УДК 517.977.5 (575.2) (04)

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ С ПОДВИЖНЫМИ ТОЧЕЧНЫМИ УПРАВЛЕНИЯМИ ПРИ МИНИМИЗАЦИИ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛА

К.Р. Карабакиров

Исследованы вопросы однозначной разрешимости задачи оптимального управления колебаниями струны конечной длины в случае, когда колебательный процесс происходит под действием нескольких точечных подвижных источников, каждый из которых нелинейно зависит от функции управления.

Ключевые слова: упругие колебания; оптимальное управление; интегральный функционал.

I. Обобщенное решение краевой задачи управляемого процесса. Пусть управляемый процесс $V(t, x)$ в области $Q = (0, 1) \times (0, T)$ удовлетворяет краевой задаче [1]:

$$V_{tt} = V_{xx} + \sum_{k=1}^{m} \delta\left[x - \mu_k(t)\right] f_k\left[u_k(t)\right], \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \le T, \tag{1}$$

$$V(0, x) = \psi_1(x), \; V_t(0, x) = \psi_2(x), \; 0<x<1, \tag{2}$$

$$V_x(t, 0) = 0, V_x(t, 1) + \alpha\, V(t, 1) = 0, \; 0< t \le T, \tag{3}$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака; точки приложений внешних воздействий $f_k\left[u_k(t)\right] \in H(0, T)$, каждая из которых нелинейно зависит от функции μ_k изменяются по заданному закону $\mu_k=\mu_k(t), 0<\mu_k(t)<1$; $\psi_1(x)\in H(0, 1)$, $\psi_2(x)\in H(0, 1)$ – заданные функции начального состояния струны; H – пространство Гильберта; постоянная $\alpha>0$; T – фиксированный момент времени.

Краевая задача (1)–(3) имеет единственное обобщенное решение:

$$V(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\psi_{1n}\cos\lambda_n t + \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n}\sin\lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n}\int_0^t \sin\lambda_n(t-\tau)\sum_{k=1}^{m} z_n\left[\mu_k(\tau)\right] f_k\left[u_k(\tau)\right] d\tau\right] z_n(x), \tag{4}$$

которое удовлетворяет интегральному тождеству [2]:

$$\int_0^1 \left(V_t\Phi\right)_{t_1}^{t_2} dx = \int_{t_1}^{t_2}\int_0^1\left[V_t\Phi_t - V_x\Phi_x + \sum_{k=1}^{m}\delta\left(x-\mu_k(t)\right) f_k\left[u_k(t)\right]\Phi\right] dx dt - \alpha\int_{t_1}^{t_2}\Phi(t,1)V(t,1)\,dt$$

для любых моментов времени t_1 и t_2 $(0\le t_1<t<t_2\le T)$, и для любой функции $\Phi(t,x) \in C^{1,1}[\bar{Q}]$ и начальным условиям (2) в слабом смысле, т.е. соотношения

$$\lim_{t\to+0}\int_0^1 [V(t,x) - \psi_1(x)]\Phi_0(x)dx = 0,$$

$$\lim_{t\to+0}\int_0^1 [V_t(t,x) - \psi_2(x)]\Phi_1(x)dx = 0,$$

выполняются для любых функций $\Phi_0(x)\in H(0, 1)$, $\Phi_1(x)\in H(0, 1)$.

II. Задача нелинейной оптимизации и условия оптимальности. Векторное управление $u(t)=(u_1(t),\ldots, u_m(t))\in H^m(0, T)$, $H^m=H\times H\times\ldots\times H$ – декартово произведение пространств H, для которого краевая задача (1) – (3) имеет единственное обобщенное решение, назовем допустимым управлением. Рассмотрим задачу нелинейной оптимизации: на множестве допустимых управлений $u(t)\in H^m(0, T)$ требуется минимизировать функционал

$$J\left[u(t)\right] = \int_0^1\left[V(T, x) - \xi(x)\right]^2 dx + 2\beta\int_0^T\sum_{k=1}^{m}\left|u_k(t)\right| dt, \quad \beta>0, \tag{5}$$

где $\xi(x)\in H(0, 1)$ – заданная функция.

На основе принципа максимума для систем с распределенными параметрами [3] оптимальное управление $u(t)$ удовлетворяет следующим условиям оптимальности:

$$2\beta\left(\frac{\partial f_k\left[u_k(t)\right]}{\partial u_k}\right)^{-1} sign\, u_k = \omega\left[t, \mu_k(t)\right], \quad k = 1,2,3,\ldots,m, \tag{6}$$

$$\frac{\partial f_k\left[u_k\right]}{\partial u_k}\frac{\partial}{\partial u_k}\left(\left(\frac{\partial f_k\left[u_k\right]}{\partial u_k}\right)^{-1}\right)sign\,u_k\left(t\right)>0, \qquad (7)$$

$$k=1,2,3,\ldots,m,$$

где

$$\omega\left(t,\,x\right)=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}sin\lambda_n\left(T-t\right)$$

