qquad (1)$$

Вопрос сходимости ряда (1) решается с помощью известных признаков сходимости рядов в действительной области.

Определение. Степенным рядом называется ряд вида

$$C_0 + C_1(z-a) + C_2(z-a)^2 + \cdots + C_n(z-a)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n, \qquad (2)$$

где z – комплексное переменное, a и C_n комплексные числа.

При $a = 0$ степенной ряд (2) имеет вид

$$C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + C_3 z^3 + \cdots + C_n z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n.$$

То значения z, при которых степенной ряд сходится, называются т о ч к а м и с х о д и м о с т и. Множество всех точек сходимости называется о б л а с т ь ю с х о д и м о с т и ряда. Для каждого степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n$ областью сходимости является круг с центром в точке a и радиусом R. Если $R = \infty$, то степенной ряд сходится во всей комплексной плоскости, если $R = 0$, то ряд сходится лишь в точке a, в центре круга. круг сходимости степенного ряда в комплексной области находится аналогично интервалу сходимости для степенного ряда в действительной области.

Степенной ряд абсолютно сходится внутри круга сходимости, вне круга сходимости ряд расходится. На границе круга сходимости степенной ряд может как сходиться, так и расходиться; причем, если степенной ряд абсолютно сходится в какой – нибудь точке границы, то он абсолютно сходится во всех точках границы.

Пример 1. Определить круг сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-1-i)^n}{2^n(n^2+1)}.$$

Проверить, сходится ли ряд в точках $z=0,\quad z=3+i,\ z=3i$.

Найдем круг сходимости ряда, используя признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(z-1-i)^{n+1}2^n(n^2+1)}{(z-1-i)^n2^{n+1}[(n+1)^2+1]}\right|=$$

$$=\frac{|z-1-i|}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^2+2n+2}=\frac{|z-1-i|}{2}<1,$$

$|z-1-i|<2$ –круг сходимости, радиус круга сходимости $R=2$, центр круга сходимости находится в точке $(1+i)$. На рис.1 отмечаем заданные точки.

Точка $z=0$ (A) лежит внутри круга, в этой точке ряд сходится абсолютно. Точка $z=3i$ (B) лежит вне круга сходимости, в этой точке ряд расходится. Точка $z=3+i$ (C) лежит на окружности круга сходимости. Исследуем поведение ряда в

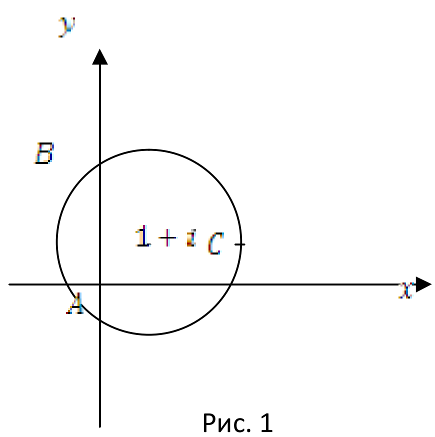


Рис. 1

этой точке. Подставим в данный ряд

значение $z = 3 + i$, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (3 + i - 1 - i)^n}{2^n (n^2 + 1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + n^2}.$$

Данный числовой ряд сходится абсолютно (из теории числовых рядов).

Если же ряд расходится в какой – либо точке границы, то отсюда не следует его расходимость во всех точках этой границы. Он может в одних точках расходиться, а в других сходиться условно.

Пример 2. Определить круг сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z + 2 - i)^n}{\sqrt{n}(\sqrt{n} + 2)}.$$

Сходится ли ряды в точках $z = 0?$ $\quad z = -1 + i?$ $\quad z = -2?$

Найдем круг сходимости, применяя признак Даламбера,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(z + 2 - i)^{n+1} \sqrt{n}\left(\sqrt{n} + 2\right)}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1} + 2\right)(z + 2 - i)^n} \right| =$$

$$= |z + 2 - i| \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{n} + 2\right)}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1} + 2\right)}; \quad |z + 2 - i| < 1.$$

Радиус круга сходимости $R = 1$, центр круга сходимости в точке $z = -2 + i$ рис.2.

Точка $z = 0$ (0) лежит вне круга сходимости, в ней ряд расходится. Точка $z = -1 + i$ (A) лежит на границе круга сходимости; подставляя ее значение в ряд, имеем

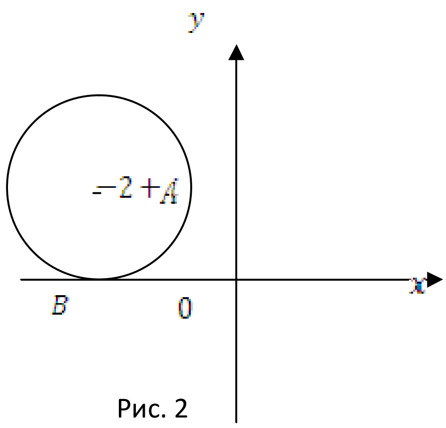


Рис. 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1 + i + 2 - i)^n}{\sqrt{n}(\sqrt{n} + 2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n} + 2)}$$

