УДК 517.97

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ МИНИМИЗАЦИИ КВАДРАТИЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА

А.КЕРИМБЕКОВ, А.БАЕТОВ
E.mail. ksucta@elcat.kg

Макалада, үзгүлтүктүү коэффициентүү сызыктуу теңдемелер менен аныкталуучу серпилгичтүү термелүүлөрдү, сызыктуу эмес оптималдуу башкаруу маселесинин чыгарылыштарынын аныкталыш суроолору изилденген. Чыгарылыштардын аныкталуусунун жетиштүү шарттары табылган жана жакындаштырылган чыгарылышты табуунун алгоритми түзүлгөн. Алынган чыгарылыштын жыйналуусу далилденген.

В статье исследованы вопросы разрешимости задачи нелинейного оптимального управления упругими колебаниями, описываемыми линейными уравнениями с разрывным коэффициентом. Найдены достаточные условия разрешимости, разработан алгоритм построения приближенного решение задачи оптимизации и доказана их сходимость.

In this paper we investigate the solvability of nonlinear optimal oscillation process control problems defined by linear equations with discontinuous coefficient. We obtained the sufficient conditions of the solution and the algorithm of optimal was constructed and prove their convergence.

1. Слабообобщенное решение краевой задачи управляемого процесса

Пусть управляемый процесс описывается скалярной функцией $V(t,x)$, которая удовлетворяет в области $Q=(0,1)\times(0,T)$ уравнению колебания /1/:

$$V_{tt}=V_{xx}+a(t)V+g(t,x)f\left[t,u(t)\right] \tag{1.1}$$

на границе Q начальным

$$V(0,x)=\psi_1(x),\ V_t(0,x)=\psi_2(x) \tag{1.2}$$

и граничным

$$V_x(t,0)=0,\ V_x(t,1)+\alpha V(t,1)=0,\ \alpha>0,\ t\in(0,T) \tag{1.3}$$

условиям, где $a(t)\in H(0,T)$, $g(t,x)\in H(Q)$, $\psi_1(x)\in H(0,1)$, $\psi_2(x)\in H(0,1)$ – заданные функции, $f\left[t,u(t)\right]$ – функция внешнего воздействия, которая нелинейно зависит от векторного управления $u(t)=(u_1(t),...,u_m(t)),u_i(t)\in H(0,T),i=1,...,m;$ и является монотонной по каждому функциональному аргументу $u_i(t)$, $\forall t\in[0,T]$; H – гильбертово пространство, T фиксировано.

Решение краевой задачи (1.1)-(1.3) ищем в виде

$$V(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}V_n(t)z_n(x), \tag{1.4}$$

где функции $z_n(x)$, $n=0,1,2,...$, образуют полную ортонормированную систему в пространстве $H(0,1)$, а $\{\lambda_n\}$ – собственные значения, которые определяются как решение трансцендентного уравнения $\lambda tg\lambda=\alpha$ и обладают свойствами:

$$\lambda_n\le\lambda_{n+1},\ \lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty,\ n\pi<\lambda_n<\frac{\pi}{2}(2n+1),\ n=0,1,2,... . \tag{1.5}$$

Определение 1.1. Любая функция $V(t,x)\in H(Q)$, которая при каждом фиксированном векторном управлении $u(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$V(t,x)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\left[\psi_{1n}\cos\lambda_n t+\frac{\psi_{2n}}{\lambda_n}\sin\lambda_n t+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t a(\tau)\sin\lambda_n(t-\tau)V_n(\tau)d\tau+\right. \tag{1.6}$$

$$\left.+\int_0^t\frac{g_n(\tau)}{\lambda_n}\sin\lambda_n(t-\tau)f\left[\tau,u(\tau)\right]d\tau\right]z_n(x),$$

где ψ_{1n}, ψ_{2n}, $g_n(t), V_n(t)$ – коэффициенты Фурье соответственно функций $\psi_1(x)$, $\psi_2(x), g(t,x), V(t,x)$, называется *слабо обобщенным* решением краевой задачи (1.1)-(1.3).