$$\left[\int_0^T\sum_{k=1}^{m}G_n\left[\tau,\,\mu_k(\tau)\right]f_k\left[u_k(\tau)\right]d\tau-h_n\right]z_n(x), \qquad (8)$$

$$G_n\left(t,\,\mu_k(t)\right)=\frac{1}{\lambda_n}z_n\left[\mu_k(t)\right]sin\lambda_n\left(T-t\right),$$

$$h_n=\xi_n-\psi_{1n}cos\lambda_nT-\frac{1}{\lambda_n}\psi_{2n}sin\lambda_nT.$$

III. Нелинейное интегральное уравнение оптимального управления.Согласно (6) и (9) относительно оптимального управления $u(t)=(u_1(t),\ldots,u_m(t))$ получим систему нелинейных интегральных уравнений

$$\beta\left(\frac{\partial f_k\left[u_k\right]}{\partial u_k}\right)^{-1}sign\,u_k\left(t\right)+\sum_{n=1}^{\infty}G_n[t,\,\mu_k(t)]\int_0^T\sum_{i=1}^{m}G_n$$

$$\left[\tau,\,\mu_i\left(\tau\right)\right]f_i\left[u_i\left(\tau\right)\right]d\tau=\sum_{n=1}^{\infty}G_n[t,\,\mu_k(t)]h_n,$$

$$k=1,2,3,\ldots,m, \qquad (9)$$

решение которой должно удовлетворять системе дополнительных условий (7).

Вопросы разрешимости задачи (9) и (7) могут быть исследованы по методике работы [5]. В наборе $\{u_1(t),...,u_m(t)\}$, функции $u_i(t),\quad i=1,2,3,...m$, могут принимать как положительные, так и отрицательные значения. Решение интегрального уравнения Фредгольма обладает свойством непродолжаемости решения [4]. Поэтому решением системы нелинейных интегральных уравнений Фредгольма (9) будет лишь вектор-функция, каждая компонента которой является функцией только одного знака, т.е. либо положительного, либо отрицательного при всех $t\in[0,T]$. Количество всех наборов, где каждая функция определенного знака (либо больше нуля, либо меньше нуля), в промежутке $[0,T]$, равно 2^m.

В дальнейшем для определенности изложение проведем для набора следующего вида

$$\left\{u_1^+(t),...,u_s^+(t),u_{s+1}^-(t),....,u_m^-(t)\right\},\quad 1\le s\le m.(10)$$

В этом случае система (9) приводится к виду:

$$2\left(\frac{\partial f_k\left[t,\,u_k(t)\right]}{\partial u_k}\right)^{-1}=\omega[t,\,\mu_k(t)],\quad k=1,...,s,$$

$$-2\left(\frac{\partial f_k^{-1}\left[t,\,u_k(t)\right]}{\partial u_k}\right)^{-1}=\omega[t,\,\mu_k(t)],\quad k=s+1,...,m, \qquad (11)$$

а система условий (7) переходит к следующей системе условий:

$$\frac{\partial f_k\left[t,\,u_k(t)\right]}{\partial u_k}\frac{\partial}{\partial u_k}\left(\left[\frac{\partial f_k\left[t,\,u_k(t)\right]}{\partial u_k}\right]^{-1}\right)>0, \qquad (12_+)$$

$$k=1,...,s,$$

$$\frac{\partial f_k\left[t,\,u_k(t)\right]}{\partial u_k}\frac{\partial}{\partial u_k}\left(\left[\frac{\partial f_k\left[t,\,u_k(t)\right]}{\partial u_k}\right]^{-1}\right)<0,. \qquad (12_-)$$

$$k=s+1,...,m$$

Согласно (8) систему равенств (11) перепишем в виде:

$$\beta\left(\frac{\partial f_i\left[t,u_i(t)\right]}{\partial u_i}\right)^{-1}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}G_n[t,\mu_i(t)]\int_0^T\left(\sum_{k=1}^{s}G_n[\tau,\mu_k(\tau)]f_k[\tau,u_k(\tau)]+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=s+1}^{m}G_n[\tau,\mu_k(\tau)]f_k[\tau,u_k(\tau)]\right)d\tau=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}G_n[t,\mu_i(t)]h_n,\quad i=1,...,s;$$

$$-\beta\left(\frac{\partial f_i\left[t,u_i(t)\right]}{\partial u_i}\right)^{-1}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}G_n[t,\mu_i(t)]\int_0^T\left(\sum_{k=1}^{s}G_n[\tau,\mu_k(\tau)]f_k[\tau,u_k(\tau)]+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=s+1}^{m}G_n[\tau,\mu_k(\tau)]f_k[\tau,u_k(\tau)]\right)d\tau=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}G_n[t,\mu_i(t)]h_n,\quad i=s+1,...,m, \qquad (13)$$

т.е. относительно набора (10) получили систему нелинейных интегральных уравнений (13).