Точка $z=-2$ (B) также лежит на границе круга сходимости; подставляя значение ее в ряд, имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2+2-i)^n}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+2)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+2)}=-\frac{i}{(1+2)}-\frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+2)}+$$

$$+\frac{i}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+2)}+\frac{1}{\sqrt{4}(\sqrt{4}+2)}-\frac{i}{\sqrt{5}(\sqrt{5}+2)}+\cdots=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n}(\sqrt{2n}+2)}-i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{2n-1}(\sqrt{2n-1}+2)}.$$

Оба ряда сходится по правилу Лейбница, сходимость этих рядов условная. Исследуемый ряд в точке $z=-2$ сходится условно.

<u>Примеры для упражнений.</u> Определить круг сходимости для следующих рядов и исследовать их сходимость в заданных точках.

1)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}z^n; \qquad z=1;\ \ z=3i;\ \ z=-2i;$$

2)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(z-1)^n}{\sqrt{3n-2}\,2^n}; \qquad z=0;\ \ z=\frac{5}{3};\ \ z=\frac{i}{2}+1;$$

3)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^n(z-2)^n}{(n+1)(n+2)}; \qquad z=1;\ \ z=2+\frac{\sqrt{2}}{2}i;\ \ z=\frac{3}{2};$$

4)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n^2}; \qquad z=1+i;\ \ z=2i;\ \ z=0;$$

5)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-i)^{2n}n^n}{(9n+1)^n};\quad z=1;\ z=4i;\ z=-3+i;$$

6)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+2i)^n}{2^n(n+1)\ln(n+1)};\quad z=0;\ z=2-2i;\ z=2;$$

7)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+3)^n}{n(n+2)};\quad z=-2;\ z=-3+i;\ z=-1;$$

8)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(z-i)^n}{2^n};\quad z=4i0;\ z=1+i;\ z=2+i.$$

Ответы:

1) $|z|<2$ при $z=1$ сходится ряд абсолютно, при $z=3i$ и $z=-2i$ ряд расходится;

2) $|z-1|<\frac{2}{3}$при $z=0$ и $z=\frac{5}{3}$ ряд расходится, при $z=1+\frac{i}{2}$ ряд сходится абсолютно;

3) $|z-2|<\frac{1}{\sqrt{2}}$ при $z=1$ ряд расходится, при $z=2+\frac{i\sqrt{2}}{2}$ и $z=\frac{3}{2}$ ряд сходится абсолютно;

4) $|z-1|<1$ при $z=2i$ ряд расходится, при $z=0$ и $z=1+i$ ряд сходится абсолютно;

5) $|z-i|<3$ при $z=1$ сходится ряд абсолютно, при $z=4i$ и $z=-3+i$ ряд расходится;

6) $|z+2i|<2$ при $z=0$ сходится условно, при $z=2-2i$ и $z=2$ ряд расходится;

7) $|z+3|<1$ при $z=-2,\ z=-3+i$ ряд сходится абсолютно, при $z=-1$ ряд расходится;

ABBYY PDF Transformer 2.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

8) $|z-i|<2$ при $z=1+i$ ряд сходится абсолютно, при $z=4i$ и $z=2+$ ряд расходится.

§7. Ряды Тейлора и Лорана

Функция $f(z)$ аналитическая в круге $|z-a|<R$ $(R<\infty)$ разлагается в этом круге в ряд по степеням $(z-a)$, то

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n\,(z-a)^n. \qquad (1)$$

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\cdot\oint_{\Gamma}\frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}}=\frac{f^{(n)}(a)}{n!};\ \ (n=0,1,2,\ldots). \qquad (2)$$

Ряд (1) называется рядом Тейлора, C_n –коэффициентамиряда Тейлора, Γ –окружность с центром в точке a, лежащая внутри круга $|z-a|<R$.

Функция $f(z)$ аналитическая в кольце $r<|z-a|<R$, где $0<r<R<\infty$, располагается в ряд по степеням $(z-a)$, т.е.

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z-a)^n=\sum_{n=-\infty}^{n=0} C_n\,(z-a)^n+\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n, \qquad (3)$$

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\cdot\oint_{\Gamma}\frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}};\ \ (n=0;\pm1;\pm2;\ldots). \qquad (4)$$

Ряд (3) называется рядом Лорана, C_n –коэффициенты ряда Лорана;

$\sum_{n=-\infty}^{n=-1} C_n(z-a)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{(z-a)^n}$ – главная часть ряда Лорана, $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n$ - правильная часть ряда Лорана, Γ –окружность с центром в точке a, лежащая внутри кольца $r<|z-a|<R$.