Коэффициенты Фурье $V_n(t)$, при каждом фиксированном $n=0,1,2,...$, определяются как решение интегрального уравнения

$$V_n(t)=\psi_{1n}\cos\lambda_n t+\frac{\psi_{2n}}{\lambda_n}\sin\lambda_n t+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t a(\tau)\sin\lambda_n(t-\tau)V_n(\tau)d\tau+ \tag{1.7}$$

$$+\int_0^t\frac{g_n(\tau)}{\lambda_n}\sin\lambda_n(t-\tau)f\left[\tau,u(\tau)\right]d\tau,\qquad n=1,2,3,...$$

Заметим, что интегральное уравнение (1.7) эквивалентно дифференциальному уравнению

$$V_n''(t)+\lambda_n^2V_n(t)\quad a(t)V_n(t)+g_n(t)f\left[t,u(t)\right],\qquad n=1,2,3,...,$$

которое известно как уравнение Матье /2/.

Решение интегрального уравнения (1.7), согласно методам решения интегральных уравнений /3/, находим по формуле

$$V_n(t)=\psi_{1n}\left(\cos\lambda_n t+\int_0^t R_n(t,\tau,\lambda_n)\cos\lambda_n\tau d\tau\right)+\frac{\psi_{2n}}{\lambda_n}\left(\sin\lambda_n t+\int_0^t R_n(t,\tau,\lambda_n)\sin\lambda_n\tau d\tau\right)+ \tag{1.8}$$

$$+\int_0^t\frac{g_n(\tau)}{\lambda_n}\left(\sin\lambda_n(t-\tau)+\int_\tau^t R_n(t,s,\lambda_n)\sin\lambda_n(s-\tau)ds\right)f\left[\tau,u(\tau)\right]d\tau,$$

где

$$R_n(t,s,\lambda_n)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^{i-1}}K_{n,i}(t,s),\qquad n=1,2,3,...,$$

– резольвента интегрального уравнения (1.7), итерированные ядра $K_{n,i}(t,s)$ определяются по формулам:

$$K_{n,i}(t,s)=\int_0^t K_n(t,\tau)K_{n,i-1}(\tau,s)d\tau,\quad K_n(t,s)=K_{n,1}(t,s).$$

Подставляя (1.8) в (1.4), получим функцию

$$V(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}(\psi_{1n}\left(\cos\lambda_n t+\int_0^t R_n(t,\tau,\lambda_n)\cos\lambda_n\tau d\tau\right)+$$

$$+\frac{\psi_{2n}}{\lambda_n}\left(\sin\lambda_n t+\int_0^t R_n(t,\tau,\lambda_n)\sin\lambda_n\tau d\tau\right)+ \tag{1.9}$$

$$+\int_0^t\frac{g_n(\tau)}{\lambda_n}\left(\sin\lambda_n(t-\tau)+\int_\tau^t R_n(t,\tau,\lambda_n)\sin\lambda_n(s-\tau)ds\right)f\left[\tau,u(\tau)\right]d\tau)z_n(x),$$

которая, в силу единственности решения интегрального уравнения (1.7), является единственным слабо обобщенным решением краевой задачи (1.1)-(1.3).

2. Решение нелинейной задачи оптимизации

Рассмотрим задачу оптимизации, где требуется минимизировать функционал

$$I[u(t)] = \int_0^1 \left[V(T,x) - \xi(x)\right]^2 dx + \beta \int_0^1 \sum_{k=1}^{m} u_k^2(t)dt, \beta > 0, , \tag{2.1}$$

где $\xi(x) \in H(0,1)$ – заданная функция, на множестве решений краевой задачи (1.1)-(1.3).

На основе принципа максимума для систем с распределенными параметрами /4/ получим следующие условия оптимальности:

$$\int_0^1 g(t,x)\omega(t,x)dx \cdot f_{u_k}(t,u(t)) - 2\beta u_k(t) = 0, k = 1,...,m \tag{2.2}$$

$$\prod_{i=1}^{k} f_{u_i}(t,u(t)) \begin{vmatrix} \left(\dfrac{u_1}{f_{u_1}}\right)_{u_1} & u_1\left(\dfrac{1}{f_{u_1}}\right)_{u_2} & \dots & u_1\left(\dfrac{1}{f_{u_1}}\right)_{u_k} \\ u_2\left(\dfrac{1}{f_{u_2}}\right)_{u_1} & \left(\dfrac{u_2}{f_{u_2}}\right)_{u_2} & \dots & u_2\left(\dfrac{1}{f_{u_2}}\right)_{u_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_k\left(\dfrac{1}{f_{u_k}}\right)_{u_1} & u_k\left(\dfrac{1}{f_{u_k}}\right)_{u_2} & \dots & \left(\dfrac{u_k}{f_{u_k}}\right)_{u_k} \end{vmatrix} > 0, k = 1,...,m \tag{2.3}$$

