УДК 517.946

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЯЗКОЙ РЕАГИРУЮЩЕЙ СМЕСИ ГАЗОВ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

А.И. ИСМАНБАЕВ, Д.А. ИСКЕНДЕРОВА, Г.Т. МУСАТАЕВА
E.mail. ksucta@elcat.kg

Макалада илешкектүү өз-ара аракеттенүүчү газдардын аралашмаларынын көзөнөктүү чөйрө аркылуу өтүүчү агымын аныктаган сызыктуу эмес дифференциалдык теңдемелер системасы каралган.

В данной статье исследуется нелинейная система дифференциальных уравнений описывающие движение вязко реагирующих смесей газов с учетом пористой среды.

In this article the nonlinear system of the differential equations describing movement of viscously reacting mixes of gases taking into account the porous environment is investigated.

Система уравнений, описывающая движение вязкой реагирующей смеси газов с цилиндрическими волнами в массовых лагранжевых координатах, имеет вид /1-3/:

$$\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial q}(xu), \quad \mathrm{v}=\frac{1}{\rho},$$

$$\frac{\partial c}{\partial t}=\chi\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{x^2}{\mathrm{v}}\frac{\partial c}{\partial q}\right)-c\,g,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\mu x\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{\mathrm{v}}\frac{\partial}{\partial q}(xu)\right)-x\frac{\partial p}{\partial q}-\beta(x)|u|^{\alpha}u, \quad p=r\frac{\theta}{\mathrm{v}}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial q}\left(\lambda_1(\theta)\frac{x^2}{\mathrm{v}}\frac{\partial \theta}{\partial q}\right)+\frac{\partial}{\partial q}\left(\lambda_2(\theta)\frac{x^2}{\mathrm{v}}\theta\frac{\partial c}{\partial q}\right)-p\frac{\partial}{\partial q}(xu)+$$

$$+\frac{\mu}{\mathrm{v}}\left(\frac{\partial}{\partial q}(xu)\right)^2-\frac{3\mu}{2}\frac{\partial}{\partial q}\left(u^2\right)+\delta\,c\,g.$$

Здесь ρ, v, u, θ, p, c – плотность, удельный объем, скорость, температура смеси, давление и массовая концентрация компонент; χ, μ, r, δ – физические постоянные; $\beta(x)$ – коэффициент проницаемости – непрерывная, неотрицательная, ограниченная функция и $\int_{-\infty}^{\infty}\beta(x)dx\le C$; $0\le\alpha\le 1; x\in[a;1]$, $a>0$ – эйлерова координата, $r\in[a;1]$ – лагранжева координата, $q\in[0;b]$ – массовая лагранжева координата, $t\in[0;T]$, $0<T<\infty$ – время.

В эйлеровых координатах рассматриваемая область $(x,t)\in Q'=\Omega'\times(0,T)$, $\Omega'=(a,1)$, $a>0$ не включает ось симметрии, где уравнения вырождаются. При рассмотрении в массовых лагранжевых координатах область $(q,t)\in Q=\Omega\times(0,T)$, $\Omega=(0,b)$ также не содержит линии вырождения.

Эйлерову координату следует рассматривать как решение задачи Коши

$$\frac{\partial x}{\partial t}(q,t)=u(q,t), \qquad x(q,0)=r(q). \tag{2}$$

Между различными введенными координатами существует связь /1/:

$$\frac{\partial x}{\partial q}=\frac{\mathrm{v}}{x}, \qquad q=\int_a^r r\,\rho_0(r)dr, \tag{3}$$

где $\rho_0(r)$ – начальное распределение плотности.