Дан отыскания коэффициентов C_n используют формулы разложения в ряд Тейлора элементарных функции

1)

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}, \qquad (0\le|z|<\infty).$$

2)

$$sinz=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad (0\le|z|<\infty).$$

3)

$$cosz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{2n!!}, \qquad (0 \le |z| < \infty).$$

4)

$$shz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad (0 \le |z| < \infty).$$

5)

$$chz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2n!}, \qquad (0 \le |z| < \infty).$$

6)

$$(1+m)^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m(m-1(m-2)\dots(m-n+1)}{n!} z^n, \quad 0 \le |z| < 1.$$

7)

$$\frac{1}{z+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \qquad (0 \le |z| < 1).$$

8)

$$\frac{1}{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \qquad (0 \le |z| < 1).$$

9)

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}, \qquad (0 \le |z| < 1).$$

Или же применяют элементарные преобразования к заданным функциям, чтобы использовать вышеприведенные разложения.

Пусть задана регулярная функция $f(z)$, требуется найти все ее разложения по степеням $(z-a)$.

Вначале надо определить все особые точки данной функции, т.е. те точки, в которых функция терпит разрыв или перестает быть регулярной.

Например: $f(z) = \frac{e^z}{z}, f(z) = sin\,\frac{1}{z}$; (в точке $z = 0$ функции терпят разрыв), $f(z) = \frac{1}{z-1}, f(z) = \frac{z}{\ln z}$; (в точке $z = 1$ функции терпят разрыв), $f(z) = \sqrt{2-z}$; (в точке $z = 2$ не существует производная, функция не регулярна).

Когда будут найдены все особые точки данной функции для отыскания всех разложений по степеням $(z-a)$, надо построить чертеж, на чертеже отметить точку $z=a$ и все особые точки данной функции, затем построить ряд концентрических окружностей с центром в точке $z=a$, на которых лежат особые точки. Эти окружности разобьют всю плоскость на ряд областей: первая область – круг, окружность которой проходит через ближайшую особую точку функции $f(z)$, последняя – внешняя область будет вся часть плоскости, лежащая вне окружности, проходящей через наиболее удаленную от точки $z=a$ особую точку функции $f(z)$. В каждой из этих областей регулярная функция $f(z)$ имеет свое разложение по степеням $(z-a)$.

Пример 1. Найти разложения функции $f(z)=\frac{1}{z(z+1)}$ по степеням $(z-1)$. Особые точки функции $z=0, z=-1$. Стоим концентрические окружности с центром в точке $z=1$, проходящие через точки $z=0, z=-1$ (рис.1). В результате получится три области:

1. Круг $|z-1|<1$.
2. Кольцо $1<|z-1|<2$.
3. Внешняя область $|z-1|>2$.

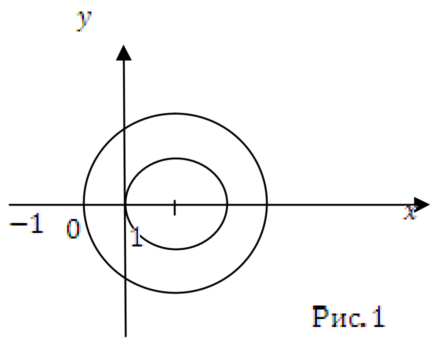


Рис. 1

Преобразуем функции

$$\frac{1}{z(z+1)}=\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}.$$

1. Разложим в ряд по степеням $(z-1)$

данную функцию в круге $|z-1|<1$.

Представим $\frac{1}{z}=\frac{1}{1+(z-1)}$ и используя формулу (1), получим

$$\frac{1}{1+(z-1)}=1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3+\cdots+(-1)^n(z-1)^n+\cdots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n, \qquad \text{где } |z-1|<1.$$

Аналогично: $\frac{1}{z+1}=\frac{1}{2+(z-1)}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}}=$

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

$$=\frac{1}{2}\left[1-\frac{z-1}{2}+\frac{(z-1)^2}{2^2}-\frac{(z-1)^3}{2^3}+\dots+(-1)^n\frac{(z-1)^n}{2^n}+\dots\right]=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{2^{n+1}},\quad \text{где } \frac{|z-1|}{2}<1.$$

Окончательно разложение запишется:

$$\frac{1}{z(z+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[1-\frac{1}{2^{n+1}}\right](z-1)^n.$$

Получен ряд Тейлора или правильная часть ряда Лорана.

2. Теперь разложим данную функцию по степеням $(z-1)$ в кольце $1<|z-1|<2$. Преобразуем

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{(z-1)+1}=\frac{1}{(z-1)}\frac{1}{1+\frac{1}{z-1}}=$$

$$=\frac{1}{z-1}\left[1-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}-\frac{1}{(z-1)^3}+\dots+(-1)^n\frac{1}{(z-1)^n}+\dots\right]=$$

$$=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{(z-1)^3}-\dots+(-1)^n\frac{1}{(z-1)^n}+\dots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+1}},\quad \text{где } \frac{1}{|z-1|}<1.$$

Аналогично

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[1-\frac{z-1}{2}+\frac{(z-1)^2}{2^2}-\frac{(z-1)^3}{2^3}+\dots+(-1)^n\frac{(z-1)^n}{2^n}+\dots\right]=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{z-1}{2^2}+\frac{(z-1)^2}{2^3}-\frac{(z-1)^3}{2^4}+\cdots+(-1)^n\frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}+\cdots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{2^{n+1}},\quad \text{где}\quad \frac{|z-1|}{2}<1.$$

Разложение функции в кольце $1<|z-1|<2$ запишется:

$$\frac{1}{z(z+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-1)^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}.$$

Получили ряд Лорана.