где $f_{u_k}(t,u(t))$ – частные производные первого порядка по переменной u_k, $\omega(t,x)$ – слабо обобщенное решение сопряженной краевой задачи

$$\omega_{tt} - \omega_{xx} - a(t)\omega = 0, \quad 0 < x < 1; \quad 0 \le t < T$$

$$\omega(T,x) = 0, \quad \omega_t(T,x) - 2\left(V(T,x) - \xi(x)\right) = 0, \quad 0 < x < 1$$

$$\omega_x(t,0) = 0, \quad \omega_x(t,1) + \alpha\omega(t,1) = 0, \quad 0 < t \le T$$

Решение сопряженной краевой задачи ищется в виде

$$\omega(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(t) z_n(x),$$

и коэффициенты Фурье $\omega_n(t)$ определяются по формулам:

$$\omega_n(t) = \frac{1}{\lambda_n}(\sin\lambda_n(T-t) + \frac{1}{\lambda_n}\int_t^T P_n(s,t,\lambda_n)\sin\lambda_n(T-s)ds)\{-(\xi_n - \psi_{1n}[\cos\lambda_n T + \frac{1}{\lambda_n}\int_0^T R_n(T,\tau,\lambda_n)\cos\lambda_n\tau d\tau] -$$

$$-\frac{\psi_{2n}}{\lambda_n}[\sin\lambda_n T + \frac{1}{\lambda_n}\int_0^T R_n(T,\tau,\lambda_n)\sin\lambda_n\tau d\tau]) +$$

$$+\int_0^T \frac{g_n(\tau)}{\lambda_n}[\sin\lambda_n(T-\tau) + \frac{1}{\lambda_n}\int_\tau^T R_n(T,s,\lambda_n)\sin\lambda_n(s-\tau)ds]f(\tau,u(\tau))d\tau\}, \quad n = 1,2,3,...,$$

где $P_n(s,t,\lambda_n)$ – функция, сопряженная с функцией $R_n(t,s,\lambda_n)$.

Таким образом, оптимальное управление $u(t)$, которое минимизирует функционал (2.1), должно удовлетворять условиям оптимальности (2.2) и (2.4). Из условия оптимальности (2.2), с учетом решения сопряженной краевой задачи, получим следующее соотношение:

$$\beta\, u_k(t) = \left(\frac{\partial f(t,u)}{\partial u_k}\right) \sum_{n=1}^{\infty} G_n(T,t)\left\{h_n - \int_0^T G_n^*(T,\tau)f(\tau,u(\tau))d\tau\right\}, k = 1,...,m \tag{2.5}$$

где

$$G_n(T,t)=\frac{g_n(t)}{\lambda_n}[\sin\lambda_n(T-t)+\frac{1}{\lambda_n}\int_t^T P_n(s,t,\lambda_n)\sin\lambda_n(T-s)ds];\qquad(2.6)$$

$$G_n^*(T,\tau)=\frac{g_n(\tau)}{\lambda_n}[\sin\lambda_n(T-\tau)+\frac{1}{\lambda_n}\int_\tau^T R_n(T,s,\lambda_n)\sin\lambda_n(s-\tau)ds];$$

$$h_n=\xi_n-\psi_{1n}[\cos\lambda_n T+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^T R_n(T,\tau,\lambda_n)\cos\lambda_n\tau d\tau]-\frac{\psi_{1n}}{\lambda_n}[\sin\lambda_n T+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^T R_n(T,\tau,\lambda_n)\sin\lambda_n\tau d\tau],$$

которое называется нелинейным интегральным уравнением векторного оптимального управления.

Вопросы однозначной разрешимости системы нелинейных интегральных уравнений (2.5) исследованы по методике работы /5/, и установлены достаточные условия существования решения задачи нелинейной оптимизации. Разработан алгоритм построения приближенного решение задачи оптимизации и доказана их сходимость.

Список литературы

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 736 с.
2. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа. II том. – М.: Физматгиз, 1963. – 516 с.
3. Краснов М. Л. Интегральные уравнения. – М.: Наука, 1975. – 304 с.
4. Егоров А. И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. – М.: Наука, 1978. – 464 с.
5. Керимбеков А.К. Нелинейное оптимальное управление линейными системами с распределенными параметрами. Дисс. … д-ра физ.-мат. наук. – Бишкек, 2003.