УДК 531.53

# ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИСТЕМЫ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПЛОСКОЙ УПРУГОЙ ВОЛНЫ С ПОЛОСТЬЮ В СРЕДЕ

К.Ж.АБЫКЕЕВ
*E.mail. ksucta@elcat.kg*

*Макалада чөйрөдөгү көңдөйлүү тегиздиктеги толкундардын өз-ара аракеттенүүсү жөнүндөгү маселени чечүү үчүн интегро-дифференциалдык теңдемелер системасын өзгөртүп түзүү каралат.*

*В статье рассматривается преобразование системы интегро-дифференциальных уравнений для решения задачи о взаимодействии плоской упругой волны с полостью в среде.*

*In the article the transformation of the system of integrodifferential equations for the solution of the problem about interaction of plane elastic wave with the cavity is examined on environment.*

Преобразуем системы интегро-дифференциальных уравнений (24), (26) в /1/ к виду, удобному для определения его решения.
Приведем интеграл

$$K(t) = \iint\limits_{(S_3)} \frac{c(x^1)\sigma_{tt}\left(M^1, t - r/a\right)}{a^2 r^3} dS_1, \qquad (1)$$

где $C(x^1)$ – заданная функция, к виду, в котором подынтегральное выражение содержит частную производную первого порядка от величины $\sigma$ по t и не содержит других ее производных. С этой целью, учитывая симметричность расположения области $(S_1)$ относительно линии $L$, представим (1) в виде повторного интеграла, производя интегрирование сначала вдоль образующей полости, т.е. по $y^1$, а затем – вдоль линии $L$. Обозначим через $l$ длину дуги $OM^1 (M^1 \in L)$, взятую с положительным или отрицательным знаком при совпадении или несовпадении, соответственно, направления начального элемента дуги с направлением оси $Ox$. Примем во внимание, что в силу специфики рассматриваемой плоской задачи величины $\sigma$ и $\gamma$ в фиксированный момент времени не зависят от $y^1$. Поэтому в последующем изложении обозначения $\sigma\left(M^1, t\right)$, $\gamma\left(M^1, t\right)$ будут считаться эквивалентными обозначениям $\sigma(l, t)$, $\gamma(l, t)$, соответственно. Учитывая это и принимая во внимание четность подынтегральной функции в (3) относительно $y^1$, а также отмеченную выше симметричность области $(S_1)$ относительно линии $(L)$, переходя в (1) к повторным интегралам, получаем:

$$K(t) = 2\int\limits_{L_1(t)}^{L_2(t)} dl \int\limits_0^{y(l,t)} \frac{C(x^1)\sigma_{tt}(l, t - r/a)}{a^2 r^3} dy^1. \qquad (2)$$

Причем: $L_1(t)$, $L_2(t)$ – значения $l$ для точек пересечения линии $(L)$ с границей области $(S_1)$, при этом $L_1(t) < 0$, $L_2(t) > 0$, если совпадения таких двух точек к моменту времени $t$ еще не произошло, если же указанное совпадение произошло до момента $t$, то $L_1(t)$, $L_2(t)$ – это два значения $l$ для точки, где произошло это совпадение, при этом принимается $L_1(t) < 0$, $L_2(t) > 0$, $Y(l,t)$ – значение $y^1$, $(y^1 > 0)$ для точки границы области $(S_1)$.

Для каждого малого $\delta > 0$ будем выделять из той половины области $(S_1)$, где $y^1 > 0$, малую подобласть, ограниченную линией $L$ и гладкой выпуклой кривой, представленной уравнением вида $y^1 = \omega(l,\delta)$, где $\delta$ – наибольшее значение функции $y^1 = \omega(l,\delta)$ в интервале $[L_1(t), L_2(t)]$. Для выполнения преобразований, используемых ниже, целесообразно представить (2) в виде:

$$K(t) = 2\lim_{\delta\to 0}\left\{\int_{L_1(t)}^{L_2(t)} dl \int_0^{y(l,t)} \frac{C(x^1)\sigma_{tt}(l,t-r/a)}{a^2 r^3} dy^1\right\}$$

(3)

Введем обозначения:

$$\tau = t - \frac{r}{a},$$

(4)

или

$$\tau = t - \frac{1}{a}\sqrt{x^{1^2} + y^{1^2} + \left(f\left(x^1\right)\right)^2}$$

(5)