3. Найдем разложение данной функции в области $|z-1|>2$. Представим дроби:

а)

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{(z-1)}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{1}{z-1}}=$$

$$=\frac{1}{z-1}\left[1-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}-\frac{1}{(z-1)^3}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(z-1)^n}+\cdots\right]=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+1}},\quad \text{где}\ \frac{1}{|z-1|}<1.$$

б)

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{2}{z-1}}=$$

$$=\frac{1}{z-1}\left[1-\frac{2}{z-1}+\frac{2^2}{(z-1)^2}-\frac{2^3}{(z-1)^3}+\cdots+(-1)^n\frac{2^n}{(z-1)^n}+\cdots\right]=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{(z-1)^{n+1}},\quad \text{где}\quad \frac{2}{|z-1|}<1.$$

Разложение функции в области $|z-1|>2$ запишется:

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

$$\frac{1}{z(z+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-1)^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{(z-1)^{n+1}}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-1)^{n+1}}(1-2^n).$$

Получена главная часть ряда Лорана.

Пример 2. Найти все разложения функции $f(z)=\frac{1}{(1-z)^2}$ по степеням $(z+2)$.

Особая точка функции $z=1$. Строим окружность с центром в точке $z=-2$, проходящую через $z=1$ (рис. 2).

В результате вся комплексная плоскость будет разбита на две области:

1. $|z+2|<3$ –круг,
2. $|z+2|>3$ –внешность круга.

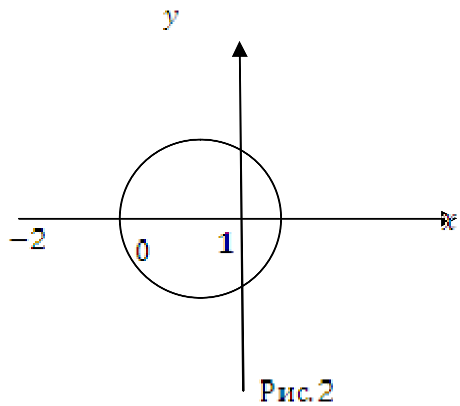


Рис.2

Преобразуем сначала функцию

$\frac{1}{1-z}=\frac{1}{3-(z+2)}$.

1. Разложим в ряд по степеням $(z+2)$ функцию по $\frac{1}{1-z}$ в круге $|z+2|<3$:

$$\frac{1}{1-z}=\frac{1}{3\left(1-\frac{z+2}{3}\right)}=$$

$$=\frac{1}{3}\left[1+\frac{z+2}{3}+\frac{(z+2)^2}{3^2}+\frac{(z+2)^3}{3^3}+\dots+\frac{(z+2)^n}{3^n}+\dots\right],\qquad \text{где } \frac{|z+2|}{3}<3.$$

Дифференцируя обе части этого равенства по z, получим:

$$\frac{1}{(1-z)^2}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}+\frac{2(z+2)}{3^2}+\frac{3(z+2)^2}{3^3}+\dots+\frac{n(z+2)^{n-1}}{3^n}\right]=$$

$$=\frac{1}{3^2}+\frac{2(z+2)}{3^3}+\frac{3(z+2)^2}{3^4}+\dots+\frac{n(z+2)^{n-1}}{3^{n+1}}+\dots$$

Данный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(z+2)^{n-1}}{3^{n+1}}$ будет рядом Тейлора функции $\frac{1}{(1-z)^2}$ в круге $|z+2|<3$.

2. Разложим функцию $\frac{1}{1-z}$ по степеням $(z+2)$ в области $|z+2|>3$:

$$\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z+2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{3}{z+2}}=$$

$$=-\frac{1}{z+2}\left[1+\frac{3}{z+2}+\frac{3^2}{(z+2)^2}+\cdots+\frac{3^n}{(z+2)^n}+\cdots\right]=$$

$$=-\frac{1}{z+2}-\frac{3}{(z+2)^2}-\frac{3^2}{(z+2)^3}-\cdots-\frac{3^n}{(z+2)^{n+1}}-\cdots,\qquad \text{где } \frac{3}{|z+2|}<1.$$

Дифференцируя обе части этого равенства по z, получим:

$$\frac{1}{(1-z)^2}=\frac{1}{(z+2)^2}+\frac{3\cdot2}{(z+2)^3}+\frac{3^2\cdot3}{(z+2)^4}+\cdots+\frac{3^n(n+1)}{(z+2)^{n+2}}+\cdots$$

Данный ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n(n+1)}{(z+2)^{n+2}}$ есть главное часть ряда Лорана функции $\frac{1}{(1-z)^2}$ в области $|z+2|>3$.