Функции u_0, θ_0, v_0, c_0, задающие начальные данные

$$u\big|_{t=0}=u_0(q),\;\; \theta\big|_{t=0}=\theta_0(q),\;\; c\big|_{t=0}=c_0(q),\;\; \mathrm{v}\big|_{t=0}=\mathrm{v}_0(q), \tag{4}$$

предполагаются известными, непрерывными,

$$0<c_0(q)\le 1, \quad 0<m_0\le(\mathrm{v}_0(q),\theta_0(q))\le M_0<\infty .$$

Область Q при этом не изменится, если принять не ограничивающее общности условие:

$$\int_0^b \mathrm{v}_0(q)dq=1. \tag{5}$$

Граничные условия имеют вид:

$$u\big|_{q=0}=u\big|_{q=b}=\frac{\partial\theta}{\partial q}\bigg|_{q=0}=\frac{\partial\theta}{\partial q}\bigg|_{q=b}=\frac{\partial c}{\partial q}\bigg|_{q=0}=\frac{\partial c}{\partial q}\bigg|_{q=b}=0. \tag{6}$$

ТЕОРЕМА. *Пусть* $\lambda_1(\theta)=\lambda\theta,\ \lambda_2(\theta)=\nu\theta^{1/2},\ \lambda,\nu=const$ *и начальные данные (4) удовлетворяют условиям* $(u_0,\ \mathrm{v}_0,\ \theta_0,\ c_0)\in W_2^1(0,b)$.

Функция $g(\rho,c,\theta)$ *является положительной и непрерывной в любой компактной области своих аргументов, а по* $\theta^{1/2}$*, кроме того, удовлетворяет условию Липшица.*

Тогда в области Q *с произвольной конечной высотой* T, $0<T<\infty$ *существует единственное обобщенное решение задачи (1), (2), (4), (6) такое, что*

$$\mathrm{v}(q,t)\in L_\infty\left(0,T;W_2^1(0,b)\right), \qquad \left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial\theta}{\partial t},\frac{\partial c}{\partial t},\right)\in L_2(Q),$$

$$(u(q,t),\ \theta(q,t),\ c(q,t))\in L_\infty\left(0,T;W_2^1(0,b)\right)\cap L_2\left(0,T;W_2^2(0,b)\right),$$

$0<c(q,t)\le 1,\ \mathrm{v}(q,t),\ \theta(q,t)$ *– строго положительные, ограниченные функции.*

Доказательство теоремы проведем методом априорных оценок. Выводятся глобальные априорные оценки, положительные постоянные C_i, N_i в которых зависят только от данных задачи и величины T интервала времени, но не зависят от промежутка существования локального решения. На основе полученных глобальных априорных оценок локальное решение /2, 3/ продолжается на весь промежуток времени $[0,T]$, $0<T<\infty$.

Примем положительные постоянные $\chi,\ \mu,\ \lambda,\ \nu,\ r,\ \delta$ равными единице.

Из уравнений системы (1) и ограничений на данные задачи видно, что функции $\mathrm{v}(q,t)$, $\theta(q,t)$ неотрицательны и $0<c(q,t)\le 1$.

Непосредственно из уравнения неразрывности системы (1) с учетом граничных условий и (5) вытекает оценка:

$$\int_0^1 \mathrm{v}(q,t)dq=1, \tag{7}$$

Умножая третье уравнение системы (1) на u и складывая со вторым и четвертым уравнениями, получим равенство:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}u^2+c+\theta\right)=\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{u\,x}{\mathrm{v}}\frac{\partial}{\partial q}(xu)\right)-\frac{\partial}{\partial q}\left(u\,x\frac{\theta}{\mathrm{v}}\right)+\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{x^2\theta}{\mathrm{v}}\frac{\partial\theta}{\partial q}\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{x^2}{\mathrm{v}}\theta^{3/2}\frac{\partial c}{\partial q}\right)+\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{x^2}{\mathrm{v}}\frac{\partial c}{\partial q}\right)-\frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial q}\left(u^2\right)-\beta(x)|u|^\alpha u^2.$$

Интегрируя его по Q с учетом граничных условий, находим закон сохранения:

$$\int_0^b\left(\frac{1}{2}u^2+c+\theta\right)dq+\int_0^T\int_0^b\beta(x)|u|^\alpha u^2dqdt=\int_0^b\left(\frac{1}{2}u_0^2+c_0+\theta_0\right)dq\le N_1. \quad (8)$$