IV. О разрешимости системы нелинейных интегральных уравнений. Для построения решения этой системы сначала, согласно методике работы [5], введем обозначения:

$$\beta\left(\frac{\partial f_i\left[t,u_i(t)\right]}{\partial u_i}\right)^{-1}=p_i^+(t),\quad i=1,...,s, \qquad (14_+)$$

$$-\beta\left(\frac{\partial f_i\left[t,u_i(t)\right]}{\partial u_i}\right)^{-1}=p_i^-(t),\quad i=s+1,...,m. \qquad (14_-)$$

Согласно (12_+) из (14_+) функции $u_i(t),\ i=1,...,s$, определяются однозначно, т.е. имеют место равенства:

$$u_i^+(t)=\varphi_i^+[t,p_i^+(t),\beta],\quad i=1,...,s. \qquad (15_+)$$

Согласно (12_) из (14_) аналогичным образом находим функции:

$$u_i^-(t) = \varphi_i^-[t, p_i^-(t), \beta], \quad i = s+1, ..., m. \qquad (15_-)$$

В формулах (15+)–(15_) функции $\phi_i^+(\cdot)$ и $\phi_i^-(\cdot)$ являются известными функциями.

Теперь с учетом (14+)–(15_) систему нелинейных интегральных уравнений (13) перепишем в виде

$$p_i^+(t) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n[t, \mu_i(t)] \int_0^T \left(\sum_{k=1}^{s} G_n[\tau, \mu_k(\tau)] f_k[\tau, \phi_k^+(\tau, p_k^+(\tau), \beta)] + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=s+1}^{m} G_n[\tau, \mu_k(\tau)] f_k[\tau, \phi_k^-(\tau, p_k^-(\tau), \beta)] \right) d\tau =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} G_n[t, \mu_i(t)] h_n, \quad i = \overline{1, s};$$

$$p_i^-(t) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n[t, \mu_i(t)] \int_0^T \left(\sum_{k=1}^{s} G_n[\tau, \mu_k(\tau)] f_k[\tau, \phi_k^+(\tau, p_k^+(\tau), \beta)] + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=s+1}^{m} G_n[\tau, \mu_k(\tau)] f_k[\tau, \phi_k^-(\tau, p_k^-(\tau), \beta)] \right) d\tau =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} G_n[t, \mu_i(t)] h_n, \quad i = \overline{s+1, m}$$

или в операторной форме

$$\overline{p} = G[\overline{p}], \qquad (16)$$

где

$$G[\overline{p}(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} G_n\left[t, \overline{\mu}(t)\right] \left[h_n - \int_0^T G_n^*(\tau, \overline{\mu}(\tau) \overline{f}[\tau, \overline{\phi}(\tau, \overline{p}(\tau), \beta)] d\tau \right],$$

$$\overline{p}(t) = \left\{ p^+(t), \, p^-(t) \right\} =$$

$$= \left\{ p_1^+(t), ..., \, p_s^+(t), \, p_{s+1}^-(t), ..., \, p_m^-(t) \right\},$$

$$G[\overline{p}] = \left\{ G_1[p_1], ..., G_m[p_m] \right\},$$

$$G_n\left[t, \overline{\mu}(t)\right] = \left\{ G_n\left[t, \mu^+(t)\right], G_n\left[t, \mu^-(t)\right] \right\} =$$

$$= \left\{ G_n\left[t, \mu_1(t)\right], ..., G_n\left[t, \mu_s(t)\right], G_n\left[t, \mu_{s+1}(t)\right], ..., G_n\left[t, \mu_m(t)\right] \right\},$$

$$\overline{f}\left[t, \overline{\phi}\left(t, \overline{p}(t), \beta\right)\right] =$$

$$= \left\{ \overline{f}[t, \phi^+\left(t, p^+(t), \beta\right)], \, \overline{f}[t, \phi^-\left(t, p^-(t), \beta\right)] \right\} =$$

$$= \begin{cases} f_1[t, \phi_1^+[t, p_1^+(t), \beta]], \ldots, f_s[t, \phi_s^+[t, p_s^+(t), \beta]], \\ \\ f_{s+1}[t, \phi_{s+1}^-(t, p_{s+1}^-(t), \beta)], \ldots, f_m[t, \phi_m^-(t)(t, p_m^-(t), \beta)] \end{cases},$$

* – знак транспонирования.

Далее были найдены достаточные условия существования решения системы нелинейных интегральных уравнений (16) и задачи нелинейной оптимизации. Разработан алгоритм построения решения задачи нелинейной оптимизации со сколь угодной точностью.

Литература

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.
2. *Плотников В.И.* Энергетическое неравенство и свойство переопределенности системы собственных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1968. Т.32. № 4. С. 743–755.
3. *Егоров А.И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. М.: Наука, 1978. 464 с.
4. *Краснов М.Л.* Интегральные уравнения. М.: Наука, 1975.
5. *Керимбеков А.* Нелинейное оптимальное управление линейными системами с распределенными параметрами: Автореф. дис… докт. физ.-мат. наук. Бишкек, 2003. 21 с.
6. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 520 с.