Пример 3. Найти все разложение функции $f(z)=\sqrt[3]{8+z^3}$ по степеням z.

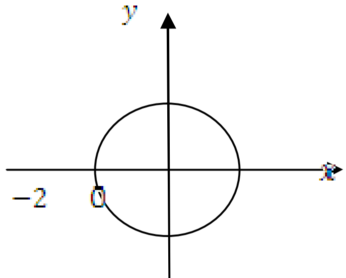


Рис.3

Особая точка функции $z=-2$, в этой точке функция не аналитична, т.к. не существует ее производная. Строим окружность с центром в точке $z=0$, Проходящую через точку $z=-2$ (рис.). В результате получится две области:

1. $|z|<2$ –круг,
2. $|z|>2$ –внешность круга.

1. Разложим данную функцию в круге $|z|<2$, используя формулу

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),$$

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

$$\sqrt[3]{2+z}=\sqrt[3]{2^3}\left(1+\left(\frac{z}{2}\right)^3\right)^{\frac{1}{3}}=$$

$$=\sqrt[3]{2^3}\left[1+\frac{z^3}{3\cdot 2^3}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)z^6}{2!\,2^6}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)z^9}{3!\,2^9}\right.$$
$$\left.+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\left(\frac{1}{3}-3\right)z^{12}}{4!\,2^{12}}+\cdots\right]=$$

$$=\sqrt[3]{2^3}(1+\frac{z^3}{3\cdot 2^3}-\frac{2\cdot z^6}{3^2\cdot 2^6\cdot 2!}+\frac{2\cdot 5\cdot z^9}{3^3\cdot 2^9\cdot 3!}-\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot z^{12}}{3^4\cdot 2^{12}\cdot 4!}+\cdots=$$

$$=\sqrt[3]{2^3}\left(1+\frac{z^3}{2^4}\right)+\sqrt[3]{2^3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n+1)}{3^{(n+1)}(n+1)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{3n+3},\text{где }\frac{|z|}{2}<1.$$

Данный ряд есть ряд Тейлора функции $\sqrt[3]{8+z^3}$ в круге $|z|<2$.

2. Разложим данную функцию в области $|z|>2$.

$$\sqrt[3]{8+z^3}=\sqrt[3]{z^3}\left(1+\left(\frac{2}{z}\right)^3\right)^{\frac{1}{3}}=$$

$$=\sqrt[3]{z^3}\left[1+\frac{2^3}{3\cdot z^3}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)2^6}{2!z^6}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)2^9}{3!\,z^9}\right.$$
$$\left.+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\left(\frac{1}{3}-3\right)2^{12}}{4!\,z^{12}}+\cdots\right]=$$

$$=\sqrt[3]{z^3}(1+\frac{2^3}{3\cdot z^3}-\frac{2\cdot 2^6}{3^2\cdot z^6\cdot 2!}+\frac{2\cdot 5\cdot 2^9}{3^3\cdot z^9\cdot 3!}-\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot 2^{12}}{3^4\cdot z^{12}\cdot 4!}+\cdots=$$

$$=\sqrt[3]{z^3}\left(1+\frac{2^3}{3\cdot z^3}\right)-\sqrt[3]{z^3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{3^{(n+1)}(n+1)!}\left(\frac{2}{z}\right)^{3n+3},$$

где $\frac{2}{|z|}<1$.

Данный ряд есть главная часть ряда Лорана функции $\sqrt[3]{8+z^3}$ в области $|z|>2$.

<u>Примеры для упражнений.</u>

Найти все разложения по степеням заданных разностей $(z-a)$ следующих функций и указать область пригодности этих разложений.

1. $f(z) = \frac{z+1}{z(z-1)}$ по степеням z.
2. $f(z) = \frac{z+1}{z(1+z^2)}$ по степеням z.
3. $f(z) = \frac{1}{z^2}$ по степеням $z - 1$.
4. $f(z) = \frac{1}{z^2+2z-1}$ по степеням $z + 1$.
5. $f(z) = \frac{1-z}{z(z+1)}$ по степеням $z + 1$.
6. $f(z) = \frac{1}{(z-2)}$ по степеням z.

Ответы:

1.

$$f(z) = \frac{1}{z} + 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{z^n}, \quad |z| > 1;$$

$$f(z) = -\frac{1}{z} - 2\sum_{n=2}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1.$$

2.

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n z^{2n-1}, \quad |z| < 1;$$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{z^{2n+1}}, \qquad |z| > 1.$$

3.