Дифференцируя (5), получаем

$$\frac{\partial\tau}{\partial y^1} = -\frac{1}{a}\frac{y^1}{\sqrt{x^{1^2} + y^{1^2}}} = -\frac{1}{a}\frac{y^1}{r}.$$

(6)

Исходя из (3), принимая во внимание (6), имеем:

$$K(t) = -\frac{2}{a}\lim_{\delta\to 0}\left\{\int_{L_1(t)}^{L_2(t)} dl \int_{\omega(l,\delta)}^{Y(l,t)} \frac{c(x^1)\sigma_{tt}(l,t-r/a)\left(-1/a\right)y^1/r}{r^2 y^1} dy^1\right\} =$$

$$= -\frac{2}{a}\lim_{\delta\to 0}\left\{\int_{L_1(t)}^{L_2(t)} dl \int_{\omega(l,\delta)}^{Y(l,t)} \frac{c(x^1)\dfrac{\partial}{\partial\tau}\sigma_t(l,t-r/a)\dfrac{\partial\tau\left(x^1,y^1\right)}{\partial y^1}}{r^2 y^1} dy^1\right\} =$$

$$= -\frac{2}{a}\lim_{\delta\to 0}\left\{\int_{L_1(t)}^{L_2(t)} dx^1 \int_{\omega(l,\delta)}^{Y(l,t)} \frac{c(x^1)\dfrac{\partial\sigma_t(l,\tau\left(x^1,y^1\right))}{\partial y^1}}{r^2 y^1} dy^1\right\}.$$

(7)

Принимаем к внутреннему интегралу в последней части (7) метод интегрирования по частям. Считая, что на границе области $(S_1)$ $\sigma_t\left(l,\tau\left(x^1,Y(l,t)\right)\right) = 0$, имеем:

$$K(t) = -\frac{2}{a}\lim_{\delta\to 0}\left\{\int_{L_1(t)}^{L_2(t)} dl \int_{\omega(l,\delta)}^{Y(l,t)}\left[\left(\frac{c(x^1)\sigma_t\left(l,\tau\left(x^1,y^1\right)\right)}{r^2 y^1}\right)_{y^1=\omega(l,\delta)}^{y^1=Y(l,t)} - \int_{\omega(l,\delta)}^{Y(l,t)} c(x^1)\sigma_t\left(l,\tau\left(x^1,y^1\right)\right)\frac{\partial}{\partial y^1}\left(\frac{1}{r^2 y^1}\right)dy^1\right]\right\}. =$$

$$=-\frac{2}{a}\lim_{\delta\to 0}\left\{\int\limits_{L_1(t)}^{L_2(t)}\left[-\frac{c(x^1)\sigma_t\left(l,\tau\left(x^1,\omega(l,\delta)\right)\right)}{r^2\omega(l,\delta)}-\int\limits_{\omega(l,\delta)}^{Y(l,t)}c(x^1)\left(\left(\sigma_t\left(l,\tau\left(x^1,y^1\right)\right)-\sigma_t\left(l,\tau\left(x^1,\omega(l,\delta)\right)\right)\right)\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sigma_t\left(l,\tau\left(x^1,\omega(l,\delta)\right)\right)\right)\frac{\partial}{\partial y^1}\left(\frac{1}{r^2y^1}\right)dy^1\right]dl\right\}=-\frac{2}{a}\lim_{\delta\to 0}\left\{\int\limits_{L_1(t)}^{L_2(t)}\left[-\frac{c(x^1)\sigma_t\left(l,\tau\left(x^1,\omega(l,\delta)\right)\right)}{r^2\omega(l,\delta)}-\right.\right.$$

$$-\int\limits_{\omega(l,\delta)}^{Y(l,t)}c(x^1)\left(\sigma_t\left(l,\tau\left(x^1,y^1\right)\right)-\sigma_t\left(l,\tau\left(x^1,\omega(l,\delta)\right)\right)\right)\left(-\frac{2}{r^4}-\frac{1}{r^2y^{1^2}}\right)dy^1-\frac{c(x^1)\sigma_t\left(l,\tau\left(x^1,\omega(l,\delta)\right)\right)}{r^2Y(l,t)}+$$

$$\left.\left.+\frac{c(x^1)\sigma_t\left(l,\tau\left(x^1,\omega(l,\delta)\right)\right)}{r^2\omega(l,\delta)}\right]dl\right\} \qquad (8)$$