Умножая второе уравнение системы (1) на c и интегрируя по (q,t), имеем оценку:

$$\max_{0\le t\le T}\int_0^b c^2dq+\int_0^T\int_0^b\left(\frac{1}{\mathrm{v}}\left(\frac{\partial c}{\partial q}\right)^2+c^2g\right)dqdt\le N_2.$$

Из (7) следует, что $\forall\,t\in[0,T]$ найдется такая точка $z(t)\in[0,b]$, что $\mathrm{v}(z(t),t)=1$. Рассуждая аналогично /4/, выводится одно вспомогательное соотношение между искомыми функциями:

$$\mathrm{v}(q,t)=Y^{-1}(t)B^{-1}(q,t)K(q,\tau)\left[\mathrm{v}_0(q)+\int_0^t\theta(q,\tau)Y(\tau)B(q,\tau)K^{-1}(q,\tau)d\tau\right], \quad (9)$$

где $B(x,t)=\exp\left\{\int_{z(t)}^{q}\left[\frac{u_0}{r}-\frac{u}{x}-\int_0^t\frac{u^2}{x^2}d\tau\right]dq\right\},\quad Y(t)=\exp\left\{\int_0^t\frac{\theta}{\mathrm{v}}(z(t),\tau)d\tau\right\}.$

$$K(x,t)=\exp\left\{\int_0^t\int_{z(t)}^{q}\beta(\xi)|u|^\alpha u\,(\xi,\tau)d\xi\,d\tau\right\}$$

Аналогично /4/ выводятся неравенства:

$$N_3^{-1}\le B(q,t)\le N_3,\qquad N_4^{-1}\le Y(t)\le N_4,\ N_5^{-1}\le K(x,t)\le N_5\ \ \forall(q,t)\in Q. \quad (10)$$

Пусть $h(q,t)$ – непрерывная функция. Введем обозначения:

$$M_h(t)=\max_{0\le q\le b}h(q,t),\quad m_h(t)=\min_{0\le q\le b}h(q,t).$$

Из (9) и (10) вытекают оценки:

$$m_{\mathrm{v}}(t)\ge N_6. \quad (11)$$

$$M_{\mathrm{v}}(t)\le C_1\left[1+\int_0^t M_\theta(\tau)d\tau\right],\qquad \forall\,t\in[0,T]. \quad (12)$$

Умножением второго уравнения системы (1) на $\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{x^2}{\mathrm{v}}\frac{\partial c}{\partial q}\right)$ и интегрированием по q и по t выводится оценка:

$$\max_{0\le t\le T}\int_0^b\frac{1}{\mathrm{v}}\left(\frac{\partial c}{\partial q}\right)^2dq+\int_0^T\int_0^b\left[\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{x^2}{\mathrm{v}}\frac{\partial c}{\partial q}\right)\right]^2dqd\tau\le N_7. \quad (13)$$

Умножим первое уравнение системы (1) на $\left(1-\frac{1}{\text{v}}\right)$, третье на u, четвертое на $\left(1-\frac{1}{\theta}\right)$ и сложим их со вторым уравнением. Получившееся соотношение проинтегрируем по q.

$$\frac{d}{dt}\int_0^b\left(\frac{1}{2}u^2+c+(\theta-\ln\theta)+(\text{v}-\ln\text{v})\right)dq+\int_0^b\left[\frac{x^2u_q^2}{\text{v}\theta}+\frac{\text{v}u^2}{\theta x^2}+\frac{x^2\theta_q^2}{\text{v}\theta}+\frac{cg}{\theta}\right]dq=$$

$$=\int_0^b\left[\frac{x^2\theta_q c_q}{\text{v}\theta^{1/2}}+\frac{u\,u_q}{\theta}-\beta(x)|u|^\alpha u^2\right]dq.$$

Применим к правой части неравенства Юнга и Коши. После интегрирования по t, с учетом оценки (13) получим оценку:

$$\max_{0\le t\le T}\int_0^b\left(\frac{1}{2}u^2+c+(\theta-\ln\theta)+(\text{v}-\ln\text{v})\right)dq+$$

$$+\int_0^T\int_0^b\left[\frac{u_q^2}{\text{v}\theta}+\frac{\text{v}u^2}{\theta}+\frac{\theta_q^2}{\text{v}\theta}+\frac{cg}{\theta}+\beta(x)|u|^\alpha u^2\right]dqdt\le N_8. \qquad (14)$$