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} n (z-1)^{n-1}, \quad |z-1| < 1;$$

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{(z-1)^{n+1}}, \qquad |z-1| > 1.$$

4.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^{2n}}{z^{n+1}},\quad |z+1|<\sqrt{2};$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n}}{(z+1)^{2n+2}},\quad |z+1|>\sqrt{2}.$$

5.

$$f(z)=-\frac{2}{z+1}-\sum_{n=0}^{\infty}(z+1)^{n},\quad |z+1|<1;$$

$$f(z)=-\frac{2}{z+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+1)^{n}},\quad |z+1|>1.$$

6.

$$f(z)=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^{n},\quad |z|<2;$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n}}{z^{n+1}},\qquad |z|>2.$$

§8. Особые точки и вычеты в них

1. Нули функции

Пусть функция $f(z)$ является аналитической в точке a.

Точка a называется н у л е м ф у н к ц и и $f(z)$ п о р я д к а «n», если выполняются условия $f(a)=0,\ f'(a)=0,\ f^{(n-1)}(a)=0,\ f^{(n)}(a)\neq 0.$

Точка a тогда и только тогда служит нулем порядка n функции $f(z)$ регулярной в точке a, когда в некоторой окрестности этой точки имеет место равенство

$$f(z)=(z-a)^{n}\varphi(z),$$

где $\varphi(z)$ регулярно в точке a и $\varphi(a)\neq 0$.

Пример 1. Найти нули функции и определить их порядок

$$f(z)=z^{4}+16z^{2}=z^{2}(z^{2}+16),\quad \varphi(z)=z^{2}+16.$$

$z^2(z^2+16)=0,\ z^2=0,\ z_1=0$ –нуль второго порядка

$\varphi(0)\neq 0,\ z^2+16=0,\ \ z_{2,3}=\pm 4i$ –нули первого порядка.

Пример 2. $f=\frac{z^4}{1-cosz}$. Нулем $f(z)$ будет $z=0$. Определим порядок этого нуля.

$$\frac{z^4}{1-cosz}=\frac{z^4}{1-\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\cdots\right)}=\frac{z^4}{\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}-\cdots}=$$

$$=\frac{z^2}{\frac{1}{2}-\frac{z^2}{4!}+\frac{z^4}{6!}-\cdots}=z^2\left[\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{z^2}{4!}+\frac{z^4}{6!}-\cdots}\right]=z^2\varphi(z).$$

Если $z=0$, то $\varphi(0)\neq 0$, т.е. $z=0$ – нуль второго порядка.

Пример 3. $f(z)=1+chz$ найти нули функции $f(z)$. По определению гиперболического косинуса $chz=\frac{e^z+e^{-z}}{2}$ имеем

$$\frac{e^z+e^{-z}}{2}=-1,\ \ e^z+\frac{1}{e^z}=-2,\ \ \frac{2e^z+e^{2z}+1}{e^z}=0,$$

$$\frac{(e^z+1)^2}{e^z}=0,\ \ e^z=-1.$$

$z=Ln(-1)=\ln(-1)+iArg(-1);$

$z=ln1+i(\pi+2\pi k)=i\pi(1+2k)$, где $(k=0,\pm1,\pm2,\dots)$ –нули функции второго порядка.

<u>Примеры для упражнений.</u>

1. $f(z)=(z^3-1)^2$.
2. $f(z)=\sin 2z$.
3. $f(z)=\frac{(z^2-1)(z^2+5z+4)^2}{z+3}$.
4. $f(z)=ctg^2 2z$.
5. $f(z)=\frac{sinz}{z}$.
6. $f(z)=\frac{(z+8)^2(z^2+10z+16)^3}{2z^2-1}$.

Ответы:

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

1. $z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = 1$, $z_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ –нули второго порядка.
2. $z = \frac{\pi k}{2}$, $(k = 0; \pm 1; \pm 2 \dots)$ –все нули первого порядка.
3. $z_1 = 1$ –нуль первого порядка,
   $z_2 = -1$ –нуль четвертого порядка,
   $z_3 = -4$ –нуль третьего порядка.
4. $z = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $(k = 0; \pm 1; \pm 2 \dots)$ – нули второго порядка.
5. $z = \pi k$, $(k = 0; \pm 1; \pm 2 \dots)$ – нули первого порядка.
6. $z_1 = -8$ –нуль пятого порядка,
   $z_2 = -2$ –нуль третьего порядка.

2. Изолирование особые точки

Определение 1. Точка a называется изолированной особой точкой функции $f(z)$, если $f(z)$ регулярна в некоторой окрестности этой точки за исключением самой точки a. Так как функция $f(z)$ регулярна в этой окрестности, то она разлагается в ряд Лорана.

Определение 2. Особая точка a называется устранимой точкой функции $f(z)$, если существует конечный предел функции $f(z)$ в точке a.

Для того чтобы точка a была устранимой особой точкой функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы разложение $f(z)$ в ряд Лорана не содержало главной части.

Пример1.