Первое и последнее слагаемые подынтегрального выражения последней части (8) взаимно уничтожаются. Поэтому, принимая еще во внимание, что $\lim\limits_{\delta\to 0}\omega\left(x^1,\delta\right)=0$, а вследствие (5) $\tau\left(x^1,0\right)=t-\frac{1}{a}\sqrt{x^{1^2}+\left(f\left(x^1\right)\right)^2}$, на основании (8) имеем:

$$K(t)=-\frac{2}{a}\int\limits_{L_1(t)}^{L_2(t)}c\left(x^1\right)dl\int\limits_0^{Y(l,t)}\left[\sigma_t\left(l,t-\frac{r}{a}\right)-\sigma_t\left(l,t-\frac{1}{a}\sqrt{x^{1^2}+\left(f\left(x^1\right)\right)^2}\right)\right]\left(\frac{2}{r^4}+\frac{1}{r^2y^{1^2}}\right)dy^1+$$

$$+\frac{2}{a}\int\limits_{L_1(t)}^{L_2(t)}\frac{c\left(x^1\right)\sigma_t\left(l,t-\frac{1}{a}\sqrt{x^{1^2}+\left(f\left(x^1\right)\right)^2}\right)}{r^2Y(l,t)}dl$$

(9)

Совершенно аналогично интеграл

$$\overline{K}(t)=\iint\limits_{(S_3)}\frac{\overline{c}(x^1)\gamma_{tt}\left(M^1,t-r/b\right)}{b^2r^3}dS_2,$$

(10)

где $\overline{c}\left(x^1\right)$ – заданная функция, приводится к виду:

$$\overline{K}(t)=-\frac{2}{b}\int\limits_{L_3(t)}^{L_4(t)}\overline{c}\left(x^1\right)dl\int\limits_0^{\overline{Y}(l,t)}\left[\gamma_t\left(l,t-\frac{r}{b}\right)-\gamma_t\left(l,t-\frac{1}{b}\sqrt{x^{1^2}+\left(f\left(x^1\right)\right)^2}\right)\right]\left(\frac{2}{r^4}+\frac{1}{r^2y^{1^2}}\right)dy^1+$$

$$+\frac{2}{b}\int\limits_{L_3(t)}^{L_4(t)}\frac{\overline{c}\left(x^1\right)\gamma_t\left(l,t-\frac{1}{b}\sqrt{x^{1^2}+\left(f\left(x^1\right)\right)^2}\right)}{r^2\overline{Y}(l,t)}dl$$

(11)

Причем $L_3(t),\ L_4(t)$ – значения $l$ для точек пересечения линии $(L)$ с границей области $(S_2)$, при этом $L_3(t)<0,\ L_4(t)>0$, если совпадения таких двух точек к моменту времени $t$ еще не произошло, если же указанное совпадение произошло до момента $t$, то $L_3(t),\ L_4(t)$ – это два значения $l$ для точки, где произошло это совпадение, при этом принимается $L_3(t)<0,\ L_4(t)>0$; $\overline{Y}(l,t)$ – значение $y^1$ $\left(y^1>0\right)$ для точки границы области $(S_2)$.

Так как области $S_1^1,\ S_2^1$ при малых $\delta_1,\ \ \delta_2$ мало отклоняются от кругов $K_{\delta_1},\ \ K_{\delta_2}$, которые являются их проекциями на плоскость $z^1=0$, то принимая (9), (11), имеем:

$$\iint\limits_{(S_3)}\frac{c(x^1)\sigma_{tt}\left(M^1,t-r/a\right)}{a^2r^3}dS_3=-\frac{2}{a}\int\limits_{L_1(t)}^{L_2(t)}c(x^1)dl\int\limits_{\omega_1(l,\delta_1)}^{y(l,t)}\left[\sigma_t\left(l,t-r/a\right)-\sigma_t(l,t-\frac{1}{a}\sqrt{x^{1^2}+(f(x^1))^2}\ )\ \right]\times$$

$$\times(\frac{2}{r^4}+\frac{1}{r^2 y^{1^2}})dy^1+\frac{2}{a}\int\limits_{L_1(t)}^{L_2(t)}\chi_1(l,\delta_1)\frac{c(x^1)\sigma_t(l,t-1/a\sqrt{x^{1^2}+(f(x^1))^2})}{r^2 Y(l,t)}dl+R_5(t,\delta_1),$$

(12)

где $R_7(t,\delta_1)=0(\delta_1^2)$.