Из (14) вытекает оценка

$$\int_0^T\int_0^b\frac{1}{\text{v}\theta}\left[\frac{\partial}{\partial q}(xu)\right]^2dqd\tau\le N_9.$$

Используя неравенство

$$M_\theta(t)\le C_2\left(1+\int_0^b\frac{\theta_q^2}{\text{v}\theta}dq\right).$$

имеем оценку:

$$\int_0^T M_\theta(t)dt\le N_{10}. \qquad (15)$$

Из (12) с учетом (15) вытекает ограниченность удельного объема сверху.

$$M_{\text{v}}(t)\le N_{11},\quad \forall\ t\in[0,T]. \qquad (16)$$

Умножим уравнение импульса системы (1) на u и проинтегрируем по Q. После некоторых преобразований /4/, находим оценку:

$$\int_0^T\int_0^b\left(\frac{\partial u}{\partial q}\right)^2dq\,d\tau\le N_{12}.$$

Умножим уравнение теплопроводности системы (1) на θ и проинтегрируем по Q. После некоторых преобразований получим оценку:

$$\max_{0\le t\le T}\int_0^b\theta^2\,dq+\int_0^T\int_0^b\left(\frac{\partial\theta}{\partial q}\right)^2dqd\tau\le N_{13}. \qquad (17)$$

Дифференцируя (9) по q, используя неравенство Коши и (8), (10), (16), (17), выводим оценку:

$$\int_0^b \left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial q}\right)^2 dq \le N_{14}.$$

Умножим уравнение импульса системы (1) на $x\dfrac{\partial}{\partial q}\left(\dfrac{1}{\mathrm{v}}\dfrac{\partial}{\partial q}(xu)\right)$ и проинтегрируем по Ω. После применения леммы Гронуолла имеем оценку:

$$\max_{0\le t\le T}\int_0^b \left(\frac{\partial u}{\partial q}\right)^2 dq + \int_0^T\int_0^b \left(\frac{\partial^2 u}{\partial q^2}\right)^2 dq d\tau \le N_{15}.$$

Непосредственно из первого и третьего уравнений системы (1) получим:

$$\int_0^T\int_0^b \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dq d\tau \le N_{16}, \qquad \int_0^b \left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t}\right)^2 dq \le N_{17}, \quad \forall\, t\in[0,T].$$

Умножением уравнения теплопроводности системы (1) на $\theta\left(\theta^2\right)_{xx}$ и интегрированием по Q выводится оценка:

$$\max_{0\le t\le T}\int_0^b \left(\frac{\partial \theta}{\partial q}\right)^2 dq + \int_0^T\int_0^b \left[\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial q^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)^2\right] dq d\tau \le N_{18}.$$

Из оценки (13) и второго уравнения системы (1) имеем:

$$\max_{0\le t\le T}\int_0^b \left(\frac{\partial c}{\partial q}\right)^2 dq + \int_0^T\int_0^b \left[\left(\frac{\partial^2 c}{\partial q^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial c}{\partial t}\right)^2\right] dq d\tau \le N_{19}.$$

Таким образом, получены все оценки, необходимые для доказательства существования обобщенного решения. Единственность доказывается составлением однородного уравнения относительно разности двух совместных решений аналогично /4/.

Теорема полностью доказана.

Список литературы

1. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Система квазилинейных уравнений и их применение к газовой динамике. – М.: Наука, 1978. – 667 с.
2. Петров А.Н. Краевые задачи для уравнений одномерного нестационарного течения реагирующей смеси газов // Динамика сплошной среды. – 1993. – Вып.107. – С.112–123.
3. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. – Новосибирск: Наука, 1983. – 319с.
4. Николаев В.Б. Глобальная разрешимость уравнений движения вязкого газа с осевой и сферической симметрией // Динамика сплошной среды. – 1983. – Вып. 63. – С.136–141.