1. $f(z) = \frac{\sin z}{z}$, $z = 0$ –изолированная особая точка. Так как $\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$, то $z = 0$ –устранимая особая точка.
2. $f(z) = \frac{chz - 1}{z^2}$, $z = 0$ –изолированная особая точка;

$$\operatorname{Lim}_{z\to 0} \frac{chz-1}{z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{\frac{e^z + e^{-z}}{2} - 1}{z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{e^z - e^{-z}}{4z} = \lim_{z\to 0} \frac{e^z + e^{-z}}{4} = \frac{1}{2},$$

$z = 0$ –устранимая особая точка.

Разложим $f(z)$ в ряд

$$\frac{chz - 1}{z^2} = \frac{1}{z^2}\left[1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots - 1\right] = \frac{1}{2!} + \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} + \cdots$$

Полученный ряд Лорана не содержит главной части, это подтверждает характер точки $z = 0$.

Определение 3. Особая точка a называется п о л ю с о м функции $f(z)$, если $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$.

Для того чтобы точка a была полюсом функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы эта точка была нулем для функции $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$.

Точка a п о л ю с о м порядка $n(n \geq 1)$, если она является нулем порядка n для функции $\varphi(z)$.

В случае $n = 1$ полюс называется п р о с т ы м.

Для того чтобы точка a была полюсом функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы главная часть разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана содержала конечное число членов

$$f(z) = \frac{C_{-k}}{(z-a)^k} + \cdots + \frac{C_{-1}}{(z-a)} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n,$$

причем наибольшее натуральное число k определяет порядок полюса.

Примеры. Найти полюсы и определить их порядок для функций

1. $f(z) = \frac{e^z}{(z^2+1)^2}$;

$$\lim_{z\to\pm i} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} = \frac{e^{\pm i}}{(z^2+1)^2} = \infty,$$

$z_{1,2} = \pm i$ –полюсы.

Определим порядок полюса $z = i$:

$$\varphi(z) = \frac{(z^2+1)^2}{e^z} = \frac{(z+i)^2(z-i)^2}{e^z} = (z-i)^2 \frac{(z+i)^2}{e^z}.$$

При $z = i$ $\frac{(z+i)^2}{e^z} \neq 0$, значит $z = i$ является нулем второго порядка функции $\varphi(z)$ и, следовательно, полюсом второго порядка для функции $f(z)$.

2. $f(z) = \frac{\sin z}{z^3}$,

   $z = 0$ –изолированная особая точка.

Для отыскания полюса и определения его порядка разложим $f(z)$ в ряд Лорана по степеням z.

$$f(z) = \frac{1}{z^3}\sin z = \frac{1}{z^3}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots\right) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^{2n}}{(2n+3)!}.$$

Наибольший отрицательный показатель $k = -2$, следовательно, $z = 0$ –полюс второго порядка.

Определение 4. Точка a называется существенно особой точкой функции $f(z)$, если в точке a функция $f(z)$ не имеет предела ни конечного, ни бесконечного.

Точка a только и только тогда является существенно особой точкой для функции $f(z)$, когда главная часть разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки a содержит бесконечное число членов.

Примеры.

1. $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$, $z = 0$ является существенно особой точкой, так как

$$\lim_{z\to 0-0} e^{\frac{1}{z}} = 0, \quad \lim_{z\to 0+0} e^{\frac{1}{z}} = \infty,$$

т.е. $f(z)$ не имеет предела в точке $z = 0$.

Если эту же функцию разложить в ряд Лорана по степеням z, то получим

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \cdots$$

Главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число членов, следовательно, $z = 0$ существенно особая точка.

2. $f(z) = z\sin\frac{1}{z}$.

Разложим $f(z)$ в ряд Лорана

$$z\cdot\sin\frac{1}{z} = z\cdot\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \cdots\right) = 1 - \frac{1}{3!z^2} + \frac{1}{5!z^4} - \frac{1}{7!z^6} + \cdots +$$

$$+(-1)^n \frac{1}{(2n+1)!\,z^{2n}} + \cdots$$

Следовательно, $z = 0$ существенно особая точка.

3. Вычеты

Определение 5. В ы ч е т о м функции $f(z)$ в ее изолированной особой точке a называется число, обозначаемое символом $res\, f(a)$ определяемое условием

$$res\, f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z)\, dz. \qquad (1)$$

Вычет функции $f(z)$ в особой точке $z = a$ равен коэффициенту C_{-1} при члене $\frac{1}{z-a}$ в разложении функции в ряд Лорана в окрестности точки $z = a$, т.е.

$res\, f(a) = C_{-1}$.

Формулой (1) пользуются, как правило, для определения вычета в существенно особой точке.

Вычет в устранимой особой точке равен нулю.

Вычет в точке $z = a$ в случае, если a есть полюс n —порядка, определяется по формуле

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^n}{dz^{n-1}} \left(f(z)(z-a)^n\right); \qquad (2)$$

при $n = 1$, т.е. для простого полюса, имеем

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \to a} f(z)(z-a). \qquad (3)$$

Если $f(z)$ в окрестности точки a может быть представлен как отношение регулярных функций $f(z) = {\varphi(z)}/{\psi(z)}$, причем

$\varphi(a) \neq 0, \ \psi(a) = 0$, а $\psi'(a) \neq 0$ и точка a —есть простой полюс, то

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

Примеры. Найти вычеты функции $f(z)$ в ее особых точках.