$$\omega_2(l,\delta_2)=\begin{cases}\sqrt{\delta_2^2-l^2} & npu \quad |l|\le\delta_1,\\ 0 & npu \quad |l|>\delta_1,\end{cases}$$

(13)

$$\chi_1(l,\delta_1)=\begin{cases}0 & npu \quad |l|<\delta_1,\\ 1 & npu \quad |l|\ge\delta_1,\end{cases}$$

(14)

$$\iint\limits_{(S_4)}\frac{\bar{c}(x^1)\gamma_{tt}\left(M^1,t-r/b\right)}{b^2 r^3}dS_4=-\frac{2}{b}\int\limits_{L_3(t)}^{L_4(t)}\bar{c}(x^1)dl\int\limits_{\omega_2(l,\delta_1)}^{\bar{Y}(l,t)}\left[\gamma_t\left(l,t-r/b\right)-\gamma_t(l,t-\frac{1}{b}\sqrt{x^{1^2}+(f(x^1))^2})\ \right]\times$$

$$\times(\frac{2}{r^4}+\frac{1}{r^2 y^{1^2}})dy^1+\frac{2}{b}\int\limits_{L_3(t)}^{L_4(t)}\chi_2(l,\delta_2)\frac{\bar{c}(x^1)\gamma_t(l,t-1/a\sqrt{x^{1^2}+(f(x^1))^2})}{r^2\bar{Y}(l,t)}dl+R_8(t,\delta_2), \quad (15)$$

где $R_8(t,\delta_1)=0(\delta_2^2)$,

$$\omega_2(l,\delta_1)=\begin{cases}\sqrt{\delta_2^2-l^2} & npu \quad |l|\le\delta_2,\\ 0 & npu \quad |l|>\delta_2,\end{cases}$$

(16)

$$\chi_2(l,\delta_1)=\begin{cases}0 & npu \quad |l|<\delta_2,\\ 1 & npu \quad |l|\ge\delta_2,\end{cases}$$

(17)

Принимая во внимание (12)-(17), учитывая введенные выше обозначения, представим систему интегро-дифференциальных уравнений (5), (6) в следующем виде:

$$\sigma_t(0,t)=\frac{4a}{\lambda+4\mu}\left\{g_1(0,t)-\left[\mu\gamma_x(0,t)-\mu f_{x^1x^1}(0)\sigma(0,t)+\frac{\lambda+4\mu}{8\pi}\times\right.\right.$$

$$\times\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sigma\left(\delta_1\cos\theta,\delta_1\sin\theta,t-\delta_1/a\right)}{\delta_1}d\theta+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{L_1(t)}^{L_2(t)}dl\int\limits_{\omega_1(l,\delta_1)}^{Y(l,t)}(\sigma(l,t-r/a)+\frac{r}{a}\sigma_t\left(l,t-r/a\right))\times$$

$$\times(\frac{3(\lambda x^{1^2}+(\lambda+2\mu)z^{1^2})}{r^5}-\frac{2(\lambda+\mu)}{r^3})dy^1-\frac{1}{2\pi a}\int\limits_{L_1(t)}^{L_2(t)}(\lambda x^{1^2}+(\lambda+2\mu)z^{1^2})dl\int\limits_{\omega_1(l,\delta_1)}^{Y(l,t)}(\sigma_t(l,t-r/a)-$$

$$-\sigma_t(l,t-\frac{1}{a}\sqrt{x^{1^2}+(f(x^1))^2}))(\frac{2}{r^4}+\frac{1}{r^2 y^{1^2}})dy^1+\frac{1}{2\pi a}\int\limits_{L_1(t)}^{L_2(t)}\chi_1(l,\delta_1)(\lambda x^{1^2}+(\lambda+2\mu)z^{1^2})\times$$

$$\times\frac{\sigma_t(l,t-1/a\sqrt{x^{1^2}+(f(x^1))^2})}{r^2 Y(l,t)}dl-\frac{3\mu}{2\pi}\int\limits_{L_3(t)}^{L_4(t)}dl\int\limits_{\omega_2(l,\delta_2)}^{\bar{Y}(l,t)}((\gamma(l,t-r/b)+\frac{r}{b}\gamma_t(l,t-r/b))/r^5)dy^1+$$