1. $f(z) = \frac{e^z}{(z-a)^2}$, $z = a$ –полюс второго порядка,

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z\to a} \frac{d}{dz}\left\{\frac{e^z}{(z-a)^2}\cdot(z-a)^2\right\} =$$

$$= \lim_{z\to a} \frac{d}{dz} e^z = \lim_{z\to a} e^z = e^a.$$

2. $f(z) = \frac{z^2}{z^3-1}$, $z_1 = 1$, $z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ –простые полюсы, поэтому

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)} = \frac{a^2}{3a^2} = \frac{1}{3},$$

т.к. вычеты не зависит от a, то все три вычеты будут равны между собой

$$\sum_{k=1}^{3} resf(z_k) = 1.$$

Вычеты применяются для вычисления контурных интегралов от функции $f(z)$.

Теорема Коши о вычетах. Если функции $f(z)$ является регулярной на границе Γ области D и всюду внутри этой области, за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, \dots, z_n$, то

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} resf(f_k).$$

Пример. Вычислить интеграл.

$$\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^3(z+1)}dz;$$

$z = 0$ –полюс третьего порядка,

$z=-1$ – полюс первого порядка,

$$\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = \lim_{z\to -1}\left[\frac{e^z}{z^3(z+1)}(z+1)\right] = \lim_{z\to -1}\frac{e^z}{z^3} = \frac{e^{-1}}{(-1)^3} = -\frac{1}{e},$$

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left[\frac{e^z\cdot z^3}{z^3(z+1)}\right] = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{e^z}{z+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[\frac{e^z\cdot z}{(1+z)^2}\right] = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{e^z\cdot(z^2+1)}{(z+1)^3} = \frac{1}{2},$$

$$\int\limits_{|z|=2}\frac{e^z dz}{z^3(z+1)} = 2\pi i[res(0)+res(-1)] = 2\pi i\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{e}\right).$$

<u>Примеры для упражнений.</u> Найти все особые точки функции, определить их характер и вычеты в них:

1. $f(z) = \frac{1}{z^3+z}$;
2. $f(z) = e^{\frac{z}{1-z}}$;
3. $f(z) = \frac{1}{z^3(z^2+4)^2}$;
4. $f(z) = \frac{e^z}{(z^2-1)^2}$;
5. $f(z) = z^2\left(\frac{1}{z} - \sin\frac{1}{z}\right)$;
6. $f(z) = \frac{1-\cos z}{z^3}$.

Вычислить интегралы, используя теорему Коши о вычетах:

7. $\int_\Gamma \frac{dz}{z^3+4z^3}$, где Γ – окружность $|z|=3$.
8. $\int_\Gamma \frac{dz}{(z+2)^2(z^2+1)}$, где Γ – окружность $|z+2|=2$.
9. $\int_\Gamma z^3 e^{\frac{1}{z}} dz$, где Γ – окружность $|z|=1$.

Ответы:

1. $z_1=0,\ z_2=-i,\ z_3=i$ – простые полюсы $resf(0)=1$;
   $resf(-i) = -\frac{1}{2}$; $resf(i) = -\frac{1}{2}$.

2. $z = 1$ –существенно особая точка, $resf(1) = -\frac{1}{8}$.

3. $z_1 = 0$, полюс 3 – го порядка $z_2 = 2i$, $z_3 = -2i$ – полюсы второго порядка,

$$resf(0) = -\frac{1}{32}; \; resf(2i) = \frac{1}{64}; \; resf(-2i) = \frac{1}{64}.$$

4. $z_1 = 1$, $z_2 = -1$ –плюсы второго порядка, $resf(-1) = \frac{1}{2e}$; $resf(1) = 0$.

5. $z = 0$ – существенно особая точка, $resf(0) = \frac{1}{6}$.

6. $z = 0$ – простой полюс, $resf(0) = \frac{1}{2}$.

7. 0.

8. $-\frac{8\pi i}{25}$.   9. $\frac{\pi i}{12}$.

Литература

1. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. М.: Наука, 1967.
2. Бугров М.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М.: Наука, 1985.
3. Привалов И.И. Введение в теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1977.
4. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.и. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. М.: Наука, 1981.
5. Араманович И.Г., Лунц Г.Л., Эльгольц А.Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. М.: Наука, 1968.
6. Невержев В.Ф., Кальницкий Л.А., Сапогов Н.А. Специальный курс математики для втузов. М.: Высшая школа, 1970.
7. Данко П.Е., Попов А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах. М.: Высшая школа, 1971.
8. Бондаренко Л.К., Ремпель Е.Д, Талипова Н.А. Методические указания для практических занятий и самостоятельной работы по курсу «Комплексные числа и аналитические функции». Фрунзе, ФПИ, 1988.