$$\frac{\mu}{b\pi}\int\limits_{L_3(t)}^{L_4(t)}x^1z^1dl\int\limits_{\omega_2(l,\delta_2)}^{\bar{y}(l,t)}(\gamma_t(l,t-r/b)-\gamma_t(l,t-1/b\sqrt{x^{1^2}+(f(x^1))^2}))(\frac{2}{r^4}+\frac{1}{r^2y^{1^2}})dy^1-$$

$$-\frac{\mu}{\pi b}\int_{L_3(t)}^{L_4(t)}\chi_2(l,\delta_2)x^1z^1\frac{\gamma_t(l,t-1/b\sqrt{x^{1^2}+(f(x^1))^2})}{r^2\overline{Y}(l,t)}dl\ \Big]\Big\}+\overline{R}_1(t,\delta_1,\delta_2), \tag{18}$$

*где* $\overline{R}_1(t,\delta_1,\delta_2)=0(\delta_1)+0(\delta_2).$ (19)

$$\gamma_t(0,t)=\frac{4b}{3}\left\{\frac{1}{\mu}g_2(0,t)-\left[\frac{3}{8\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\gamma(\delta_2\cos\theta,\delta_2\sin\theta,t-\delta_2/b)}{\delta_2}d\theta-\sigma_x(0,t)-f_{x^1x^1}(0)\gamma(0,t)+\right.\right.$$

$$+\frac{3}{4\pi}\int_{L_3(t)}^{L_4(t)}dl\int_{\omega_2(l,\delta_2)}^{\overline{Y}(l,t)}(\gamma(l,t-r/b)+\frac{r}{b}\gamma_t(l,t-r/b))\frac{z^{1^2}-x^{1^2}}{r^5}dy^1-\frac{1}{2\pi b}\int_{L_3(t)}^{L_4(t)}(z^{1^2}-x^{1^2})dl\times$$

$$\times\int_{\omega_2(l,\delta_2)}^{\overline{y}(l,t)}(\gamma_t(l,t-r/b)-\gamma_t(l,t-\frac{1}{b}\sqrt{x^{1^2}+(f(x^1))^2}))(\frac{2}{r^4}+\frac{1}{r^2y^{1^2}})dy^1+\frac{1}{2\pi b}\int_{L_3(t)}^{L_4(t)}\chi_2(l,\delta_2)(z^{1^2}-x^{1^2})\times$$

$$\times\frac{\gamma_t(l,t-1/b\sqrt{x^{1^2}+(f(x^1))^2})}{r^2\overline{y}(l,t)}dl+\frac{3}{2\pi}\int_{L_1(t)}^{L_2(t)}dl\int_{\omega_1(l,\delta_2)}^{y(l,t)}((\sigma(l,t-r/a)+\frac{r}{a}\sigma_t(l,t-r/a))/r^5)dy^1-$$

$$-\frac{1}{a\pi}\int_{L_1(t)}^{L_2(t)}x^1z^1dl\int_{\omega_1(l,\delta_1)}^{Y(l,t)}(\sigma_t(l,t-r/a)-\sigma_t(l,t-1/a\sqrt{x^{1^2}+(f(x^1))^2}))(\frac{2}{r^4}+\frac{1}{r^2y^{1^2}})dy^1+$$

$$+\frac{1}{\pi a}\int_{L_1(t)}^{L_2(t)}\chi_1(l,\delta_1)x^1z^1\frac{\sigma_t(l,t-1/a\sqrt{x^{1^2}+(f(x^1))^2})}{r^2Y(l,t)}dl\ \Big]\Big\}+\overline{R}_2(t,\delta_1,\delta_2), \tag{20}$$

где $\overline{R}_2(t,\delta_1,\delta_2)=0(\delta_1)+0(\delta_2).$ (21)

Причем в (18), (20) величины $\omega_1(l,\delta_1)$, $\chi_1(l,\delta_1)$, $\omega_2(l,\delta_2)$, $\chi_2(l,\delta_2)$ представляются формулами (20), (14), (16), (17), соответственно.

Предусматриваются численные решения системы (18) и (20).

**Список литературы**


1. Абыкеев К.Ж. Применение метода волновых потенциалов для решения задачи о взаимодействии плоской упругой волны с полостью в среде //Вестник КГУСТА. – № 2(32). – Том 2. – Бишкек, 2011. – С. 145-151.
2. Шамгунов Ш.Д. Предельные соотношения для частных производных волнового потенциала простого слоя и их приложения // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, вып. 21. – Фрунзе: Илим, 1988. – С. 281-290.